应用数学和力学,第 39 卷 第 5 期
2018 年 5 月 1 日出版
Applied Mathematics and Mechanics
Vol.39,No.5,May.1,2018

文章编号:1000-0887(2018)05-0584-08

带有比例时滞的复值神经网络全局指数稳定性*

张　磊[1]，宋乾坤[2]

(1. 四川工程职业技术学院 基础教学部, 四川 德阳 618000;
2. 重庆交通大学 数学系, 重庆 400074)

(我刊编委宋乾坤来稿)

摘要: 研究了带有比例时滞的复值神经网络全局指数稳定性问题.借助向量 Lyapunov 函数思想和同胚映射原理, 并使用 M-矩阵理论和不等式技巧,建立了网络平衡点存在性、唯一性和全局指数稳定性的判定条件.

关　键　词: 复值神经网络; 比例时滞; 全局指数稳定性; M-矩阵

中图分类号: O175.13　　**文献标志码:** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.380257

引　　言

众所周知, 神经网络已在诸多领域得到了广泛的应用.应用神经网络解决实际问题时, 首要任务是要分析网络模型的稳定性[1].当用硬件实现神经网络时, 由于放大器转换速度的限制, 不可避免地会出现传递延迟[2].时滞的出现不仅会降低网络的传递速度, 而且会导致本来稳定的网络变得不稳定, 产生震荡, 甚至出现混沌现象[3].因此,研究时滞神经网络的稳定性具有重要的理论意义和实用价值[4].近年来, 各类时滞神经网络模型被建立, 主要包括常数时滞网络模型[5]、有界变化时滞网络模型[6]、分布时滞网络模型[7]、泄漏时滞网络模型[8]以及多种时滞混合的网络模型[9].最近, 一些学者建立了被称为比例时滞的神经网络模型, 并研究了模型的稳定性问题[10-13].比例时滞是无界的时变时滞, 不同于传统的时滞.因此, 带有比例时滞的神经网络是一种新型的时滞神经网络.

以上提到的神经网络是实值神经网络,即网络的神经元状态、输出、权值和激活函数都取实数值.虽然实值神经网络已在诸多领域得到了应用, 但也有其局限性[14], 如在电子信息工程领域, 人们就需要处理复数数据.因此, 复值神经网络应运而生[15].复值神经网络的神经元状态、输出、权值和激活函数都为复值, 能够直接处理复值数据.正因如此, 复值神经网络稳定性引起了人们的广泛兴趣, 许多稳定性结论先后被建立[15-24].然而, 据笔者所知, 带有比例时滞的复值神经网络稳定性还几乎没有学者研究过.鉴于此,本文将从事这项工作.

* **收稿日期:** 2017-09-14
基金项目: 国家自然科学基金(61773004);重庆高校创新团队建设计划资助项目(CXTDX201601022)
作者简介: 张磊(1964—), 男, 讲师(E-mail: 1790279118@qq.com);
宋乾坤(1963—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: qiankunsong@163.com).

1　预备知识

本文考虑如下带有比例时滞的复值神经网络模型：

$$\dot{z}_i(t) = -d_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(z_j(q_j t)) + J_i,$$
$$t \geqslant 1,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t))^{\mathrm{T}} \in C^n$ 表示 t 时刻 n 个神经元的状态向量；q_j 是比例时滞因子并且满足 $0 < q_j < 1$，由于 $q_j t = t - (1 - q_j)t$，显然 $(1 - q_j)t$ 是无界的时变时滞；$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n) \in R^{n\times n}$，$d_j > 0\ (j = 1,2,\cdots,n)$ 表示自反馈连接权矩阵；$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(t)) = (f_1(z_1(t)), f_2(z_2(t)), \cdots, f_n(z_n(t)))^{\mathrm{T}} \in C^n$ 表示神经元激活函数；$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$ 分别表示连接权矩阵和比例时滞连接权矩阵；$\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, \cdots, J_n)^{\mathrm{T}} \in C^n$ 表示外部输入常向量.

