

弹性应力波的双脉冲结构 与平板冲击试验验证*

刘占芳¹, 郭原¹, 唐少强², 黄心嘉¹, 庄茁³

(1. 重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044;

2. 北京大学 工学院, 北京 100871;

3. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(我刊编委刘占芳、庄茁来稿)

摘要: 对传统弹性应力波理论以及平板冲击下的应力波传播提出了重要修正. 现有的弹性应力波理论在旋转运动以及与内力的对应关系、波动方程等方面存在理论缺失和不完备性. 提出弹性体存在体积波和偏斜波, 体积波可独立传播但偏斜波受体积波的影响, 两种波构成一个弱耦合波系. 平板冲击应为三维应变状态, 体应变和偏应变两个波动变量依然保持二阶张量状态, 但独立的波动变量可简化为一个体应变和一个偏斜主应变, 波动方程简化为关于两个波动变量的弱耦合波动方程组. 应力波的界面效应涉及了冲击加载面上应力波的激发和应力波在自由面上的反射, 建立了加载面和自由面上边界条件与波动变量的依赖关系. 冲击加载面上同时激发出体积波和偏斜波, 但体积波与部分偏斜波组成一个以较快速度传播的复合脉冲, 剩余偏斜波形成另一个以较慢速度传播的偏斜脉冲. 两个入射脉冲在自由面上分别反射回来结构相同的复合脉冲和偏斜脉冲, 即形成4个反射脉冲的传播. 应力波的双脉冲结构与平板撞击下试件自由面速度的二次压缩现象是一致的, 10发不同厚度的氧化铝平板冲击试验测得的二次压缩信号验证了偏斜脉冲的理论预测.

关键词: 体积波; 偏斜波; 弱耦合应力波; 复合脉冲; 偏斜脉冲; 平板冲击实验

中图分类号: O347.4

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380324

引言

在地球物理勘探^[1]、冲击破坏与防护^[2-3]、工程抗震^[4-5]、应力波检测技术^[6]等领域, 弹性应力波是技术和工程应用的基础. 弹性应力波涉及波动变量、波动方程、波速、运动与内力的关系、界面效应等问题. 经过一个多世纪的探索实践, 已经形成了弹性应力波的基本认识并纳入到弹性力学教科书和波动文献中^[7-15]. 然而, 现有弹性应力波理论并非尽善尽美, 下面简要回顾现有的弹性应力波理论, 并对存在的问题作简要分析.

在弹性力学教材中, 弹性应力波是通过 Navier(纳维)方程的数学处理而得到相应的波动方程的. 对于各向同性线弹性固体, 以位移 \mathbf{u} 表达的 Navier 方程为^[10]

* 收稿日期: 2017-12-15; 修订日期: 2018-01-09

基金项目: 国家自然科学基金(11372365; 11072276; 11176035)

作者简介: 刘占芳(1963—), 男, 教授, 博士(通讯作者). E-mail: zhanfang@cqu.edu.cn.

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

对 Navier 方程(1)两端求散度,并考虑均布的体力,即可得到体积波的波动方程:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (2)$$

其中体积应变 θ 为位移的散度, $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$. 体积波的波速为

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}, \quad (3)$$

上式中 K 为体积模量, 体积波的波速 c_1 不仅涉及体积模量 K , 还涉及剪切模量 $G = \mu$, 这意味着体积波既联系体积应变, 也联系着偏斜应变^[14-15]. 本文将证明, 应力波有两个脉冲, 较快的第一个脉冲是体积应变和部分偏斜应变的叠加, 且以共同波速 c_1 传播, 这样就完全解释了为什么波速 c_1 既联系体积模量也联系剪切模量.

如果对 Navier 方程(1)两端求旋度, 可得到旋转波的波动方程:

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

这里旋转矢量是位移旋度的一半, $\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \mathbf{u})/2$, 运动学上旋转矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表达了弹性体内连续的转角. 由方程(4)易得旋转波的波速为

$$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (5)$$

然而, 旋转波存在的问题在于波动变量为旋转矢量, 而经典弹性力学并未提供与之对应的内力. 从运动与内力关系的角度看, 有旋转变形而无对应的内力是不完整的. 另外, 不能把旋转矢量简单处理为刚体微转动, 因为相邻质点若发生刚体转动会造成变形的不协调问题. 广义弹性力学已经指出, 旋转矢量描述了连续的旋转变形而非刚体微转动, 且旋转变形联系着偶应力或者反对称应力^[16-17]. 不过旋转变形及其效应只在微小尺寸的弹性结构中表现显著, 一般的宏观弹性体可以忽略旋转变形及其效应. 经典弹性力学忽略了旋转变形及偶应力、动量矩守恒方程以及相应的边界条件, 应用于宏观弹性结构已经具有足够的精度. 此外, 旋转波的波速 c_2 涉及了剪切模量 μ , 实际上, 剪切模量并不反映旋转变形与对应内力的力学属性.

为进一步说明旋转变形问题, 现在简单考察一下小变形的情况. 物体的变形用位移的右梯度 $\mathbf{u} \nabla$ 来度量, 位移右梯度可分解为对称的应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和反对称的转动张量 $\boldsymbol{\Omega}$ ^[16-17]:

$$\mathbf{u} \nabla = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega}. \quad (6)$$

经典弹性力学中应变通过广义 Hooke(胡克)定律联系着应力, 而转动张量往往视为微转动, 没有对其提出独立的弹性本构关系; 或者只用应变来描述弹性变形, 忽略转动张量及其带来的影响, 实践证明这种处理对宏观尺寸下的弹性结构具有足够的精度. 应变刻画了连续的平动变形而转动张量描述了连续的旋转变形. 方程(6)右端第二项的转动张量等价于旋转矢量^[18], 所以, 旋转矢量也可表示为另一种形式, $\boldsymbol{\omega} = -(1/2)\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Omega}$, 这里 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为置换张量. 联系方程(6), 弹性体的任一线元 $d\mathbf{x}$ 的位移增量 $d\mathbf{u}$ 为

$$d\mathbf{u} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}. \quad (7)$$

所以, 线元的变化包括线元的伸长(缩短)和弯曲, 应变使线元发生长度的变化, 旋转矢量使得线元发生纯弯曲而不引起长度改变, 可引入曲率张量来度量线元弯曲状态的变化. 考虑含偶应力的弹性理论, 非对称应力分解为对称应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和反对称应力 $\boldsymbol{\tau}$ 之和, 而反对称应力 $\boldsymbol{\tau}$ 依赖于转

动张量或旋转矢量^[16-17]：

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = -\eta \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (8)$$

经典弹性力学中只考虑了对称应力,反对称应力为零,所以方程(8)的右端也为零,因此,旋转波的波动方程(4)是不存在的.这表明,经典弹性力学由于忽略了线元弯曲情况以及所对应的内力偶,自然应忽略旋转波的波动方程.或言之,不应对经典 Navier 方程作旋度运算.如果计及旋转变形, Mindlin 和 Tiersten^[19]以及 Liu(刘占芳)等^[20]已提出旋转波的波动方程应满足四阶双曲型的波动方程.

