

时滞反馈作用下 ENSO 充电振子模型的分岔分析*

刘宇丹, 杜智远, 赵 强

(北京大学 物理学院 大气与海洋科学系, 北京 100871)

摘要: 通过数学变换将一类含有时滞反馈机制的 ENSO 充电振子模型转换成时滞 Van der Pol-Duffing 方程,并以此为基础来研究该 ENSO 系统的零解稳定性、Hopf 分岔和极限环等动力学特征.用平均法分析了其零解的稳定性与时滞效应的强度,其和时间都有关系,讨论了时滞负反馈对 ENSO 振荡的影响并通过简单数值模拟验证理论分析的结果.

关键词: ENSO; 时滞 Van der Pol-Duffing 方程; Hopf 分岔

中图分类号: P433

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380332

引 言

El Niño(厄尔尼诺)/南方涛动(ENSO)是大尺度海气相互作用(特别是热带海气耦合相互作用)的集中表现,是年际气候变化中的最强信号,因此其成为认识年际气候变化规律和预测年际气候变化的重要突破口.为了揭示 ENSO 现象的物理机制及其变化规律,科学家们在进行观测资料统计和诊断分析、数值模拟的同时,也开展了 ENSO 机理的动力学理论研究^[1-5].相对于复杂的全球海-气耦合数值模式,通过简化海气非线性相互作用物理过程所得到的振子概念模型能够更容易地刻画海气耦合运动本质和物理机理,从而更成功地模拟 ENSO 的某些重要物理现象.因此许多学者提出研究 ENSO 的各种振子形式的动力系统模型,例如“时滞振子”“平流-反射振子”“充电-放电振子”“西太平洋振子”,以及“时滞微分方程”理论来探索 ENSO 动力学机理^[6-12].另一方面,笔者也注意到 Van der Pol-Duffing 振子作为概念模型已应用于耦合海冰模式、模拟高分辨率的冰芯资料、古气候动力学理论等研究^[13-15].由于时滞效应对非线性系统稳定性的影响不可忽视^[16-17],本文中,用一个受到时滞反馈作用的 Van der Pol-Duffing 振子来研究时滞反馈效应对 ENSO 的影响.基于 Jin^[6]所提出的 ENSO 充电振子理论模型,增加考虑时滞反馈作用机制,该 ENSO 振子模型的动力学控制方程组可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = CT + Dh - \varepsilon T^3 + \Delta, \\ \frac{dh}{dt} = -ET - R_h h, \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2017-12-22; 修订日期: 2018-02-26

基金项目: 国家自然科学基金(41175052)

作者简介: 刘宇丹(1983—),女,硕士(通讯作者). E-mail: veta_elle@pku.edu.cn.

其中 T 表示赤道东太平洋的海表温度(SST)距平, h 表示赤道西太平洋的温跃层厚度距平. 上面的模型有效地描述了海表温度距平和温跃层厚度距平间的非线性相互作用. C, D, E, R_h 和 ε 表示正的模式参数, 有关它们的详细定义和物理意义参见文献[6], 在这里增加了时滞反馈作用项 Δ .

1 时滞 Van der Pol-Duffing 方程

通过数学变换^[18-21], 得到以下微分方程:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T + \varepsilon \left[(\mu + 3T^2) \frac{dT}{dt} + R_h T^3 \right] = \varepsilon \Delta, \tag{2}$$

其中

$$\mu\varepsilon = R_h - C, \quad \omega^2 = DE - CR_h, \tag{3}$$

并且

$$0 < \varepsilon < 1, \quad CR_h < DE. \tag{4}$$

为了不失一般性, 这里考虑弱时滞反馈效应, 取

$$\Delta = \kappa T(t - \tau), \tag{5}$$

κ 是时滞强度, τ 是时滞时间. 式(2)就是包含时滞反馈效应的 Van der Pol-Duffing 方程. 在充放电振子模态中, 主要考虑赤道海水热容量在海表风应力的驱动下发生充电/放电的过程, 在这一过程中加入了 Rossby 波的时滞反馈作用: 由于海表西风异常产生的 Rossby 波遇到西边界后成为沿赤道上翻的 Kelvin 波, 这个冷性的 Kelvin 波到达赤道中太平洋后减小了热通量, 从而形成负反馈 $\kappa < 0$, 在 Rossby 波转换成 Kelvin 波时所需的时间即为时滞时间 τ . 含有时滞效应的 Van der Pol-Duffing 方程的动力学已有比较多的研究^[22-23], 本文将对模式(2)的性态做分析.