模型(1)的初始条件为

$$z_i(s) = \phi_i(s),\qquad s \in [q_i, 1],\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

其中 $\phi_i(s)$ 在 $[q_i, 1]$ 上有界且连续.

本文中给出如下假设：

(H)　对于任意 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，存在一个正对角矩阵 $\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 使得对于任意的 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，有

$$|f_i(\alpha_1) - f_i(\alpha_2)| \leqslant l_i |\alpha_1 - \alpha_2|. \tag{3}$$

定义 1[11]　模型(1)的平衡点 $\tilde{\boldsymbol{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_n)^{\mathrm{T}}$ 被称为全局指数稳定的，如果存在正常数 $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$ 使得

$$\|\boldsymbol{z}(t) - \tilde{\boldsymbol{z}}\| \leqslant M \|\boldsymbol{\phi} - \tilde{\boldsymbol{z}}\| \mathrm{e}^{-\varepsilon t} \tag{4}$$

对于任意 $t \geqslant 1$ 成立，其中 $\boldsymbol{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是模型(1)在初始值 $\boldsymbol{\phi}(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \cdots, \phi_n(s))^{\mathrm{T}}$ 下的任意解，$s \in [q, 1]$，$q = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\{q_j\}$ 并且

$$\|\boldsymbol{\phi} - \tilde{\boldsymbol{z}}\| = \sup_{s\in[q,1]} \left(\sum_{i=1}^{n} |\phi_i(s) - \tilde{z}_i|^2 \right)^{1/2}. \tag{5}$$

定义 2[25]　实数矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 被称为非奇异 M-矩阵，如果 $a_{ij} \leqslant 0(i, j = 1,2,\cdots,n; i \neq j)$ 并且 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式大于零.

引理 1[25]　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，如果 $a_{ij} \leqslant 0(i, j = 1,2,\cdots,n; i \neq j)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 M-矩阵的充要条件是下面条件之一成立：

(i) $\boldsymbol{A}$ 的特征值实部是正数.

(ii) 存在 n 维向量 $\boldsymbol{\xi} > \boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{A\xi} > \boldsymbol{0}$ 成立.

(iii) 存在正对角矩阵 $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{PW} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵.

引理 2[21]　如果 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}): C^n \to C^n$ 是连续映射且满足下列条件：

(i) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})$ 在 C^n 上是单射；

(ii) 当 $\|\boldsymbol{z}\| \to +\infty$ 时，$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})\| \to +\infty$，

则 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})$ 是 C^n 上的同胚映射.

对于复值矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in C^{n\times n}$，$|\boldsymbol{A}| = (|a_{ij}|)_{n\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的模矩阵，$\rho(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

2　主要结果

定理 1　在假设(H)条件下，如果 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{D} - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|)\boldsymbol{L}$ 是非奇异 M-矩阵，则复值神

经网络(1)有唯一的全局指数稳定的平衡点.

证明 本定理的证明分两步.

第一步 证明平衡点的存在性和唯一性.

设 $\tilde{\boldsymbol{z}}=(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\cdots,\tilde{z}_n)^{\mathrm{T}}$ 是复值神经网络(1)的平衡点,则

$$-d_i\tilde{z}_i+\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})f_j(\tilde{z}_j)+J_i=0,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

令 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})=(H_1(\boldsymbol{u}),H_2(\boldsymbol{u}),\cdots,H_n(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}$,其中

$$H_i(\boldsymbol{u})=-d_iu_i+\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})f_j(u_j)+J_i,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

下面,证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 在 C^n 上是同胚映射.

首先,证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 在 C^n 上是单射.如果存在 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}\in C^n$,且 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}$ 使得 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{v})$ 成立,则

$$d_i(u_i-v_i)=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})(f_j(u_j)-f_j(v_j)),\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

从假设条件(H),可以得到

$$d_i|u_i-v_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)l_j|u_j-v_j|,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

即

$$(\boldsymbol{D}-(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)\boldsymbol{L})(|u_1-v_1|,|u_2-v_2|,\cdots,|u_n-v_n|)^{\mathrm{T}}\leqslant 0. \tag{10}$$

因为 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)\boldsymbol{L}$ 是非奇异 M-矩阵,由引理 1,可以得到

$$u_i=v_i,\qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{11}$$

与 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}$ 矛盾.因此 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})$ 在 C^n 上是单射.

