

# 一类节点数不同的不确定时空网络的指数外同步\*

荣婷婷, 高艳, 颜哲

(辽宁师范大学 物理与电子技术学院, 辽宁 大连 116029)

**摘要:** 研究了节点数不同的不确定时空网络的指数外同步问题.首先,基于 Lyapunov 稳定性定理,通过设计合理的控制器,实现了两个节点数不同的不确定时空网络的指数外同步.进一步确定了表示网络拓扑结构的耦合矩阵元和反馈强度的自适应律.最后,以一维 Burgers 系统和 Logistic 系统构成的时空网络为例进行了仿真模拟.结果表明,整个网络存在稳定的指数外同步现象.并且同步的速率依赖于可调参数,而网络节点数不影响整个网络同步的稳定性,说明该同步方案具有一定的普适性.

**关键词:** 指数外同步; 时空网络; 不确定参数; Lyapunov 稳定性定理

**中图分类号:** O415

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.380203

## 引言

自然界中存在着多种实际的网络系统.因此,对复杂网络的相关研究已成为众多科学领域研究的热点方向,许多有价值的研究成果已被报道<sup>[1-8]</sup>.在复杂网络各种各样的动态行为中,同步作为一个典型的以及重要的网络集体行为,受到了国际国内学者的极大关注<sup>[9-12]</sup>.复杂网络的同步分为内同步和外同步,其中外同步在实际领域中的应用较为广泛,例如禽流感、H1N1 流感和 AIDS 等各类传染病在不同社区中传播.因此,复杂网络的外同步研究对实际应用领域更具借鉴意义<sup>[13-18]</sup>.

对于不同的复杂网络,通常有不同的节点动态、不同的节点数或不同的拓扑结构.在广泛研究的同步问题中,多是以相同节点组成的复杂网络为模型<sup>[19-23]</sup>,而现实世界中的复杂网络可以由不同类型的节点组成,因此对相同节点组成的网络的同步研究具有一定的局限性.例如以多机器人体系为例,这个系统可以看作是由机器人节点组成的动态系统,每个机器人都有不同的结构和不同的参数.因此,每个机器人模型处于不同的动态,则多机器人体系是一个由不同节点组成的动态网络系统.一般来说,如果复杂网络有不同的节点,则相同节点的复杂网络同步的方法不再适用.鉴于此种状况,对不同节点的复杂网络的同步研究引起了人们的关注. Wang 等通过 Lyapunov 函数法和收敛性的差值分析研究了异构复杂切换网络的有界同步<sup>[24]</sup>. Zhang 等基于图论、Lyapunov 稳定性理论和状态反馈控制技术实现了 Markovian 切换耦合随机网络的指数同步<sup>[25]</sup>. Wang 等通过构造一个 Lyapunov 函数使切换拓扑结构的复杂网络达到了

\* 收稿日期: 2017-07-20; 修订日期: 2017-11-14

作者简介: 荣婷婷(1992—),女,朝鲜族,硕士(通讯作者. E-mail: 421787800@qq.com).

同步<sup>[26]</sup>. Wu 等通过使用自适应控制方案实现了具有时滞耦合的两个不同的一般复杂网络的广义投影同步<sup>[27]</sup>.

但是,上述文献中对同步研究所采用的网络模型的连接方式都是固定不变的,即耦合矩阵的连接是恒定的.而在网络的实际连接过程中,某些节点状态方程的参数和表征节点之间的耦合强度不稳定,很容易导致网络连接不确定性的存在.在实际应用中,网络的未知参数不可忽略.另一方面,在测量系统参数时不可避免地存在误差,且这种不确定性经常会影响其动态特性.因此,对不确定复杂网络同步问题的研究有重要的现实意义.迄今,人们已经研究了不确定复杂网络的同步问题.例如, Ali 等利用 Lyapunov-Krasovskii 函数法和线性矩阵不等式技术得到了一个时滞相关的稳定性判据,研究了离散和分布时变时滞的不确定 Markovian 跳跃神经网络的稳定性问题<sup>[28]</sup>. 杜利明等选取所有节点为同步化的目标,基于外连接矩阵的对角化,构建低维的 Lyapunov 函数,获得了具有切换拓扑结构的非恒等节点复杂网络的同步化判据<sup>[29]</sup>. Wu 等基于 Lyapunov 稳定性理论,设计了一个自适应的控制器,使不确定复杂网络实现了同步,未知参数也被同时确定<sup>[30]</sup>. 然而,在现存的不确定复杂网络同步问题的研究中,节点的状态方程多是时间连续系统,或者节点数是相同的.目前,对节点数不同的不确定时空网络的同步研究相关报道较少,因此,对这类复杂网络同步的研究是十分必要的.