弹性力学中与体积波(2)和旋转波(4)组成在一起的是剪切波.注意到 Navier 方程(1)左端第一项为体积应变的梯度,传统应力波理论假设无散条件,即体积应变为零^[12],即假设 $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$,同时忽略体力项,即可得到剪切波的波动方程:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (9)$$

所以剪切波的波速为 $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.由于无散条件假设,这个剪切波不能与前述体积波(2)共同传播,这个判断不符合物理上例如地震时始终出现两个脉冲的现象.无散条件也构成了位移的几何约束,所以剪切波(9)不成为具有3个独立位移分量的波动方程.弹性应力波在介质中构成一个波系,每个波的波动变量应彼此独立.但在上述体积波、旋转波和剪切波组成的波系中,波动变量分别为体积应变、旋转矢量和位移,而体积应变和旋转矢量并不独立于位移.弹性应力波也是弹性应变能的传播,体积波可表示为体积应变能的传播,但是旋转波和剪切波似乎不能表示为旋转应变能和畸变应变能的传播,因为变形没有直接对应的内力.

在波动力学的科学文献中,提出了以位移作为波变量的下述两个波动方程^[14-15].按照矢量的二重叉积公式:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (10)$$

可将 Navier 方程改写为

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

如果认为介质的位移是无散的,即假定 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$,进一步假定无体积力影响时,即可由 Navier 方程(11)得等容波:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

这个波解读为只传播偏应变.但从位移的 Helmholtz(亥姆霍兹)分解来看,无散条件对应着矢量势的旋度,所以无旋的偏应变与旋转之间存在着内在的不一致问题.如果位移矢量的 Helmholtz 分解成立,无散条件对应着有旋位移场,即有旋转变形,应提供与旋转变形对应的内力.实际上,恰如前面旋转波(4)的情况,现有波动理论没有给出与之对应的内力.另外,如果假定介质的位移是无旋的,即假定 $\nabla \times \mathbf{u} = 0$,同样不考虑体积力影响时,由 Navier 方程(11)即可得无旋波:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (13)$$

波动方程(13)的波动变量是位移,通常解读为既可传播体应变也可传播偏应变.

对同一个位移,引进了无散和无旋两个约束条件来构造波动方程,两个约束条件是彼此不相容的.为克服两个约束条件的不相容性以使介质中同时传播等容波和无旋波,通常需要用

Helmholtz 分解定理把位移表示为两个位移之和,即一个标量势的梯度和一个矢量势的旋度之和^[14-15]。但是,正如前面已经提到的,小变形弹性体是忽略旋转变形的。小变形下的宏观弹性体用对称的应变张量来度量线元长度的变化,对应的应力为对称张量,控制方程为动量守恒方程,对称量意味着不涉及转动。经典弹性力学忽略了线元的弯曲变化、曲率及对应的偶应力、动量矩守恒方程。既然忽略了旋转变形,就无需对位移作标量势梯度和矢量势旋度的分解,也即没有旋度项。小变形弹性体的情况不同于电磁场和流体力学的情况,电磁场的电场强度和流体力学的速度场往往具有强烈的涡旋运动,应用 Helmholtz 分解定理并引进标量势和矢量势能够在数学处理上带来便利。在即将讨论的平板冲击中,冲击试件为圆柱薄片,轴向冲击下位移只有轴向和径向运动,可考虑位移没有旋度,无需作位移的 Helmholtz 分解。

尽管现有的应力波理论在波动模型、实验测试以及应用等取得了很大的进展,但在波动方程、旋转变形与对应内力的关系、运动相容性等方面仍然存在着内在的缺失和不完备性。为克服现有弹性应力波理论中存在的问题,本文探索改进弹性应力波理论,通过平板冲击下应力波的传播和界面分析,解析弹性应力波的结构,试验验证提出的双脉冲应力波结构。

1 体积波和偏斜波的波动方程

正如已经提到的,宏观尺度下可用应变张量来度量相对变形的程度。这实际上忽略了等式(6)右端的转动张量,所以下面的波动分析只针对宏观弹性体,应变张量是位移左、右梯度之和的一半:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) . \quad (14)$$

应变可进一步分解为偏斜应变和球应变:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}) = \mathbf{e} + \frac{1}{3} \theta \mathbf{I} . \quad (15)$$

注意到偏应变张量的迹为零,在应变的和分解中,应变的偏量和球量是线性无关的两个二阶张量,且应变的和分解是唯一的。广义 Hooke 定律是关于 Cauchy(柯西)应力与应变的线性本构关系:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}) . \quad (16)$$

弹性体的动量守恒方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} . \quad (17)$$

联系方程(14)和(16),由式(17)容易得到以位移表达的 Navier 方程(1),再次表示为

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} . \quad (18)$$

对经典弹性力学而言,必须注意 Navier 方程(18)是针对应变描述的平动变形下的场方程,即忽略了计及旋转变形的动量矩守恒方程。考虑均匀体力场的情况,对方程(18)分别作左、右梯度运算后并求和,并考虑方程(14),简单整理可得

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \theta + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t^2} . \quad (19)$$

利用方程(15),上式可进一步写成

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \theta + \frac{1}{3} \mu \nabla^2 \theta \mathbf{I} + \mu \nabla^2 \mathbf{e} = \frac{1}{3} \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \mathbf{I} + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} . \quad (20)$$

用二阶单位张量 \mathbf{I} 对方程 (20) 两端作双点积, 可得到体积波的波动方程:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta - \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

这与传统理论的波动方程 (2) 是完全一致的. 体积波的传播速度依然为

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (22)$$

根据静水压与体积应变的关系:

$$P = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta = K\theta, \quad (23)$$

体积波传播的也是静水压力波. 至于波速 c_1 为什么既涉及体积模量也涉及剪切模量, 是因为有部分偏应变伴随体应变并以波速 c_1 共同运动, 这一点将在后面的平板冲击下应力波的传播予以证明.

另外, 在方程 (21) 两端同乘以 $\mathbf{I}/3$, 再与方程 (20) 相减, 可得到另外一个波动方程^[20]:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{e} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{3} \nabla^2 \theta \mathbf{I} - \nabla \nabla \theta \right). \quad (24)$$

从双曲方程的角度, 方程 (24) 右端不为零, 这是一个弱耦合的二阶双曲波动方程. 方程 (24) 的左端决定了双曲方程的属性, 右端的非齐次项可视为该方程的源项. 由于偏斜应变作为波动方程的波动变量, 可令该波为偏斜应变波. 由于偏斜应变本构上联系着偏应力

$$\mathbf{s} = 2\mu \mathbf{e}, \quad (25)$$

所以偏斜应变波也是偏斜应力波. 偏斜波的波速为

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (26)$$

注意到这个波速只关联于剪切模量, 这与偏应变与偏应力之间的力学关系是一致的. 不过, 偏斜应变有一部分与体积波共同传播, 另一部分才以波速 c_2 独立传播, 所以这个波速实际上是应力波的第二个脉冲的传播速度. 这个问题仅从波动方程 (24) 不易看出来, 接下来第 2 节和第 4 节将提供理论分析和数值仿真的证明. 但是, 无论是与体积波共同传播还是独立传播的情况, 其中的偏应变都通过本构关系 (25) 来确定偏应力.