2 零解的稳定性与 Hopf 分岔

为了研究方便, 这里假设 $\omega = 1$, 将含有 ε 的项移到等式右边:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + T = \varepsilon G, \tag{6}$$

其中

$$G(T, \dot{T}, \Delta) = -(\mu + 3T^2) \frac{dT}{dt} - R_h T^3 + \kappa T(t - \tau). \tag{7}$$

根据时滞微分方程的平均法, 设方程(6)中 (T, \dot{T}) 满足

$$T = A \cos(t - \varphi), \tag{8}$$

$$\frac{dT}{dt} = -A \sin(t - \varphi). \tag{9}$$

此时方程(6)化为极坐标形式:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\varepsilon \sin(t - \varphi) G(A \cos(t - \varphi), -A \sin(t - \varphi), \kappa A_\tau \cos(t - \tau - \varphi_\tau)), \\ A \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \cos(t - \varphi) G(A \cos(t - \varphi), -A \sin(t - \varphi), \kappa A_\tau \cos(t - \tau - \varphi_\tau)). \end{cases} \tag{10}$$

由于振幅 A 和相位 φ 是时间的慢变函数, 则有 $A(t - \tau) \cong A(t), \varphi(t - \tau) \cong \varphi(t)$. 此时对方程组(10)等号右边在 $(0, 2\pi)$ 内取积分, 可得到

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\varepsilon A \left(\kappa \sin \tau + \mu + \frac{3}{4} A^2 \right), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \left(\kappa \cos \tau - \frac{3}{4} R_h A^2 \right). \end{cases} \quad (11)$$

方程组(11)即为含有时滞反馈的平均方程,将方程(6)的近似解改写为

$$T = A_1 \cos t + A_2 \sin t. \quad (12)$$

则其对应的平均方程为

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \left[(-\kappa \sin \tau - \mu) A_1 - \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + A_2^2) - (\kappa \cos \tau) A_2 + \frac{3}{4} R_h A_2 (A_1^2 + A_2^2) \right], \\ \frac{dA_2}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \left[(-\kappa \sin \tau - \mu) A_2 - \frac{3}{4} A_2 (A_1^2 + A_2^2) + (\kappa \cos \tau) A_1 + \frac{3}{4} R_h A_1 (A_1^2 + A_2^2) \right]. \end{cases} \quad (13)$$

显然 $(A_1, A_2) = (0, 0)$ 是一个平衡态,它的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\kappa \sin \tau - \mu & -\kappa \cos \tau \\ \kappa \cos \tau & -\kappa \sin \tau - \mu \end{bmatrix}. \quad (14)$$

特征值 λ 的特征方程为

$$\lambda^2 + 2(\kappa \sin \tau + \mu)\lambda + (\kappa \sin \tau + \mu)^2 + (\kappa \cos \tau)^2 = 0. \quad (15)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据,满足条件

$$-(\kappa \sin \tau + \mu) < 0, (\kappa \sin \tau + \mu)^2 + (\kappa \cos \tau)^2 > 0. \quad (16)$$

原点为渐近稳定的平衡点.可见,零解的稳定性与时滞反馈有关.当 $-(\kappa \sin \tau + \mu) = 0$ 时,特征方程有一对纯虚根,此时系统发生 Hopf 分岔.笔者在以前的研究工作中^[18-19],已经严格证明了不含时滞反馈机制的 ENSO 充电振子模式存在一个稳定的极限环,即存在 1 个周期振荡.因此应有 $dA/dt = 0$, 由方程组(11)第一式可知其极限环的幅值 A 与时滞反馈也有关.