其次,证明当 $\|\boldsymbol{u}\|\to+\infty$ 时,$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})\|\to+\infty$.因为 $\boldsymbol{W}$ 是非奇异 M-矩阵,由引理 1,则存在正对角矩阵 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 使得 $\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵.令 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u})=(\psi_1(\boldsymbol{u}),\psi_2(\boldsymbol{u}),\cdots,\psi_n(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}$,其中

$$\psi_i(\boldsymbol{u})=-d_iu_i+\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})(f_j(u_j)-f_j(0)),\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

利用假设条件(H),有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\psi}^*(\boldsymbol{u})\boldsymbol{P}\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{n}[\bar{u}_ip_i\psi_i(u)+\overline{\psi_i(u)}p_iu_i]=\\
&\quad 2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(\bar{u}_ip_i\psi_i(u))=\\
&\quad \sum_{i=1}^{n}\left[-2p_id_i|u_i|^2+2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(\bar{u}_ip_i(a_{ij}+b_{ij})(f_j(u_j)-f_j(0)))\right]\leqslant\\
&\quad \sum_{i=1}^{n}\left[-2p_id_i|u_i|^2+2\sum_{j=1}^{n}|\bar{u}_ip_i(a_{ij}+b_{ij})(f_j(u_j)-f_j(0))|\right]\leqslant\\
&\quad \sum_{i=1}^{n}\left[-2p_id_i|u_i|^2+2\sum_{j=1}^{n}|u_i|p_i(|a_{ij}|+|b_{ij}|)l_j|u_j|\right]=\\
&\quad -2(|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_n|)\boldsymbol{PW}(|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_n|)^{\mathrm{T}}=\\
&\quad -(|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_n|)(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_n|)^{\mathrm{T}}\leqslant
\end{aligned}$$

$$-\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2=-\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{u}\|^2.$$

因此

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{u}\|^2\leqslant 2\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{P}\|\cdot\|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u})\|. \tag{13}$$

当 $\|\boldsymbol{u}\|\neq 0$ 时，有

$$\|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u})\|\geqslant\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{P}\|}.$$

从而 $\|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u})\|\to+\infty$，当 $\|\boldsymbol{u}\|\to+\infty$.

进一步地，当 $\|\boldsymbol{u}\|\to+\infty$ 时，得到 $\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})\|\to+\infty$.

从引理 2 知道 $\boldsymbol{H}(z)$ 是 C^n 上的同胚映射.故模型(1)存在唯一平衡点.

第二步 证明平衡点是全局指数稳定的.令 $w_i(t)=z_i(t)-\tilde{z}_i$, $g_j(w_j(t))=f_j(w_j(t)+\tilde{z}_j)-f_j(\tilde{z}_j)$.设 $u_i(t)=w_i(\mathrm{e}^t)$，类似于文献[11]的方法，模型(1)变为

$$\dot{u}_i(t)=\mathrm{e}^t\left[-d_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(u_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(u_j(t+\ln q_j))\right],$$
$$t\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{14}$$

其初始条件变为

$$u_i(s)=\phi_i(\mathrm{e}^s),\qquad s\in[\ln q_i,0],\ i=1,2,\cdots,n. \tag{15}$$

因为 $\boldsymbol{W}$ 是非奇异 M-矩阵，由引理 1，则存在 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$ 使得

$$-\xi_id_i+\sum_{j=1}^{n}\xi_j(|a_{ij}|+|b_{ij}|)l_j<0,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

进一步地，对于任意 $t\geqslant 0$，则一定存在正数 $\varepsilon>0$ 使得

$$\xi_i(\varepsilon-\mathrm{e}^td_i)+\mathrm{e}^t\sum_{j=1}^{n}\xi_j|a_{ij}|l_j+q^{-\varepsilon}\mathrm{e}^t\sum_{j=1}^{n}\xi_j|b_{ij}|l_j<0,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{17}$$