由于宏观弹性体忽略了旋转变形, 所以这里提出的体积波和偏斜波都是无旋的应力波, 显然没有现有波动理论的等容波或旋转波. 波动变量都是应变张量, 称应变波比应力波更反映运动的本质, 但由于应变共轭于应力, 应变作为波动变量与应力波概念也完全契合. 称偏斜波源于偏应变, 称剪切波也不完备, 或许可称形变波. 没有以位移表达的波动方程, 这有别于传统应力波理论. 体应变和偏应变同时满足波动方程 (21) 和 (24), 两者联立组成弹性应力波的波动方程组, 方程 (21) 是一个独立的波动方程, 在解出方程 (21) 后, 以 θ 导出为源项可以求解方程 (24). 显然, 体积波是独立传播的波而偏斜波是耦合波, 两个波形成了一个弱耦合波系. 因偏应变的迹为零, 所以有 6 个独立分量, 对应着 6 个独立的波动方程. 体积波传播体积变形能, 而偏斜波传播偏斜变形能.

2 平板冲击下应力波的双脉冲结构

弹性应力波在介质中组成了一个弱耦合波系, 为解析弹性应力波的双脉冲结构并且不失去波的基本属性, 可借助平板冲击来分析应力波的传播. 平板冲击常用于考察材料高压高率的

力学特性,但当冲击强度低于 Hugoniot(雨贡纽)弹性限时,此时传播的是弹性应力波.注意到,即使冲击强度较高导致材料出现压缩损伤破坏等过程,在损伤破坏阵面的前缘也存在弹性前驱波的传播,所以考察平板冲击的弹性波是解析应力应变时空演化以及破坏行为的基础.

应力波的一个完整过程,既包括波的传播也包括波的界面效应,轻气炮平板冲击试验^[21-24]为研究平面应力波及界面效应提供了一个典型的途径.当圆片飞片在一定速度内正撞圆片靶板时,适当设计的宽厚比以及较短的观测时间可视为应力波的激发、传播及一次反射过程,保证在一定观测时间内不必考虑试件的侧向界面效应,见图 1.迄今为止,人们一直把平板正撞冲击作为一维应变状态来处理,相应的一维纵波的波动方程为^[15,21,24]

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{27}$$

取直角坐标系的 x 轴指向冲击方向且坐标系原点置于冲击加载面上,上式中的唯一变量 u 表示 x 轴方向的位移.但是,把平板撞击近似视为一维应变状态无论在理论上还是波动测试上都会带来不容忽视的问题.由于弹性体传播两种波,若将平板冲击近似为一维应变状态,由于只有一个波动变量当然只能传播一种波,而介质传播两种波的能力不受几何结构的影响,应重新审视一维应变假定.波动方程是场方程,传播哪些波由波动方程决定,外部载荷会影响波动变量的时空演化,但不能决定特定波的传播,譬如刚才提到的平板正撞认为一定传播纵波,实际上两种弹性波都会被激发出来,只是外载会强烈影响幅值的变化.

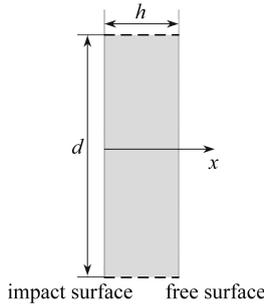


图 1 一级轻气炮平板冲击圆片试件侧视示意图(试件厚度 h 远小于试件直径 d)
 Fig. 1 The side view schematic of the specimen in one-stage light-gas gun plane impact (the thickness h is much smaller than diameter d)

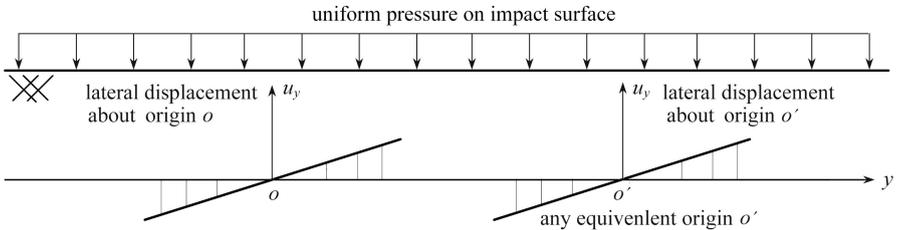


图 2 侧向位移在参考点为零而应变不为零
 Fig. 2 Zero lateral displacement but non-zero lateral strain at any origin

平板冲击下较大的宽厚比以及较短的测量时间,可保证试件轴线附近的观测数据不必考虑试件圆柱边界的影响.此时,可将平板冲击等效为试件侧向无限大且冲击载荷在加载面上均匀分布,参见图 2 的横剖面.由于侧向无限大的几何结构和均布载荷,沿 y 轴可任选一个位置为参考点或坐标原点 o ,几何结构和冲击载荷关于该点为对称点.沿 y 轴位移 u_y 关于该点反对称且线性分布,所以坐标原点的位移为零,显然,坐标原点的应变 $\partial u_y / \partial y$ 不为零,且沿 y 轴的

应变均相等。如果沿 y 轴选取另外一个位置 o' 作为坐标原点,则几何结构和载荷以及位移、应变的分布与选取坐标原点 o 的情况完全相同。

是否可以考虑沿侧向每一点的位移均为零呢?或者说,是否可以把侧向无限大的弹性体等效为侧向刚体约束呢?本文考察固定端在坐标原点 o 、沿侧向一个单元体长柱的刚度。由于沿 y 轴每点的应变状态相同,所以距离原点为 l 的侧向位移为 $u_y = l\varepsilon_y$ 。同样,每点的应力状态也相同,距离原点为 l 的单元体长柱受到侧向力为 $\sigma_y = E\varepsilon_y$,因此,单元体长柱的侧向刚度为

$$K_y = \frac{\sigma_y}{u_y} = \frac{E}{l}.$$

侧向无限大时, l 趋向无限大,侧向刚度趋于零,侧向位移趋于无限大。因此,把侧向无限大的弹性体等效为侧向刚体是不合理的。

平板试件等效为侧向无穷大,由于材料的泊松效应,轴向压缩下每个质点依然具有侧向变形能力,只是沿侧向每个质点的应变状态相同,在垂直轴向的平面内每个质点沿侧向均匀膨胀。在应变主轴状态下,应变状态表为 3 个主应变,3 个主应变只是轴向 x 坐标,而不是侧向 y 和 z 的坐标函数,下面将证明平板冲击下依然传播两个应力波。如果一维应变成立,只有一个独立应变以及对应一个独立应力,则只能传播一个独立的应力波。这与弹性体中存在两个应力波的情况相冲突。

根据应变与位移的关系,即可写出平板冲击下的应变状态为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

其中 u_1 表示 x 轴方向的位移而 u_2 表示沿 y 轴或 z 轴方向的侧向位移。这里合理地给出了两个侧向位移相等以及两个侧向应变的主值相等,且均不为零。平板冲击依然处于三维应变状态,在应变主轴标架下只有两个独立分量。把应变张量分解为偏量和球量之和,则有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix}. \quad (29)$$

上式中偏应变的迹为零,体应变为二阶各向同性张量 $\theta = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$,两个独立分量也可表示为第一主偏应变 e_1 和体应变 θ 。根据应变的分解,容易把上式的偏量和球量改写为由轴向应变和侧向应变表达的形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

上式右端第一项为偏应变而第二项为体应变.如果考虑侧向刚性约束的极端情况,忽略侧向应变,即令上式的侧向应变为零,则有如下形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\varepsilon_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon_1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

比较发现,若在极端的一维应变假定下,只有一个主应变即只有一个独立分量.极端假设下两个侧向应变为零,排除了介质具有 Poisson 效应,对侧向运动形成刚性约束,造成应有的刻画体积和偏斜这两种应变机制简化为一维应变的一种机制,所以一般不应作一维应变的假设.刚性约束使得本来是两个独立变量的问题简化为一个独立变量的问题,排除了本应存在的偏斜波的传播,将产生理论预测与波动测量不一致的问题.