3 物理机理

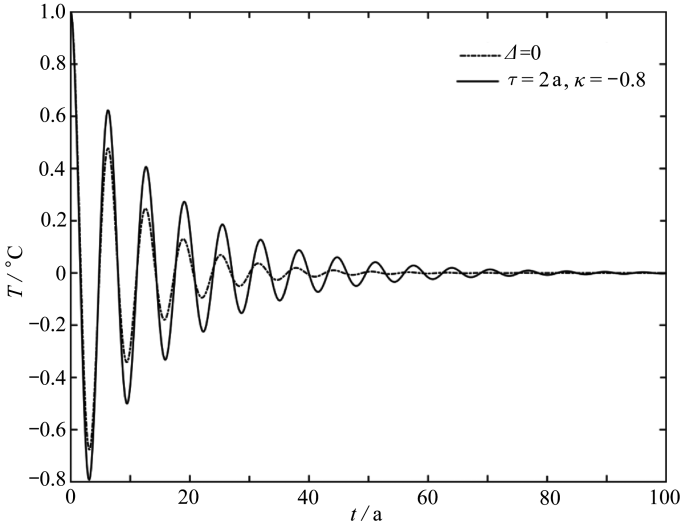
在上述 ENSO 模型中, ENSO 系统在一定参数变化范围内存在稳定的极限环,说明 ENSO 是一个不依赖于初始扰动的自激振荡系统.阻尼 $\mu < 0$ 时, ENSO 系统有周期解,此处 μ 由 $(R_h - C)$ 决定 (R_h 为 Bjerknes 正反馈系数、 C 为海洋温跃层负反馈系数),说明不考虑 Rossby 波的时滞负反馈作用,正反馈大于负反馈时, ENSO 模式出现周期振荡,此时热带海气耦合的不稳定增长是产生 ENSO 循环的主要因子.而在海波时滞效应的影响下,即使正反馈小于负反馈,振荡依然出现,说明 Rossby 波转换成 Kelvin 波这一过程产生的时间滞后对于 ENSO 循环的影响很关键.

4 简单数值模拟

构造一个描述 ENSO 系统的完整海气耦合模式是十分复杂的,且难以得到反映清晰物理过程的解.利用简单的概念模式来研究 ENSO 等气候系统动力学机理是气象学家常用的方法.在大量基础理论研究中,抓住主要矛盾的近似理论和简化方程仍然具有纯数值计算模拟不能

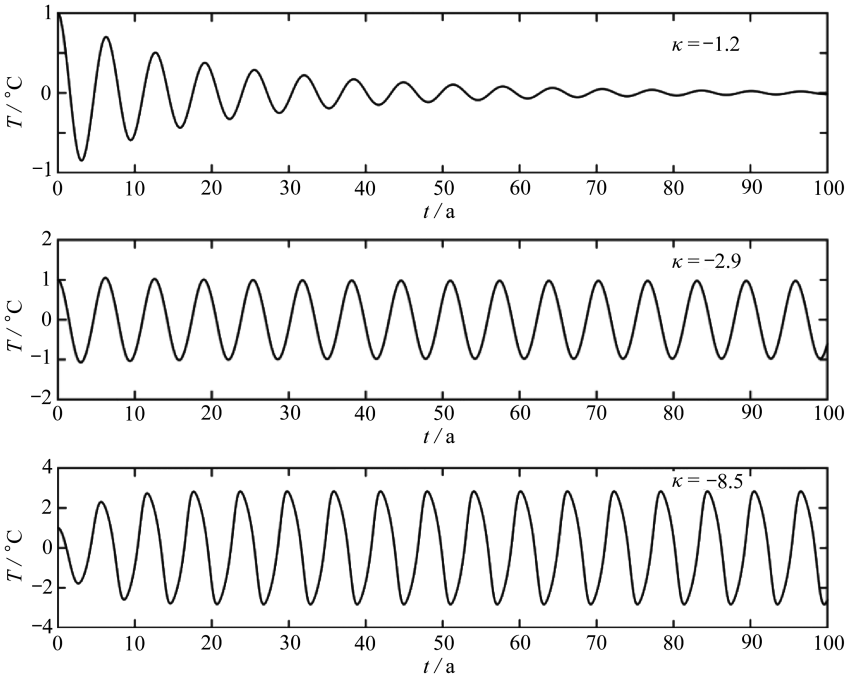
替代的价值.本节将对文中讨论的时滞反馈作用下 ENSO 充电振子模型做简单数值模拟,来验证以上理论分析的结果.