目前,人们研究较多的网络模型有小世界网络<sup>[31]</sup>、无标度网络<sup>[32]</sup>、时空网络<sup>[33]</sup>等.近年来,由 Burgers 方程作为节点构成的时空网络得到了人们的广泛青睐. Burgers 方程是一个十分重要的流体力学模型,是少数可以得到精确解的非线性偏微分方程,常用于检验数值方法的优劣.另外, Burgers 方程不仅可以作为流体动力学 Navier-Stokes 的简化模型方程,还可以代表浅水波问题的洪水数学模型,并且也是交通流动力学的模型方程.因此, Burgers 方程还有着求解方程本身以外的重要应用价值.鉴于此,本文研究所采用的时空网络模型(1)即为由 Burgers 方程作为节点以及描述该网络模型拓扑结构的边所构成.

基于上述的讨论,本文研究了节点数不同的不确定时空网络的指数外同步问题.首先,基于 Lyapunov 稳定性定理,通过设计合理的控制器,实现了两个节点数不同的不确定时空网络的指数外同步.进一步确定了表示网络拓扑结构的耦合矩阵元和反馈强度的自适应律.与现存研究结果相比,本文提出的同步方案对外同步的收敛性控制是有效的,并且同步的速率依赖于可调的参数.此外,耦合配置矩阵不需要是对称的或不可约的,内耦合矩阵也不需要对称,并且节点数不影响网络同步的稳定性.

## 1 不同时空网络同步的机理分析

考虑一个由  $N_1$  个线性耦合动态节点组成的一般时空复杂网络,每一个节点的状态方程为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(r, t)}{\partial t} = \mathbf{C} \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(r, t), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}_i(r, t) = (x_{i1}(r, t), x_{i2}(r, t), \dots, x_{in}(r, t))^T \in R^n$  是第  $i$  个节点的状态向量,  $\mathbf{C} \in R^{n \times n}$  是一个常数矩阵,  $\mathbf{f}: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  是一个非线性向量函数,第  $i$  个节点的动态函数是

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(r, t)}{\partial t} = \mathbf{C} \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)),$$

$\mathbf{\Gamma} \in R^{n \times n}$  是内耦合矩阵,  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N_1 \times N_1}$  是网络耦合强度和拓扑结构的耦合配置矩阵,其中  $a_{ij}$  定义为:如果存在节点  $j$  到  $i$  ( $i \neq j$ ) 的连接,则  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 矩阵  $\mathbf{A}$  的对角元素定义如下:

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_1} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1.$$

取方程(1)给出的网络作为驱动网络,则由  $N_2$  个动态节点组成的响应网络由式(2)给出

$$\frac{\partial \mathbf{y}_i(r, t)}{\partial t} = \mathbf{D} \mathbf{y}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) + \mathbf{u}_i(r, t),$$

$$i = 1, 2, \dots, N_2, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{y}_i(r, t) = (y_{i1}(r, t), y_{i2}(r, t), \dots, y_{in}(r, t))^T \in R^n$  是第  $i$  个节点的状态向量,  $\mathbf{D} \in R^{n \times n}$  是一个常数矩阵,  $\mathbf{g}: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  是一个非线性向量函数,第  $i$  个节点的动态函数是

$$\frac{\partial \mathbf{y}_i(r, t)}{\partial t} = \mathbf{D} \mathbf{y}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)),$$

$\mathbf{\Gamma}$  与方程(1)定义相同,  $\mathbf{B} = (\hat{b}_{ij})_{N_2 \times N_2}$  是时空的耦合配置矩阵,  $\mathbf{u}_i(r, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N_2$ ) 是设计的自适应控制器.耦合配置矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  不需要是对称的或不可约的,内耦合矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  也不需要是对称的,并且假设  $N_1 \geq N_2$ .