平板撞击下应变状态沿侧向方向都一致,所以可令式(29)的体应变和偏应变均为轴向位置和时间的函数,即有

$$\theta = \theta(x, t), \quad e = e_1(x, t), \quad e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e(x, t). \quad (32)$$

由波动方程组(21)和(24),体积波和偏斜波的波动方程简化为非齐次偏微分方程组:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (33)$$

$$\mu \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = -\frac{2}{3}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (34)$$

在上面的波动方程组中,有两个波动变量,应力波沿一维轴向传播,但质点的应变或应力状态均保持三维的二阶张量状态,只是独立的波动变量为两个.

偏斜波(34)做进一步处理可化为波动方程的标准形式.用 $-2/3$ 乘以方程(33)再与方程(34)相加,可得偏斜波的另一种形式

$$\mu \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial t^2}, \quad (35)$$

其中 $\hat{e} = e - 2\theta/3$.方程(35)是标准的双曲波动方程,其波速为偏斜波的波速 c_2 ,但是波动变量转化为偏应变的第一个主值减去 $2\theta/3$.这样,偏斜波分为两个部分:以波速 c_2 传播的部分为 \hat{e} ,移除的部分 $2\theta/3$ 关联于体应变,必以体积波的波速 c_1 传播.

联立波动方程(33)和波动方程(35),应力波的波系形成两个脉冲:运动较快的第一个脉冲由体积波和部分偏斜波复合而成,运动较慢的第二个脉冲为剩余偏斜波的传播.由于波速 c_1 大于波速 c_2 ,传播过程中第二个独立偏斜脉冲会逐渐落后于第一个复合脉冲.与体积波共同运

动的部分偏应变,其第一个主值为 $2\theta/3$, 另外两个主值为 $-\theta/3$ 以保持偏应变的二阶张量属性.正因为如此,第一个脉冲的传播速度 c_1 既取决于体积模量也取决于剪切模量,第二个脉冲的传播速度 c_2 则只关联于剪切模量.第二个独立脉冲的第一偏应变主值为 $\hat{e} = e - 2\theta/3$, 另外两个主值则均为 $-e/2 + \theta/3$, 即剩余偏应变还是二阶偏张量.复合脉冲中的体应变和偏应变以不同的本构关系分别联系着静水压力和偏应力,所以复合脉冲传播的是应力,而第二个脉冲则只联系着偏应力.应力波的双脉冲结构及其传播将在第 4 节的数值分析中进一步讨论.

现在回到一维应变的极端情况即式(31)表达的情况.此时,把 $e = 2\varepsilon_1/3$ 和 $\theta = \varepsilon_1$ 代入到波动方程(33)和(34)中,原来的两个波动方程归结为一个波动方程

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t^2} = 0. \quad (36)$$

所以一维应变的极端情况只能传播体积波.同时,典型的偏斜波动方程(35)也消失了.考虑到式(31),这个体积波(36)既有体应变也有偏应变的成分,所以其波速 c_1 取决于体积模量和剪切模量.不过即使是一维应变的极端情况,也以应变 ε_1 作为波动变量而非如式(27)那样以一维位移作为波动变量.必须强调,一维应变作为假设完全忽略了应有的侧向应变,使介质中传播的两个脉冲简化为一个脉冲,给实验测量信号的解读造成极大困扰,平板冲击下自由面的二次压缩现象说明了这个问题,后面第 5 节中将给予具体阐述.

3 平板冲击下应力波的界面效应

弹性应力波在传播过程中没有衰减,波动变量的幅值取决于加载面上激发的边值,下面考虑弹性应力波在加载面和自由面上的激发和反射过程.首先将波阵面看作间断面的传播,对于运动的间断面,质量守恒方程表示为^[25-26]

$$[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{c})] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (37)$$

其中 \mathbf{v} 为质点运动速度, \mathbf{c} 为间断面运动速度, \mathbf{n} 为间断面方向矢量,方括号表示间断,间断面前后的量分别用上标+和-来表示.考虑右行的平面间断面,在直角坐标系下,有 $n_1 = 1$ 且 $n_2 = n_3 = 0$ 以及只有 \mathbf{v}, \mathbf{c} 的一个分量.令间断面前面的初态为静止,则有 $\rho^+ = \rho$ 和 $v^+ = 0$.质量守恒的间断条件(37)化为

$$\rho^- (v^- - c) + \rho c = 0. \quad (38)$$

运动间断面上的动量守恒条件为^[25-26]

$$[\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{c}) - \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (39)$$

同样地,运动的平面间断面之前的质点处于初始静止状态,平面间断面下只计及第一主应力且有 $\sigma_1^+ = 0$, 则方程(39)简化为

$$\sigma_1^- = \rho^- v^- (v^- - c). \quad (40)$$

把方程(38)代入到方程(40)中得到间断面上的应力为

$$\sigma_1^- = -\rho c v^-. \quad (41)$$

上式表示运动间断面上应力与质点速度的关系, ρc 称为波阻抗.

体积波和偏斜波的阵面均可视为运动的间断面,下面建立冲击加载面和自由面上应力波的激发和反射的界面效应.首先,冲击加载面承受平面外载 $f(t)$ 以及加载面速度为 $v(t)$, 加载面上激发出体积波和偏斜波,体积波和偏斜波对应的静水压和偏应力分量分别为 p 和 s , 根据广义 Hooke 定律,分别有

$$p = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta, \quad s = 2\mu e. \quad (42)$$

另一方面,根据方程(41),对于体积波和偏斜波的两个阵面,即有

$$p = -\rho c_1 z_1, \quad s = -\rho c_2 z_2, \quad (43)$$

其中 z_1 和 z_2 表示体积波和偏斜波对应的质点速度.在冲击方向上,加载面载荷平衡于两个波的内力之和,加载面速度是两个波质点速度之和,即有

$$p + s = f(t), \quad z_1 + z_2 = v(t). \quad (44)$$

把方程(42)、(43)代入到方程(44)中,易得到加载面上的体应变和偏应变:

$$\theta(t) = \frac{(f + \rho c_2 v) c_1}{(\lambda + 2\mu/3)(c_1 - c_2)}, \quad e(t) = \frac{(f + \rho c_1 v) c_2}{2\mu(c_2 - c_1)}. \quad (45)$$

注意到体应变和偏应变都是时间的函数.