图 1 和图 2 是用数值方法解方程(6)的结果,取 $\varepsilon = 0.1, R_h = 1, \mu = 2 (> 0)$, 初始值 $(T_0, \dot{T}_0) = (1, 0)$.随着时滞强度 κ 和时滞时间 τ 的变化,反映 ENSO 系统不同的物理条件^[8],这里取 $0 \leq \tau \leq 2 \text{ a}, 0 \leq |\kappa| \leq 10$.可以看到,充电振子模式在考虑时滞作用以后系统的稳定性、分岔情况和极限环都有所变化.



(a) $\Delta = 0$ 与 $\tau = 2 \text{ a}, \kappa = -0.8$ 的对比

(a) $\Delta = 0$ vs. $\tau = 2 \text{ a}, \kappa = -0.8$



(b) $\tau = 2 \text{ a}$

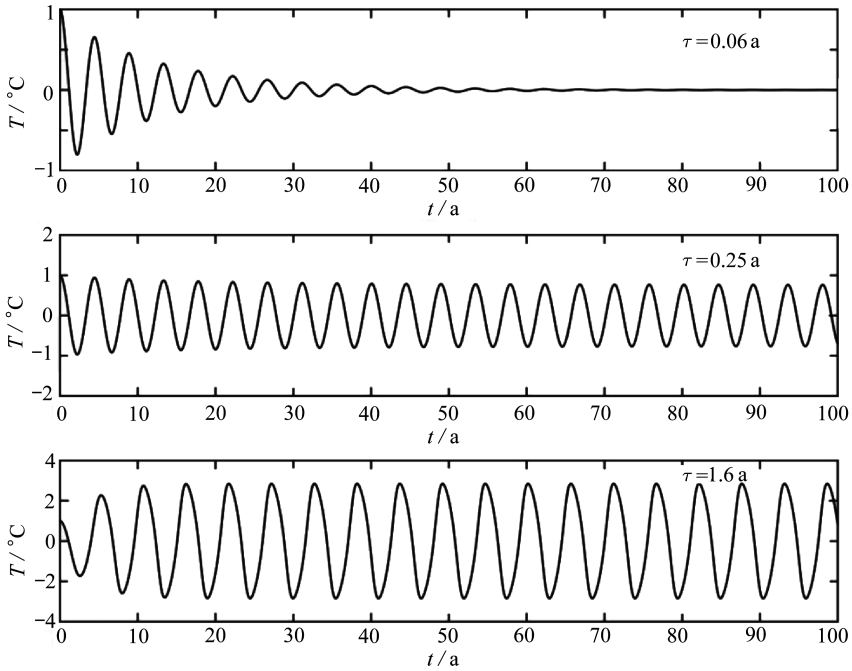
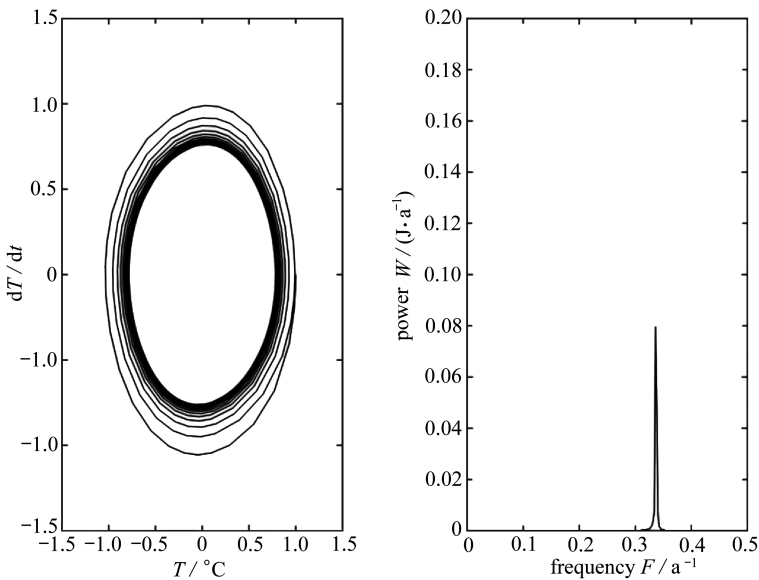
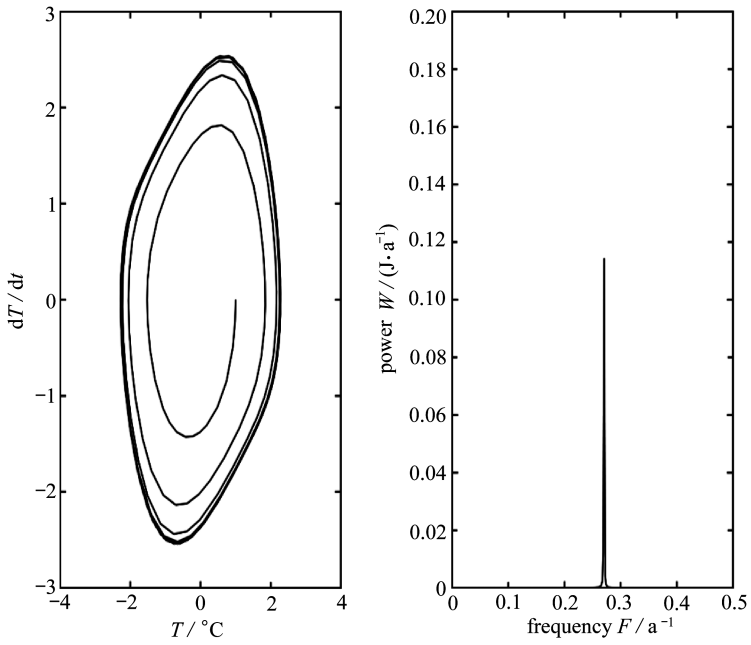
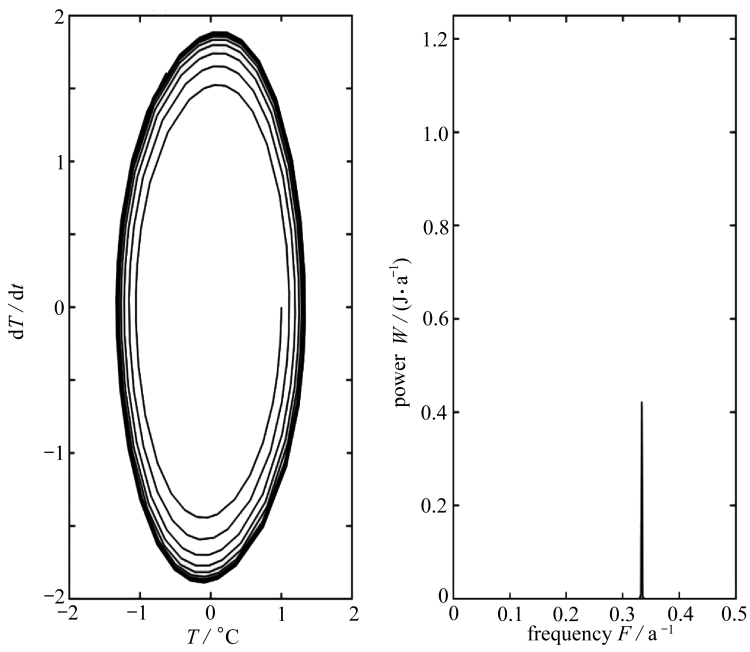
(c) $\kappa = -10$