**定义 1** 如果存在正常数  $M$  和  $\mu$  满足  $\|\mathbf{e}_i(r, t)\| \leq M \exp(\mu t)$ , 则驱动网络(1)和响应网络(2)实现了指数外同步,其中,常数  $\mu$  是指数同步率.

为了使响应网络同步于驱动网络,定义驱动网络(1)和响应网络(2)的同步误差为

$$\mathbf{e}_i(r, t) = \mathbf{y}_i(r, t) - \mathbf{x}_i(r, t), \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \quad (3)$$

由方程(1)和(2),可以得到误差随时间演化的关系为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_i(r, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{y}_i(r, t)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}_i(r, t)}{\partial t} = \\ &\mathbf{D} \mathbf{y}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) + \mathbf{u}_i(r, t) - \\ &\left[ \mathbf{C} \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(r, t) \right] = \\ &\mathbf{D} \mathbf{y}_i(r, t) - \mathbf{C} \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \\ &\sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) - \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(r, t) + \mathbf{u}_i(r, t) = \\ &\mathbf{D} \mathbf{y}_i(r, t) - \mathbf{D} \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{D} \mathbf{x}_i(r, t) - \mathbf{C} \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) - \\ &\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) - \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) - \\ &\sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(r, t) + \mathbf{u}_i(r, t) = \\ &\mathbf{D} \mathbf{e}_i(r, t) + (\mathbf{D} - \mathbf{C}) \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \\ &\sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_j(r, t) - \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r, t) - \\ &\sum_{j=N_2+1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(r, t) + \mathbf{u}_i(r, t). \end{aligned} \quad (4)$$

**定理 1** 驱动网络(1)和响应网络(2)通过应用以下控制器和自适应律实现指数外同步:

$$\mathbf{u}_i(r, t) = -(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \mathbf{x}_i(r, t) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) +$$

$$\sum_{j=N_2+1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{x}_j(r, t) - k_i \mathbf{e}_i(r, t), \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \xi_i \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{e}_i(r, t) \exp(\mu t), \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_{ij}}{\partial t} = -l_i \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{I} \mathbf{y}_j(r, t) \exp(\mu t), \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \quad (7)$$

其中  $k_i$  为反馈强度,  $\xi_i$  是任意的正数, 常数  $\mu$  是指数同步率,  $\hat{b}_{ij}$  为响应网络中待定的耦合矩阵元,  $l_i$  是任意的正数.

**证明** 构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V(r, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{e}_i(r, t) \exp(\mu t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\xi_i} (k_i - \tilde{k})^2 + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{2l_i} (\hat{b}_{ij} - a_{ij})^2, \quad (8)$$

其中  $\tilde{k}$  是一个足够大的常数,  $i = 1, 2, \dots, N_2$ .

由误差的动态系统(4)可得到  $V(r, t)$  的导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(r, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{N_2} \left[ \mathbf{e}_i^T(r, t) \frac{\partial \mathbf{e}_i(r, t)}{\partial t} \exp(\mu t) + \frac{\mu}{2} \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{e}_i(r, t) \exp(\mu t) \right] + \\ &\sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\xi_i} (k_i - \tilde{k}) \frac{\partial k_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{l_i} (\hat{b}_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial \hat{b}_{ij}}{\partial t} = \\ &\sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(r, t) \left[ \mathbf{D} \mathbf{e}_i(r, t) + (\mathbf{D} - \mathbf{C}) \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) - \right. \\ &\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{I} \mathbf{y}_j(r, t) + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{e}_j(r, t) - \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{y}_j(r, t) - \\ &\left. \sum_{j=N_2+1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{x}_j(r, t) + \mathbf{u}_i(r, t) \right] \exp(\mu t) + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\mu}{2} \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{e}_i(r, t) \exp(\mu t) + \\ &\sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\xi_i} (k_i - \tilde{k}) \frac{\partial k_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{l_i} (\hat{b}_{ij} - a_{ij}) \frac{\partial \hat{b}_{ij}}{\partial t}. \quad (9) \end{aligned}$$