加载面上激发的体积波和偏斜波在传播过程中,体积波是独立传播的,同时体积波还拖动偏斜波的一部分能量一起运动,偏斜波剩余能量以较慢速度传播.首先到达自由面的是体积波和部分偏斜波的脉冲,令传播距离为 h , 到达自由面的体积波为 $\theta(h, t)$, 部分偏斜波为 $2\theta(h, t)/3$, 入射波作用在自由面上的内力为

$$\sigma' = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta(h, t) + 2\mu \cdot \frac{2}{3} \theta(h, t) = (\lambda + 2\mu) \theta(h, t). \quad (46)$$

在自由面上入射脉冲将反射回体积波和偏斜波,令反射脉冲分别为 $\theta'(h, t)$ 和 $e'(h, t)$, 对应的应力为

$$p' = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta', \quad s' = 2\mu e'. \quad (47)$$

利用方程(41),得入射阵面和反射阵面上应力与质点速度的关系:

$$\sigma' = -\rho c_1 w_1, \quad p' = \rho c_1 w_2, \quad s' = \rho c_2 w_3, \quad (48)$$

其中 w_1, w_2 和 w_3 分别为入射波和反射波引起的质点速度.自由面上的入射和反射意味着

$$\sigma' + p' + s' = 0, \quad w_1 + w_2 + w_3 = v_1, \quad (49)$$

其中 $v_1(h, t)$ 为自由面的速度.把方程(46)、(47)代入到方程(48)、(49),可得

$$\theta' = \frac{(\lambda + 2\mu)(c_1 + c_2)\theta(h, t) + \rho c_1 c_2 v_1}{(\lambda + 2\mu/3)(c_2 - c_1)}, \quad e' = \frac{2(\lambda + 2\mu)c_2\theta(h, t) + \rho c_1 c_2 v_1}{2\mu(c_1 - c_2)}. \quad (50)$$

以较慢速度传播的偏斜脉冲会推迟到达自由面,入射到自由面的偏斜应变为 $e(h, t)$, 会产生反射的体积波 $\theta''(h, t)$ 和偏斜波 $e''(h, t)$, 相应的应力为

$$\sigma'' = 2\mu e(h, t), \quad p'' = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta'', \quad s'' = 2\mu e''. \quad (51)$$

根据波阵面上应力与质点速度的关系,得到

$$\sigma'' = -\rho c_2 y_1, \quad p'' = \rho c_1 y_2, \quad s'' = \rho c_2 y_3. \quad (52)$$

对于自由面边界条件,有

$$\sigma'' + p'' + s'' = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = v_2, \quad (53)$$

其中 $v_2(h, t)$ 为自由面的速度.把方程(51)、(52)代入到方程(53),可得

$$\theta'' = \frac{4\mu c_1 e(h, t) + \rho c_1 c_2 v_2}{(\lambda + 2\mu/3)(c_2 - c_1)}, \quad e'' = \frac{2\mu(c_1 + c_2)e(h, t) + \rho c_1 c_2 v_2}{2\mu(c_1 - c_2)}. \quad (54)$$

上式为自由面上入射偏斜波产生的体积波和偏斜波.

方程(45)为冲击面上体积波和偏斜波的边界条件,方程(50)和(54)为自由面上两个入射脉冲生成的体积波和偏斜波的边界条件,这些边界条件反映了应力波在加载面和自由面上的界面效应.显然,波的激发和反射依赖于加载面和自由面的冲击压力和界面速度,一般需要通过冲击实验来测定.

4 平板冲击下复合脉冲和偏斜脉冲的数值分析

圆柱形平板试件受到圆柱形平板飞片撞击,在激发的应力波从撞击面出发、传播到自由面再反射回传到撞击面的观测时间内,可忽略试件侧向边界对应力波的影响,通常在一级轻气炮上进行动载平板试验.在平板冲击试验中,应力波可近似为沿平板厚度方向变化而在垂直板厚度方向均匀分布.

现在利用波动方程(33)、(34)以及边界条件(45)、(50)和(54),数值分析平面应力波的传播与界面效应.数值分析采用中心差分格式.

取平板试件为氧化铝陶瓷,试件厚度 $h = 10.0 \text{ mm}$,陶瓷材料参数见表 1.撞击面上的边界条件涉及方程(45)中撞击力 $f(t)$ 和撞击面速度 $v(t)$ 随时间变化,二者均设为关于时间的正弦半波压缩脉冲,参见图 3 和图 4.

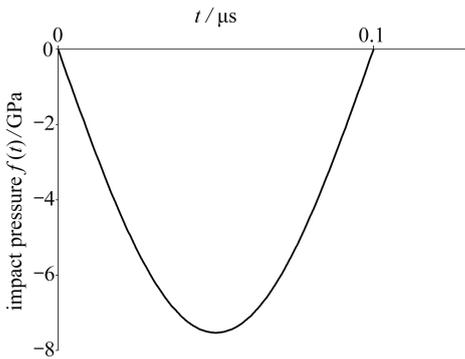


图 3 平板试件撞击面上的冲击压力变化

Fig. 3 The change of impact pressure on the impact surface of the plate specimen

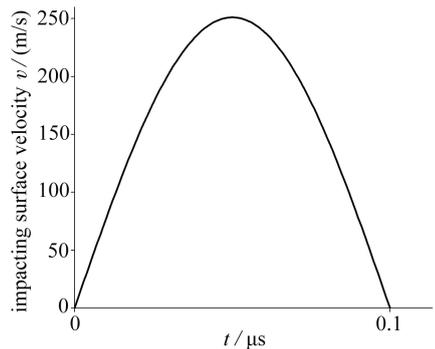


图 4 平板试件撞击面的速度变化

Fig. 4 The change of the impact surface velocity of the plate specimen

表 1 陶瓷平板试件的材料参数

Table 1 Material parameters of the ceramic plate specimen

$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E / GPa	ν	λ / GPa	μ / GPa	$c_1 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$c_2 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
3.88×10^3	372.84	0.23	129.11	151.56	1.056×10^4	6.25×10^3

首先观察撞击面上应力波的激发以及传播过程,下面各个波形图中(图 5~图 10)给出了体积波和偏斜波的波形.特别指出这些结果只给出了偏应变的第一个主值,其张量性质没有变化.图 5 为 $t = 0.1 \mu\text{s}$ 时体积波和偏斜波的波形,两个脉冲从撞击面上同时出发.根据波动方程(33)、(34),体积波独立传播,但偏斜波将受到体积波的影响.