令

$$v_i(t)=\mathrm{e}^{\varepsilon t}|u_i(t)|=\mathrm{e}^{\varepsilon t}\sqrt{u_i(t)\overline{u_i(t)}},\qquad t\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则

$$\dot{v}_i(t)=\varepsilon\mathrm{e}^{\varepsilon t}|u_i(t)|+\mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{1}{2\sqrt{u_i(t)\overline{u_i(t)}}}(\dot{u}_i(t)\overline{u_i(t)}+u_i(t)\dot{\overline{u_i}}(t))=$$
$$\varepsilon\mathrm{e}^{\varepsilon t}|u_i(t)|+\mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{1}{|u_i(t)|}\mathrm{Re}(\dot{u}_i(t)\overline{u_i(t)}). \tag{18}$$

沿着式(14)的解，计算

$$\mathrm{Re}(\dot{u}_i(t)\overline{u_i(t)})=\mathrm{e}^t\left[-d_i|u_i(t)|^2+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(a_{ij}g_j(u_j(t))\overline{u_i(t)})+\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(b_{ij}g_j(u_j(t+\ln q_j))\overline{u_i(t)})\right]\leqslant$$
$$\mathrm{e}^t\left[-d_i|u_i(t)|^2+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}g_j(u_j(t))\overline{u_i(t)}|+\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}g_j(u_j(t+\ln q_j))\overline{u_i(t)}|\right]=$$
$$\mathrm{e}^t\left[-d_i|u_i(t)|^2+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||g_j(u_j(t))||u_i(t)|+\right.$$

$$\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} || g_j(u_j(t+\ln q_j)) || u_i(t) | \Big] \leqslant$$

$$\mathrm{e}^{t} | u_i(t) | \Big[-d_i | u_i(t) | + \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | l_j | u_j(t) | +$$

$$\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | l_j | u_j(t+\ln q_j) | \Big]. \tag{19}$$

由式(18)和(19),可得

$$\dot{v}_i(t) \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon t} | u_i(t) | +$$

$$\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)t} \Big[-d_i | u_i(t) | + \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | l_j | u_j(t) | +$$

$$\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | l_j | u_j(t+\ln q_j) | \Big] \leqslant$$

$$(\varepsilon - \mathrm{e}^{t} d_i) v_i(t) + \mathrm{e}^{t} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | l_j v_j(t) + q_j^{-\varepsilon} \mathrm{e}^{t} \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | l_j v_j(t+\ln q_j) \leqslant$$

$$(\varepsilon - \mathrm{e}^{t} d_i) v_i(t) + \mathrm{e}^{t} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | l_j v_j(t) + q^{-\varepsilon} \mathrm{e}^{t} \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | l_j v_j(t+\ln q_j). \tag{20}$$

令 $\gamma = \dfrac{(1+\delta)\| \boldsymbol{\phi} - \tilde{z} \|}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\xi_i\}}$($\delta$ 是正常数),则当 $s \in [\ln q_i, 0]$ 时,有

$$v_i(s) = \mathrm{e}^{\varepsilon s} | u_i(s) | \leqslant | u_i(s) | = | \phi_i(\mathrm{e}^{s}) - \tilde{z}_i | \leqslant \| \boldsymbol{\phi} - \tilde{z} \| < \xi_i \gamma, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{21}$$

下面证明当 $t \geqslant 0$ 时,不等式

$$v_i(t) < \xi_i \gamma, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{22}$$

成立.如果不等式(22)不真,则存在某一个 i_0 和 $t^* > 0$ 使得

$$\begin{cases} v_{i_0}(t^*) = \xi_{i_0}\gamma, \\ \dot{v}_{i_0}(t^*) \geqslant 0, \\ v_j(t) \leqslant \xi_j \gamma, \qquad t \in [0,t^*], j = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{23}$$