将控制器(5)、自适应律(6)和(7)代入上述方程, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(r, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(r, t) \left[ \mathbf{D} \mathbf{e}_i(r, t) + (\mathbf{D} - \mathbf{C}) \mathbf{x}_i(r, t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) - \right. \\ &\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{I} \mathbf{y}_j(r, t) + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{e}_j(r, t) - \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{y}_j(r, t) - \\ &\sum_{j=N_2+1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{x}_j(r, t) + \left( -(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \mathbf{x}_i(r, t) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(r, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \right. \\ &\left. \left. \sum_{j=N_2+1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{I} \mathbf{x}_j(r, t) - k_i \mathbf{e}_i(r, t) \right) \right] \exp(\mu t) + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\mu}{2} \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{e}_i(r, t) \exp(\mu t) + \\ &\sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\xi_i} (k_i - \tilde{k}) (\xi_i \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{e}_i(r, t) \exp(\mu t)) + \\ &\sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{l_i} (\hat{b}_{ij} - a_{ij}) (-l_i \mathbf{e}_i^T(r, t) \mathbf{I} \mathbf{y}_j(r, t) \exp(\mu t)). \quad (10) \end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(r,t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(r,t) \left[ \mathbf{D} \mathbf{e}_i(r,t) + \sum_{j=1}^{N_2} (\hat{b}_{ij} - a_{ij}) \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r,t) + \sum_{j=1}^{N_2} a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_j(r,t) - \right. \\
&\quad \left. k_i \mathbf{e}_i(r,t) \right] \exp(\mu t) + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\mu}{2} \mathbf{e}_i^T(r,t) \mathbf{e}_i(r,t) \exp(\mu t) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_2} k_i (\mathbf{e}_i^T(r,t) \mathbf{e}_i(r,t) \exp(\mu t)) - \sum_{i=1}^{N_2} \tilde{k} (\mathbf{e}_i^T(r,t) \mathbf{e}_i(r,t) \exp(\mu t)) - \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} (\hat{b}_{ij} - a_{ij}) (\mathbf{e}_i^T(r,t) \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(r,t) \exp(\mu t)) = \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(r,t) \left[ \mathbf{D} + \left( \lambda_i + \frac{\mu}{2} - \tilde{k} \right) \cdot \mathbf{I} \right] \mathbf{e}_i(r,t), \tag{11}
\end{aligned}$$

其中  $\lambda_i$  是  $\tilde{\mathbf{A}} = (a_{ij})_{N_2 \times N_2}$  的特征值,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

当  $\mathbf{D} + (\lambda_i + \mu/2 - \tilde{k}) \cdot \mathbf{I} \leq \mathbf{0}$  时, 对其整理得  $[\mathbf{D} + (\lambda_i + \mu/2 - \tilde{k}) \cdot \mathbf{I}] \cdot \mathbf{I}^{-1} \leq \mathbf{0}$ , 即  $\tilde{k} \geq \mathbf{D} \cdot \mathbf{I}^{-1} + \lambda_i + \mu/2$  时, 存在  $\partial V(r,t)/\partial t \leq 0$ , 因此驱动网络(1)和响应网络(2)实现了同步.

## 2 仿真模拟与讨论

采用一维 Burgers 和 Logistic 两个时空系统进行仿真模拟, 检验不确定时空网络的指数外同步性能.

一维 Burgers 时空系统可描述为下列形式:

$$\frac{\partial x_i(r,t)}{\partial t} = C x_i(r,t) + f(x_i(r,t)), \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \tag{12}$$

其中  $C = k \cdot b$ ,  $f(x_i(r,t)) = -k x_i^2(r,t) + d \nabla^2 x_i(r,t)$ . 这里  $k = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $d = 0.5$  是系统的参数.

一维 Logistic 时空系统可描述为下列形式:

$$\frac{\partial y_i(r,t)}{\partial t} = D y_i(r,t) + g(y_i(r,t)), \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \tag{13}$$

其中

$$D = 0, \quad g(y_i(r,t)) = -k_1 \frac{\partial y_i(r,t)}{\partial r} + \nabla^2 y_i(r,t).$$

这里  $k_1 = 4$  是系统的参数.