图 6 为 $t = 0.8 \mu\text{s}$ 时体积波和偏斜波的波形,体积波在传播过程中保持了独立波形且速度较快,但偏斜波的波形发生了分离,有一部分与体积波共同运动,所以第一个脉冲是体积波与部分偏斜波的复合,第二个脉冲为剩余偏斜波的波形.由于偏斜波速小于体积波速,以偏斜波速运动的第二个偏斜脉冲与第一个复合脉冲渐行渐远,且第一个脉冲宽度较第二个脉冲宽度

大一些。

右行的波传播到右侧自由面上将发生波的入射和反射,由于两个脉冲波速的差异,第一个复合脉冲将先于第二个独立脉冲到达自由面.自由面上是无应力状态但将产生自由面运动速度,令方程(50)中自由面运动速度 $v_1 = 382.55 \text{ m/s}$.图7表示当 $t = 1.0 \mu\text{s}$ 时第一个复合脉冲运动到自由面上的入射与反射波形,此时入射的复合脉冲与反射脉冲同时发生在自由面上。

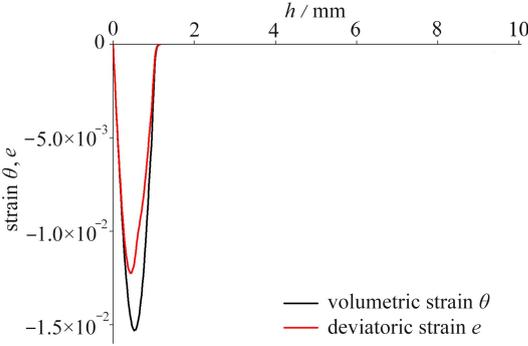


图5 右行的体积波和偏斜波在 $t = 0.1 \mu\text{s}$ 时的波形图(二者均为压缩脉冲)

Fig. 5 Waveform of the right-propagating volumetric and deviatoric waves at $t = 0.1 \mu\text{s}$ (both of them are compressive pulses)

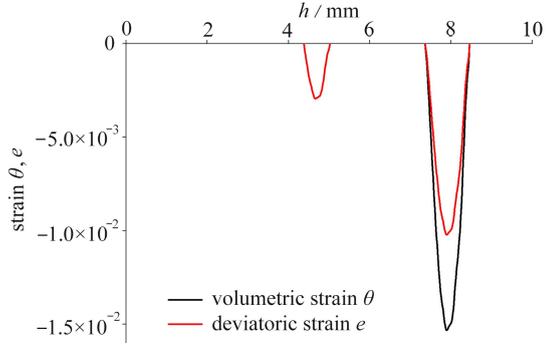


图6 右行的体积波和偏斜波在 $t = 0.8 \mu\text{s}$ 时的波形图

Fig. 6 Waveform of the right-propagating volumetric and deviatoric waves at $t = 0.8 \mu\text{s}$

图8表示当 $t = 1.2 \mu\text{s}$ 时第一个复合脉冲在自由面完成反射后的波形,且入射的压缩脉冲为负值而反射回的拉伸脉冲为正值.一个入射复合脉冲反射回两个拉伸脉冲,第一个反射脉冲也是体积波与偏斜波的复合脉冲,第二个脉冲是部分偏斜脉冲,注意到此时右行的第二个偏斜脉冲还没有到达自由面。

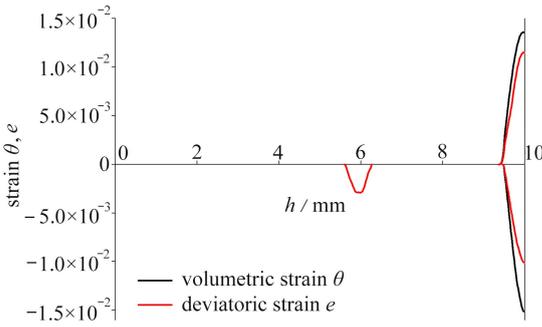


图7 当 $t = 1.0 \mu\text{s}$ 时右行的第一个脉冲在自由面上的入射与反射

Fig. 7 Waveform of incidence and reflection of the 1st pulse on the free surface at $t = 1.0 \mu\text{s}$

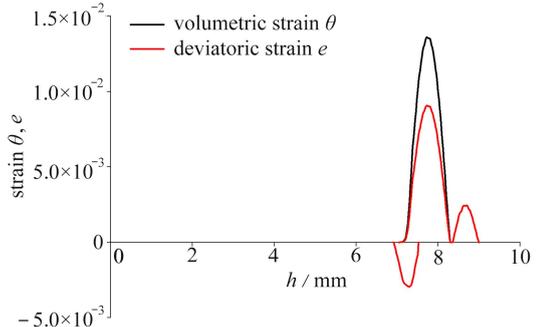


图8 当 $t = 1.2 \mu\text{s}$ 时第一个脉冲在自由面上反射后形成左行的两个拉伸脉冲

Fig. 8 Waveform of two left-propagating pulses reflected by the 1st pulse on the free surface at $t = 1.2 \mu\text{s}$

右行的第二个偏斜脉冲到达自由面后,同样发生入射与反射的界面效应,自由面将产生第二个自由面速度,令方程(54)中的自由面速度为 $v_2 = 67.56 \text{ m/s}$.图9为 $t = 1.66 \mu\text{s}$ 时右行的第二个偏斜脉冲在自由面上的入射与反射波形,入射到自由面上的偏斜脉冲同时反射回左行的两个脉冲.由于界面效应,压缩脉冲转变成拉伸脉冲。

图10为 $t = 1.85 \mu\text{s}$ 时第二个右行脉冲也完成反射后的波形.第二个右行压缩脉冲在自由

面上同样反射回两个拉伸脉冲,第一个拉伸脉冲是体积波与部分偏斜波的复合脉冲,第二个脉冲是独立的部分偏斜脉冲。

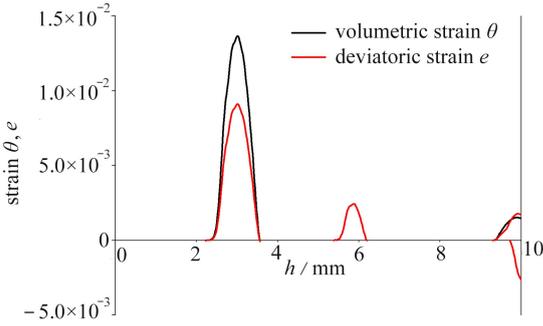


图9 当 $t = 1.66 \mu\text{s}$ 时右行第二个脉冲在自由面上的入射与反射

Fig. 9 Waveform of incidence and reflection of the 2nd pulse on the free surface at $t = 1.66 \mu\text{s}$

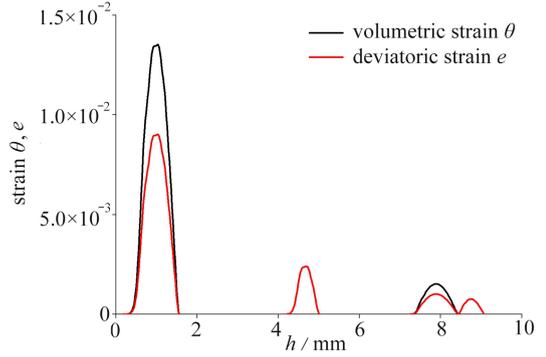


图10 当 $t = 1.85 \mu\text{s}$ 时两个脉冲在自由面上完全反射后形成左行的4个脉冲

Fig. 10 Waveform of 4 left-propagating pulses reflected by 2 pulses on the free surface at $t = 1.85 \mu\text{s}$

比较图6和图10的波形图,右行的两个脉冲在自由面上发生了两次入射与反射,每次反射后都产生两个脉冲,这样,反射过程结束后左行的应力波有4个脉冲.无论是入射脉冲还是反射脉冲,第一个脉冲是体积波与偏斜波的复合,第二个脉冲是偏斜脉冲,这种双脉冲结构都没有改变.从应变能密度的角度看,右行的压缩变形能经过自由面反射后形成拉伸变形能,但是压缩能密度要高于拉伸能密度,因为拉伸变形能在空间上被稀释了。