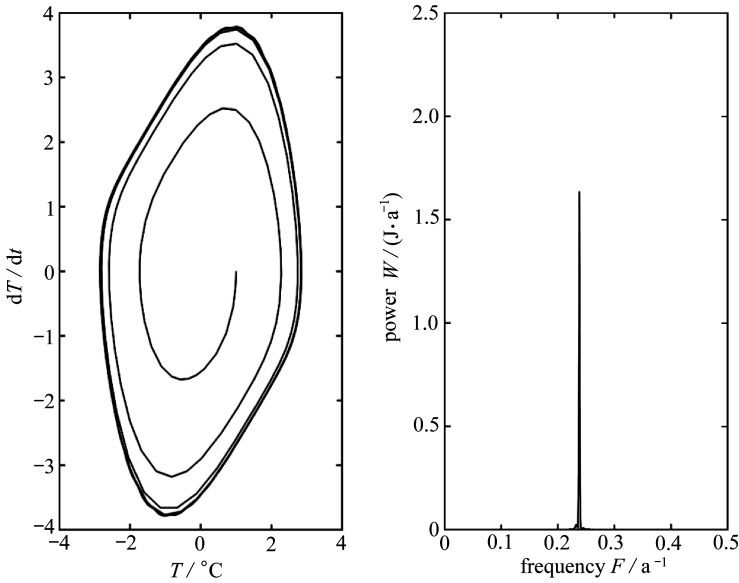
图 1 时间序列

Fig. 1 Time series

图 1(a) 中虚线是没有时滞反馈机制的结果, 实线是时滞反馈强度较小时方程(2)的解. 原系统在 $\mu > 0$ 时是稳定的, 这与文献[19]中的图 2 结果一致. 时滞反馈强度较小的情况下 ($|\kappa| = 0.8$), 系统保持稳定. 图 1(b) 中随着时滞反馈强度的增大, 系统出现了分岔, 进入准周期振荡的状态, 振幅随着 $|\kappa|$ 增加而增大, 波形和相位也发生了变化. 图 1(c) 为改变时滞时间, 使其从满足式(16)到不满足, 发现系统由平衡态走向分岔, 这与前文中的理论分析结果一致.

(a) $\kappa = -2.6, \tau = 2 \text{ a}$

(b) $\kappa = -7$, $\tau = 2$ a(c) $\kappa = -10$, $\tau = 0.35$ a



(d) $\kappa = -10$, $\tau = 1.6$ a

图2 相平面图和功率谱

Fig. 2 The phase plane and the power spectrum

从图2中的相图中可以看出,有时滞反馈机制的 ENSO 系统出现稳定的极限环,并且极限环的幅值随着时滞强度和时滞时间改变,时滞效应对于 ENSO 振荡幅度有影响,这同样验证了第3节中的分析结果;图2中的功率谱表示了不同的时滞强度和时滞时间对应振荡频率的变化,在合理的、具有物理意义的参数取值范围内,ENSO 振荡周期在 4.2 a 到 2.9 a 之间,这与实际观测结果一致,可见该时滞 ENSO 概念模型具有实际应用意义。

5 结 论

ENSO 是非常复杂的海气耦合非线性系统,对其物理机理的有限理解使得对 ENSO 的数值模拟和准确预测面临着极大的阻碍。本文研究一类含有时滞反馈作用下的 ENSO 充电振子动力学模式,定性分析和简单数值模拟发现,时滞反馈效应对 ENSO 系统有较大影响。在正阻尼的情况下,无时滞的原系统在平衡点处是稳定的,时滞反馈的出现使得系统由平衡态进入准周期振荡,出现 Hopf 分岔,其振荡的振幅与时滞强度和时滞时间都有关。

参考文献(References):

- [1] DIJKSTRA H A, BURGERS G. Fluid dynamics of El Niño variability[J]. *Annual Review Fluid Mechanics*, 2002, **34**(1): 531-558.
- [2] DIJKSTRA H A. The ENSO phenomenon: theory and mechanisms[J]. *Advance in Geosciences*, 2006, **6**: 3-15.
- [3] CLARKE A J. *An Introduction to the Dynamics of El Niño and the Southern Oscillation*[M]. London: Academic Press, 2008.
- [4] SARACHIK E S, CANE M A. *The El Niño-Southern Oscillation Phenomenon*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