选择 Burgers 时空系统作为驱动网络节点的状态方程, 设节点数  $N_1 = 12$ , Logistic 时空系统作为响应网络节点的状态方程, 设节点数  $N_2 = 8$ , 即两个时空网络是节点数不同的网络. 将状态方程(12)和(13)分别按照式(1)和式(2)的连接构成驱动网络和响应网络, 即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i(r,t)}{\partial t} &= k \cdot b x_i(r,t) - k x_i^2(r,t) + d \nabla^2 x_i(r,t) + \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} \mathbf{\Gamma} x_j(r,t), \\
&\quad i = 1, 2, \dots, N_1, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_i(r,t)}{\partial t} &= -k_1 \frac{\partial y_i(r,t)}{\partial r} + \nabla^2 y_i(r,t) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \mathbf{\Gamma} y_j(r,t) + u_i(r,t), \\
&\quad i = 1, 2, \dots, N_2, \tag{15}
\end{aligned}$$

其中驱动网络的耦合配置矩阵采用双向规则结构, 即

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

响应网络中待定的耦合配置矩阵可由式(7)确定.为简单起见,选取内耦合矩阵  $\Gamma$  (一维) 为对角元素为 1 的对角矩阵.按照式(3),时空网络的同步误差方程为

$$e_i(r, t) = y_i(r, t) - x_i(r, t), \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \quad (16)$$

误差随时间的演化方程为

$$e_i(r, t) = -k_1 \frac{\partial y_i(r, t)}{\partial r} + \nabla^2 y_i(r, t) - k \cdot b x_i(r, t) + k x_i^2(r, t) + d \nabla^2 x_i(r, t) + \sum_{j=1}^{N_2} \hat{b}_{ij} \Gamma y_j(r, t) - \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} \Gamma x_j(r, t) + u_i(r, t). \quad (17)$$

按照式(5),控制器构造成如下形式:

$$u_i(r, t) = k \cdot b x_i(r, t) + k_1 \frac{\partial y_i(r, t)}{\partial r} - \nabla^2 y_i(r, t) - k x_i^2(r, t) + d \nabla^2 x_i(r, t) + \sum_{j=N_2+1}^{N_1} a_{ij} \Gamma x_j(r, t) - k_i e_i(r, t), \quad (18)$$

控制器中的反馈强度  $k_i$  可由式(6)确定.

在仿真模拟过程中,网络节点的状态方程和目标系统的空间坐标被分为  $m = 100$  个格点,周期性边界条件为

$$\begin{aligned} x_i(0, t) &= x_i(m, t) = 0 & (i = 1, 2, \dots, 12), \\ y_i(0, t) &= y_i(m, t) = 0 & (i = 1, 2, \dots, 8), \\ k_i(0, t) &= k_i(m, t) = 0 & (i = 1, 2, \dots, 8), \\ \hat{b}_{ij}(0, t) &= \hat{b}_{ij}(m, t) = 0 & (i, j = 1, 2, \dots, 8). \end{aligned}$$

节点状态变量  $x_i(m, t)$  和  $y_i(m, t)$  的初值在  $(-1, 1)$  区间内随机选取,反馈强度的初值  $k_i$  在  $(0, 1)$  区间内随机选取,耦合配置矩阵元  $\hat{b}_{ij}$  的初值在  $(0, 0.5)$  区间内随机选取.选取参量  $\xi_i = 25$ ,  $l_i = 0.4$ ,  $\mu = 0.6$  进行网络的耦合连接并对响应网络实施控制输入,驱动网络和响应网络节点状态变量之间的误差随时间演化规律如图 1~8 所示.从图中可以看出,由于驱动网络和响应网络各节点状态变量初始值不同,在耦合连接初期,误差  $e_i(r, t)$  有明显的振荡.但经过一个短暂过程后,网络的同步误差快速收敛于零并一直保持平稳状态,两个不确定时空网络的同步得以实现.