5 平板冲击下自由面上偏斜波信号的实验验证

右行的两个脉冲先后在自由面上发生入射与反射,所以自由面也先后两次受到应力波冲击产生自由面速度,可以预计自由面速度将是两次入射与反射形成的自由面速度的复合,参见图11,即自由面速度曲线上会存在一个跳跃,这可完美解释氧化铝陶瓷平板冲击下自由面速度的二次压缩现象^[27-30],譬如图12为一个典型的自由面速度曲线。

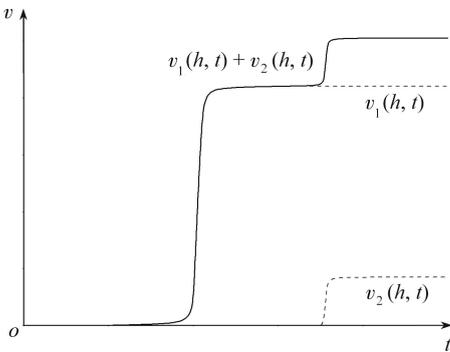


图11 自由面速度是应力波的两个脉冲引起的自由面速度之和

Fig. 11 The free surface velocity driven 2 times by 2 pulses of the stress waves

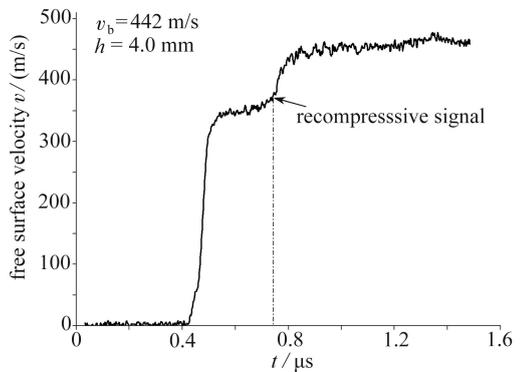


图12 厚度为4.0 mm的氧化铝陶瓷平板冲击测得的自由面速度

Fig. 12 The free surface velocity measured in the impact test of alumina plates with a thickness of 4.0 mm

自由面速度跳跃出现的时刻对应着第二个脉冲到达了自由面,也即偏斜波信号出现的时候。

刻,针对不同厚度的氧化铝陶瓷平板进行冲击试验,测量自由面速度曲线上出现速度跳跃的时间,发现偏斜波出现的时间与理论预测的时间高度吻合。图 13 为 10 发不同厚度的氧化铝陶瓷平板冲击下,偏斜脉冲信号出现的时间与偏斜波理论预测的对比。因此,氧化铝陶瓷平板冲击下自由面速度的二次压缩现象以及偏斜波信号测量的时间验证了偏斜波的存在。

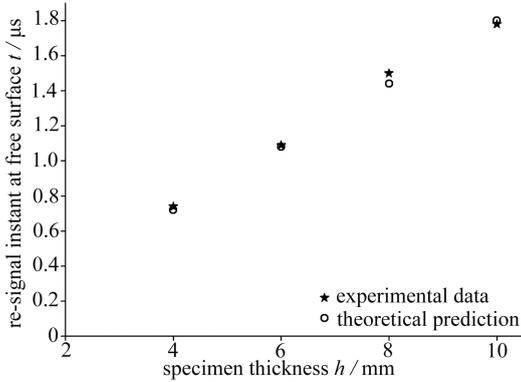


图 13 不同厚度试件偏斜脉冲出现的时间与测量的时间具有高度的一致性

Fig. 13 Predicted times of deviatoric pulses agreeing well with measurements of specimens with different thicknesses

如果平板撞击简化为一维应变冲击,理论上就排除了偏斜脉冲的传播,传统应力波理论就不能解释自由面速度的二次加速信号,特别是冲击压力低于屈服应力时,弹性波传播也出现二次压缩现象。偏斜脉冲传播的偏应变是二阶张量,第一个主值为 $\hat{e} = e - 2\theta/3 = -2\varepsilon_2$, 所以侧向应变越大,偏斜脉冲信号越显著以及自由面效应也更易测量。侧向应变的大小与材料力学性质、试件几何结构、冲击加载条件有关。笔者期待更丰富的波动信号测量,检验弹性应力波传播过程中应力、应变、质点速度、界面压力及界面速度的力学响应。

6 结 论

本文指出了现有的弹性应力波理论在运动相容性、旋转变形与对应内力缺失等方面存在的若干问题。

从 Navier 方程出发,提出了弹性体中存在体积波和偏斜波。体积波满足独立的波动方程,以偏斜应变作为波动变量的偏斜波的波动方程含有体积应变项,二者组成了一个弱耦合波系。

平板冲击不应作为一维应变或一维位移来处理。平板冲击下的波动变量依然保持二阶张量状态,但只有两个弱耦合的波动方程,波动变量退化为体应变和第一偏应变主值。简单的变量置换说明,应力波传播了两个脉冲,第一个脉冲是体积波和部分偏斜波的复合脉冲,第二个脉冲是独立的部分偏斜波的脉冲。根据运动间断面上的质量和动量守恒方程,建立了平板撞击下加载面和自由面上应力波的激发和反射条件。

数值模拟了平板撞击下应力波的复合脉冲和偏斜脉冲的激发、传播、入射和反射过程。偏斜脉冲以较慢速度到达自由面,可产生自由面速度曲线的二次压缩信号,这可解读氧化铝平板冲击试验的自由面速度的二次压缩现象。冲击加载下不同厚度试件的二次压缩信号验证了偏斜脉冲的理论预测。

本文提出的体积波和偏斜波、复合脉冲和偏斜脉冲的弹性应力波理论,修正了现有的弹性应力波理论,得到了氧化铝平板撞击下自由面速度信号的实验验证。笔者衷心期待并热忱欢迎同行给予指导帮助!

参考文献(References):