- [5] CLARKE A J. El Niño physics and El Niño predictability[J]. *Annual Review Fluid Mechanics*, 2014, **6**: 79-99.
- [6] JIN F F. An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO, part I: conceptual model[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1997, **54**(7): 811-829.
- [7] BOUTLE I, TAYLOR R H S, RÖMER R A. El Niño and the delayed action oscillator[J]. *American Journal of Physics*, 2007, **75**(1): 15-24.
- [8] GHIL M, ZALIAPIN I, THOMPSON S. A delay differential model of ENSO variability: parametric instability and the distribution extremes[J]. *Nonlinear Processes Geophysics*, 2008, **15**(3): 417-433.
- [9] POWER S B. Simple analytic solutions of the linear delayed-action oscillator equation relevant to ENSO theory[J]. *Theoretical & Applied Climatology*, 2010, **104**(1): 251-259.
- [10] KEANE A, KRAUSKOPF B, POSTLETHWAITE C. Investigating irregular behavior in a model for the El Niño southern oscillation with positive and negative delayed feedback[J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2016, **15**(3): 1656-1689.
- [11] KEANE A, KRAUSKOPF B, POSTLETHWAITE C M. Climate models with delay differential equations[J]. *Chaos*, 2017, **27**(11): 114309. DOI: 10.1063/1.5006923.
- [12] 王雯, 徐燕, 鲁世平, 等. 厄尔尼诺-南方涛动时滞海气振子耦合模型的周期解[J]. 物理学报, 2011, **60**(3): 23-26. (WANG Wen, XU Yan, LU Shiping, et al. The periodic solutions of a delayed sea-air oscillator coupling model for the ENSO[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(3): 23-26. (in Chinese))
- [13] SALTZMAN B. *Dynamical Paleoclimatology: Generalized Theory of Global Climate Change (International Geophysics Series)*[M]. London: Academic Press, 2002.
- [14] RIAL J A, SAHA R. *Abrupt Climate Change: Mechanisms, Patterns, and Impacts*[M]. Washington DC: American Geophysical Union, 2013.
- [15] DE SAEDELEER B, CRUCIFIX M, WIECZOREK S. Is the astronomical forcing a reliable and unique pacemaker for climate? A conceptual model study[J]. *Climate Dynamics*, 2013, **40**(1): 273-294.
- [16] 齐欢欢, 徐鉴, 方明霞. 超音速飞行器机翼颤振的时滞反馈控制[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(2): 210-218. (QI Huanhuan, XU Jian, FANG Mingxia. Time-delayed feedback control of flutter supersonic airfoils[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(2): 210-218. (in Chinese))
- [17] 彭剑, 李禄欣, 胡霞, 等. 时滞影响下受控斜拉索的参数振动稳定性[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(2): 181-188. (PENG Jian, LI Luxin, HU Xia, et al. Parametric vibration stability of controlled stay cables with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(2): 181-188. (in Chinese))
- [18] 赵强, 刘式适, 刘式达. 一类厄尔尼诺-南方涛动充电-放电振子模型研究[J]. 物理学报, 2012, **61**(22): 1-4. (ZHAO Qiang, LIU Shishi, LIU Shida. On the recharge-discharge oscillator model for El Niño-southern oscillation (ENSO) [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(22): 1-4. (in Chinese))
- [19] ZHANG W, ZHAO Q. The periodic oscillations in the ENSO recharge-discharge oscillator model[J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(12): 34-37.

- [20] 张妩帆, 赵强. 太阳强迫厄尔尼诺/南方涛动充电振子模型的 Hopf 分岔与混沌[J]. 物理学报, 2014, **63**(21): 1-4. (ZHANG Wufan, ZHAO Qiang. Hopf bifurcation and chaos in the solar-forced El Niño/southern oscillation recharge oscillator model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(21): 1-4. (in Chinese))
- [21] ZHANG W F, ZHAO Q. The quasi-periodicity of the annual-cycle forced ENSO recharge oscillator model[J]. *Communication Nonlinear Science Numerical Simulation*, 2015, **22**(1/3): 472-477.
- [22] ZHANG L, GUO S J. Hopf bifurcation in delayed Van der Pol oscillators[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **71**(3): 555-568.
- [23] 张伟, 胡海岩. 非线性动力学理论与应用的新进展[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (ZHANG Wei, HU Haiyan. *The New Progress of Nonlinear Dynamics Theory and Application* [M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))

Bifurcation Analysis of the ENSO Recharge Oscillator With Time-Delayed Feedback

LIU Yudan, DU Zhiyuan, ZHAO Qiang

(Department of Atmospheric and Oceanic Sciences, School of Physics,
Peking University, Beijing 100871, P.R.China)

Abstract: The time-delayed impact on a class of nonlinear ENSO recharge oscillator models was investigated through transformation of the model equations into the Van der Pol-Duffing oscillator with time-delayed feedback. The Hopf bifurcation and stable limit cycles were obtained with the averaging method. Qualitative analysis shows that equilibrium stability of the ENSO system and its oscillation are closely related to the delayed feedback amplitude and time. Finally, numerical simulations were carried out to illustrate the analytical results.

Key words: El Niño-Southern Oscillation; time-delayed Van der Pol-Duffing equation; Hopf bifurcation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(41175052)

引用本文/Cite this paper:

刘宇丹, 杜智远, 赵强. 时滞反馈作用下 ENSO 充电振子模型的分岔分析[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(10): 1128-1136.

LIU Yudan, DU Zhiyuan, ZHAO Qiang. Bifurcation analysis of the ENSO recharge oscillator with time-delayed feedback[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(10): 1128-1136.