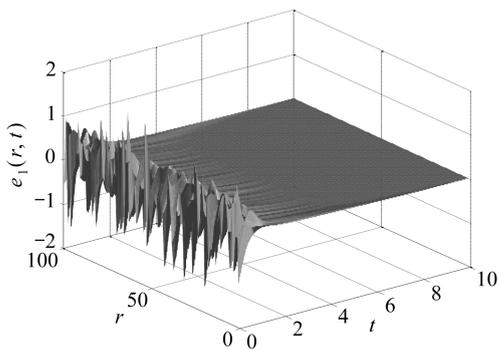
图 1 误差  $e_1(r,t)$  随时空的演化

Fig. 1 The evolution of error  $e_1(r,t)$  with time and space

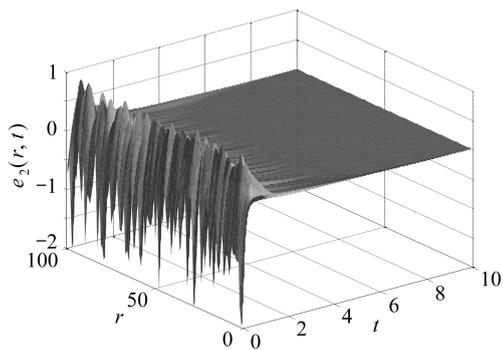
图 2 误差  $e_2(r,t)$  随时空的演化

Fig. 2 The evolution of error  $e_2(r,t)$  with time and space

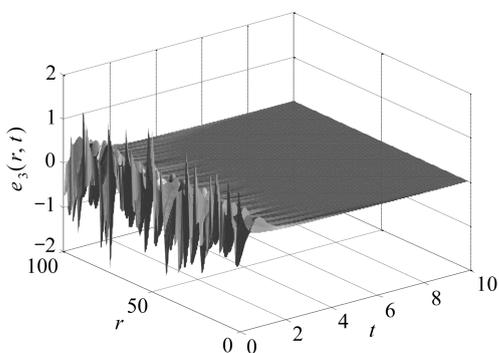
图 3 误差  $e_3(r,t)$  随时空的演化

Fig. 3 The evolution of error  $e_3(r,t)$  with time and space

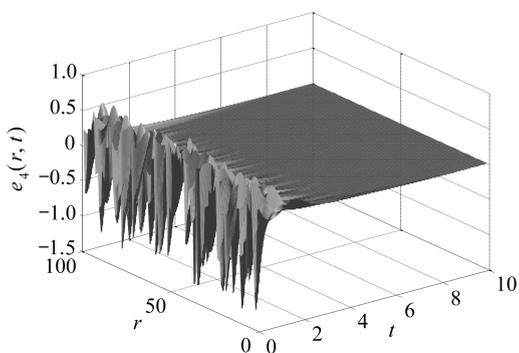
图 4 误差  $e_4(r,t)$  随时空的演化

Fig. 4 The evolution of error  $e_4(r,t)$  with time and space

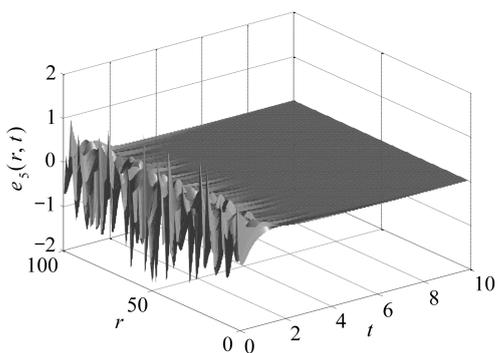
图 5 误差  $e_5(r,t)$  随时空的演化

Fig. 5 The evolution of error  $e_5(r,t)$  with time and space

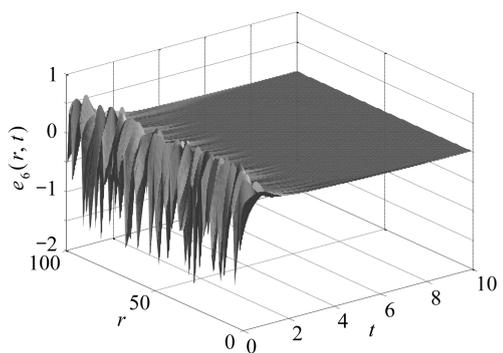
图 6 误差  $e_6(r,t)$  随时空的演化

Fig. 6 The evolution of error  $e_6(r,t)$  with time and space

仿真模拟发现,100个空间格点的自适应律随时间演化的趋势大致相似.图9、10展示的是其中任意一个格点数  $m = 30$  时响应网络待定耦合配置矩阵元  $\hat{b}_{ij}$  和反馈强度  $k_i$  的识别过程.由图可知,由于初始值选取不同,耦合配置矩阵元和反馈强度在一段时间内有明显的波动.当两