然而, 由式(17)、(20)和(23),可以得到

$$\dot{v}_{i_0}(t^*) \leqslant (\varepsilon - \mathrm{e}^{t^*} d_{i_0}) v_{i_0}(t^*) + \mathrm{e}^{t^*} \sum_{j=1}^{n} | a_{i_0 j} | l_j v_j(t^*) +$$

$$q^{-\varepsilon} \mathrm{e}^{t^*} \sum_{j=1}^{n} | b_{i_0 j} | l_j v_j(t^* + \ln q_j) \leqslant$$

$$(\varepsilon - \mathrm{e}^{t^*} d_{i_0}) \xi_{i_0}\gamma + \mathrm{e}^{t^*} \sum_{j=1}^{n} | a_{i_0 j} | l_j \xi_j \gamma + q^{-\varepsilon} \mathrm{e}^{t^*} \sum_{j=1}^{n} | b_{i_0 j} | l_j \xi_j \gamma < 0,$$

与式(23)矛盾.因此不等式(22)成立.从而

$$| u_i(t) | \leqslant \xi_i \gamma \mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \qquad t \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{24}$$

进一步

$$| z_i(t) - \tilde{z}_i | \leqslant \xi_i \gamma \mathrm{e}^{-\varepsilon \ln t}, \qquad t \geqslant 1,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{25}$$

因此

$$\| \boldsymbol{z}(t) - \tilde{z} \| \leqslant M \| \boldsymbol{\phi} - \tilde{z} \| \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\alpha)\ln t}, \qquad t \geqslant 1,$$

其中 $M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{(1+\delta)\xi_i}{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\xi_i\}} \right)^2} \geqslant 1$.证毕.

3 结　　论

在激活函数不分解为实部函数和虚部函数的情形下，本文研究了带有比例时滞的复值神经网络全局指数稳定性问题.借助向量 Lyapunov 函数思想和同胚映射原理，并使用 M-矩阵理论和不等式技巧，建立了网络平衡点存在性、唯一性和全局指数稳定性的判定条件.

参考文献（References）：

[1] 廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性[J]. 中国科学（A 辑），1993，**23**(10)：1025-1035.（LIAO Xiaoxin. Stability of Hopfield neural networks[J]. *Science in China*（*Series A*），1993，**23**(10)：1025-1035.（in Chinese））

[2] 马儒宁，陈天平. 基于投影算子的回归神经网络模型及其在最优化问题中的应用[J]. 应用数学和力学，2006，**27**(4)：484-494.（MA Runing，CHEN Tianping. Recurrent neural network model based on projective operator and its application to optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2006，**27**(4)：484-494.（in Chinese））

[3] 杨志春，徐道义. 具有变时滞和脉冲效应的 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性[J]. 应用数学和力学，2006，**27**(11)：1329-1334.（YANG Zhichun，XU Daoyi. Global exponential stability of Hopfield neural networks with variable delays and impulsive effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2006，**27**(11)：1329-1334.（in Chinese））

[4] 颜向平，李万同. 具有扩散影响的 Hopfield 型神经网络的全局渐近稳定性[J]. 应用数学和力学，2007，**28**(3)：328-334.（YAN Xiangping，LI Wantong. Global asymptotic stability for Hopfield-type neural networks with diffusion effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2007，**28**(3)：328-334.（in Chinese））

[5] ARIK S. Stability analysis of delayed neural networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I：Fundamental Theory and Applications*，2000，**47**(7)：1089-1092.

[6] KWON O，PARK J H，LEE S M，et al. New augmented Lyapunov-Krasovskii functional approach to stability analysis of neural networks with time-varying delays[J]. *Nonlinear Dynamics*，2014，**76**(1)：221-236.

[7] SONG Qiankun，CAO Jinde，ZHAO Zhenjiang. Periodic solutions and its exponential stability of reaction-diffusion recurrent neural networks with continuously distributed delays[J]. *Nonlinear Analysis：Real World Applications*，2006，**7**(1)：65-80.

[8] BALASUBRAMANIAM P，VEMBARASAN V，RAKKIYAPPAN R. Global robust asymptotic stability analysis of uncertain switched Hopfield neural networks with time delay in the leakage term[J]. *Neural Computing and Applications*，2012，**21**(7)：1593-1616.