- [1] REEDMAN J H, PHIL M. *Techniques in Mineral Exploration*[M]. London: Applied Science Publishers, 1979: 229-321.
- [2] 宁建国, 王成, 马天宝. 爆炸与冲击动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.(NING Jianguo, WANG Cheng, MA Tianbao. *Explosion Mechanics and Impact Dynamics*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010.(in Chinese))
- [3] 宁建国, 宋卫东, 任会兰, 等. 冲击载荷作用下材料与结构的响应与防护[J]. 固体力学学报, 2010, **31**(5): 532-552.(NING Jianguo, SONG Weidong, REN Huilan, et al. Response and protection of materials and structures under impact loadings[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(5): 532-552.(in Chinese))
- [4] 周锡元, 吴育才. 工程抗震的新发展[M]. 广州: 暨南大学出版社, 2002.(ZHOU Xiyuan, WU Yucui. *New Development of Earthquake Resistant Engineering*[M]. Guangzhou: Jinan University Press, 2002.(in Chinese))
- [5] 廖振鹏. 工程波动理论导论[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2002.(LIAO Zhenpeng. *Introduction to Wave Motion Theories in Engineering*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2002.(in Chinese))
- [6] FENG Qian, KONG Qingzhao, SONG Gangbing. Damage detection of concrete piles subject to typical damage types based on stress wave measurement using embedded smart aggregates transducers[J]. *Measurement*, 2016, **88**: 345-352.
- [7] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2006.(XU Zhilun. *Elastic Mechanics*[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2006.(in Chinese))
- [8] ACHENBACH J D. *Wave Propagation in Elastic Solids*[M]. New York: North-Holland Publishing Company, 1973: 64-70.
- [9] GRAFF K F. *Wave Motion in Elastic Solids*[M]. London: Oxford University Press, 1975: 50-64.
- [10] 吴家龙. 弹性力学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2001: 299.(WU Jialong. *Elastic Mechanics*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2001: 299.(in Chinese))
- [11] 王礼立. 应力波基础[M]. 2版. 北京: 国防工业出版社, 2005: 35-37.(WANG Lili. *The Foundation of Stress Wave*[M]. 2nd ed. Beijing: National Defense Industry Press, 2005: 35-37.(in Chinese))
- [12] MEYERS M A. *Dynamic Behavior of Materials*[M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1994: 25-28.
- [13] KOLSKI H. *Stress Waves in Solids*[M]. New York: Dover Publications Inc, 1963.
- [14] 李永池. 波动力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2015.(LI Yongchi. *Wave Dynamics*[M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2015.(in Chinese))
- [15] 杨桂通, 张善元. 弹性动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1988: 73-75.(YANG Guitong, ZHANG Shanyuan. *Elastodynamics*[M]. Beijing: Chinese Railway Press, 1988: 73-75.(in Chinese))
- [16] 颜世军, 刘占芳. 修正的偶应力线弹性理论及广义线弹性体的有限元方法[J]. 固体力学学报, 2012, **33**(3): 279-287.(YAN Shijun, LIU Zhanfang. A modified couple stress linear elasticity and finite element method for generalized elastic bodies[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2012, **33**(3): 279-287.(in Chinese))
- [17] LIU Zhanfang, FU Zhi. Scale effects of the stress symmetry in generalized elasticity[J]. *Inter-*

- national Journal of Aerospace and Lightweight Structures*, 2012, **2**(4): 509-521.
- [18] 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2003: 73. (HUANG Kezhi, XUE Mingde, LU Mingwan. *Tensor Analysis*[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 73.(in Chinese))
- [19] MINDLIN R D, TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [20] LIU Zhanfang, SUN Xiaoyong, GUO Yuan. On elastic stress waves in an impacted plate[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2014, **6**(4): 145-163.
- [21] 经福谦. 实验物态方程导引[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 1999.(JIN Fuqian. *Introduction of Experimental Equation of State*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 1999.(in Chinese))
- [22] GRADY D E, MOODY R L. Shock compression profiles in ceramics[R]. United States, 1996.
- [23] 格拉汉姆 R A. 固体的冲击波压缩: 力学、物理和化学[M]. 贺红亮, 译. 北京: 科学出版社, 2010.(GRAHAM R A. *Solids Under High-Pressure Shock Compression: Mechanics, Physics and Chemistry*[M]. HE Hongliang, transl. Beijing: Science Press, 2010.(Chinese version))
- [24] 王礼立, 胡时胜, 杨黎明, 等. 材料动力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2017.(WANG Lili, HU Shisheng, YANG Liming, et al. *Material Dynamics*[M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2017.(in Chinese))
- [25] TRUESDELL C, NOLL W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [26] 范镜泓. 非线性连续介质力学基础[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987: 35-52.(FAN Jinghong. *Nonlinear Continuum Mechanics Theory*[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1987: 35-52.(in Chinese))
- [27] 刘占芳, 冯晓伟, 张凯, 等. 氧化铝陶瓷动态压缩强度的高压和高应变率效应[J]. 功能材料, 2010, **41**(12): 2087-2090.(LIU Zhanfang, FENG Xiaowei, ZHANG Kai, et al. Effects of high pressure and high strain rate on dynamic compressive strength of alumina[J]. *Journal of Functional Materials*, 2010, **41**(12): 2087-2090.(in Chinese))
- [28] RAJENDRAN A M, DANDEKAR D P. Inelastic response of alumina[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1995, **17**: 649-660.
- [29] KANEL G I, RAZORENOV S V, SAYINYKH A S, et al. A study of failure wave phenomenon in glasses compressed at different levels[J]. *Journal of Applied Physics*, 2005, **98**(11): 113523. DOI: 10.1063/1.2139829.
- [30] RAISER G F, WISE J L, CLIFTON R J, et al. Plate impact response of ceramics and glasses [J]. *Journal of Applied Physics*, 1994, **75**(8): 3862. DOI: 10.1063/1.356066.

Dual Pulse Wave Structure of Elastic Stress Waves and Plate Impact Verification

LIU Zhanfang¹, GUO Yuan¹, TANG Shaoqiang²,
HUANG Xinjia¹, ZHUANG Zhuo³

(1. *College of Aerospace Engineering, Chongqing University,
Chongqing 400044, P.R.China;*

2. *College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, P.R.China;*

3. *School of Aerospace Engineering, Tsinghua University,
Beijing 100084, P.R.China)*

(Contributed by LIU Zhanfang, ZHUANG Zhuo, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A revised elastic stress wave theory was proposed. The existent theory of elastic stress waves has some deficiencies in aspects of rotational deformation as well as its corresponding internal force, and wave equations, etc. It was revealed that there exist both volumetric waves and deviatoric waves in elastic solids, the volumetric wave travels independently but the deviatoric wave is influenced by the volumetric wave, and them 2 form a weakly coupled wave system. An impacted plate should be treated as a 3D strain system other than a 1D one. In plate impact tests, the 2 wave variables remained 2nd-order tensors but the independent variable was simplified as a volumetric strain plus a principal deviatoric strain, consequently the wave equations were simplified as 2 weakly coupled wave equations. The interface effects of stress waves involved generation of stress waves on the impact surface and reflection of stress waves on the free surface. Relationships between the boundary conditions and the wave variables on the impact surface and the free surface were established. In the numerical tests, the volumetric and deviatoric waves were simultaneously generated on the impact surface, but the volumetric wave and a part of the deviatoric wave constituted a composite pulse propagating at a faster speed, and the rest of the deviatoric wave made a deviatoric pulse traveling at a slower speed. Both the 2 incident pulses on the free surface were reflected respectively to produce a composite pulse and a deviatoric pulse again, which meant 4 reflected pulses were generated. The dual pulse structure of stress waves may explain very well the re-compressive phenomenon of the free surface velocity curves of plate specimens under plate impact. Re-compressive signals measured on 10 alumina plate specimens of different thicknesses verify the theoretical prediction of the deviatoric pulse.

Key words: volumetric wave; deviatoric wave; weakly coupled stress wave; composite pulse; deviatoric pulse; plate impact test

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11372365; 11072276; 11176035)

引用本文/Cite this paper:

刘占芳, 郭原, 唐少强, 黄心嘉, 庄茁. 弹性应力波的双脉冲结构与平板冲击试验验证[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(3): 249-265.

LIU Zhanfang, GUO Yuan, TANG Shaoqiang, HUANG Xinjia, ZHUANG Zhuo. Dual pulse wave structure of elastic stress waves and plate impact verification[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(3): 249-265.