[9] SONG Qiankun，CAO Jinde. Stability analysis of Cohen-Grossberg neural network with both time-varying and continuously distributed delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*，2006，**197**(1)：188-203.

[10] ZHOU Liqun. Global asymptotic stability of cellular neural networks with proportional delays[J]. *Nonlinear Dynamics*，2014，**77**(1/2)：41-47.

[11] ZHOU Liqun. Delay-dependent exponential stability of cellular neural networks with multi-proportional delays[J]. *Neural Process Letters*，2013，**38**(3)：347-359.

[12] SONG Xueli，ZHAO Pan，XING Zhiwei，et al. Global asymptotic stability of CNNs with impulses and multi-proportional delays[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*，2016，**39**(4)：722-733.

[13] YU Yuehua. Exponential stability of pseudo almost periodic solutions for cellular neural networks with multi-proportional delays[J]. *Neural Process Letters*, 2017, **45**(1): 141-151.

[14] HIROSE A. *Complex-Valued Neural Networks: Theories and Applications*[M]. Singapore: World Scientific, 2003.

[15] LEE D L. Relaxation of the stability condition of the complex-valued neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2001, **12**(5): 1260-1262.

[16] RAO V, MURTHY G. Global dynamics of a class of complex valued neural networks[J]. *International Journal of Neural Systems*, 2008, **18**(2): 165-171.

[17] ZHOU Wei, ZURADA J. Discrete-time recurrent neural networks with complex-valued linear threshold neurons[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2009, **56**(8): 669-673.

[18] ZHOU Bo, SONG Qiankun. Boundedness and complete stability of complex-valued neural networks with time delay[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, **24**(8): 1227-1238.

[19] RAKKIYAPPAN R, VELMURUGAN G, LI Xiaodi. Complete stability analysis of complex-valued neural networks with time delays and impulses[J]. *Neural Processing Letters*, 2015, **41**(3): 435-468.

[20] SONG Qiankun, YAN Huan, ZHAO Zhenjiang, et al. Global exponential stability of complex-valued neural networks with both time-varying delays and impulsive effects[J]. *Neural Networks*, 2016, **79**: 108-116.

[21] SONG Qiankun, YAN Huan, ZHAO Zhenjiang, et al. Global exponential stability of impulsive complex-valued neural networks with both asynchronous time-varying and continuously distributed delays[J]. *Neural Networks*, 2016, **81**: 1-10.

[22] SONG Qiankun, ZHAO Zhenjiang. Stability criterion of complex-valued neural networks with both leakage delay and time-varying delays on time scales[J]. *Neurocomputing*, 2016, **171**: 179-184.

[23] CHEN Xiaofeng, ZHAO Zhenjiang, SONG Qiankun, et al. Multistability of complex-valued neural networks with time-varying delays[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **294**: 18-35.

[24] ZHANG Lei, SONG Qiankun, ZHAO Zhenjiang. Stability analysis of fractional-order complex-valued neural networks with both leakage and discrete delays[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **298**: 296-309.

[25] MINC H. *Nonnegative Matrices*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1988.

Global Exponential Stability of Complex-Valued Neural Networks With Proportional Delays

ZHANG Lei[1],　SONG Qiankun[2]

(1. *Department of Basic Teaching*, *Sichuan Engineering Technical College*, *Deyang*, *Sichuan* 618000, *P.R.China*;

2. *Department of Mathematics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*)

(Contributed by SONG Qiankun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The global exponential stability of complex-valued neural networks with proportional delays was investigated. By means of the vector Lyapunov function theory, the homomorphic mapping theorem, the M-matrix theory and the inequality technique, a delay-independent sufficient condition was obtained to ensure the existence, uniqueness and global exponential stability of the considered neural networks.

Key words: complex-valued neural network; proportional delay; global exponential stability; M-matrix

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61773004)

引用本文/Cite this paper:

张磊, 宋乾坤. 带有比例时滞的复值神经网络全局指数稳定性[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(5): 584-591.

ZHANG Lei, SONG Qiankun. Global exponential stability of complex-valued neural networks with proportional delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 584-591.