个时空网络达到同步时,待定的耦合配置矩阵元和反馈强度收敛于确定值并在之后保持持续平稳状态,说明耦合配置矩阵元和反馈强度的自适应律是有效的.此外还发现,无论可调参数  $\xi_i$ ,  $l_i$  和  $\mu$  取何值,只要这些参数满足推理得出的同步条件,便可以实现时空网络的指数外同步,并且通过调节可调参数的数值可影响误差趋于零和自适应律趋于确定值的速度.

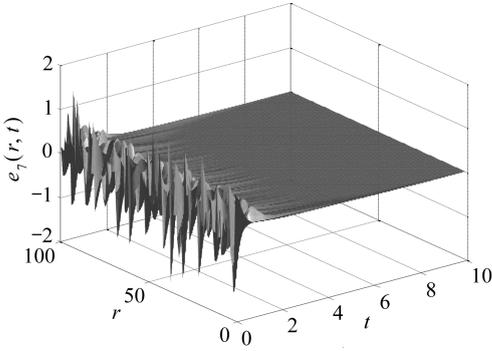


图 7 误差  $e_7(r, t)$  随时空的演化

Fig. 7 The evolution of error  $e_7(r, t)$  with time and space

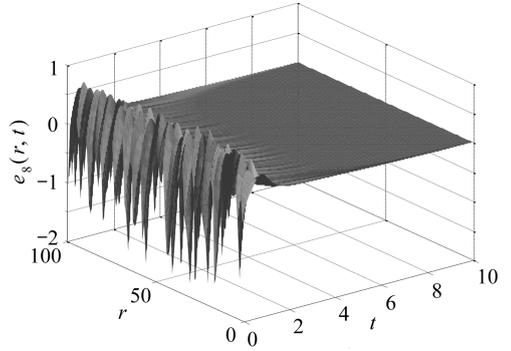


图 8 误差  $e_8(r, t)$  随时空的演化

Fig. 8 The evolution of error  $e_8(r, t)$  with time and space

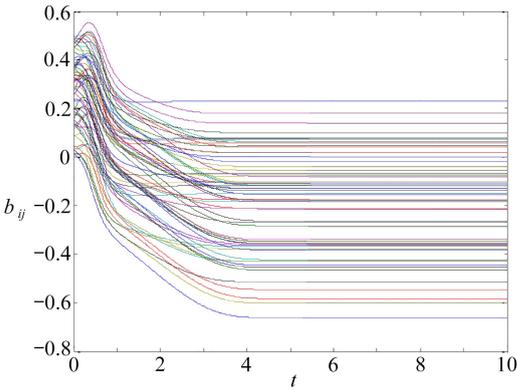


图 9 耦合矩阵元  $\hat{b}_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 8)$  的识别过程

Fig. 9 The recognition process of coupling matrix element  $\hat{b}_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 8)$

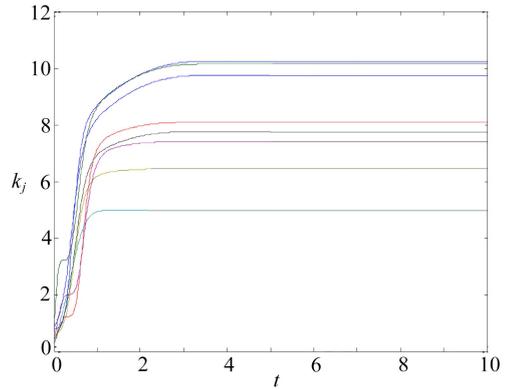


图 10 反馈强度  $k_i(i = 1, 2, \dots, 8)$  的识别过程

Fig. 10 The recognition process of feedback strength  $k_i(i = 1, 2, \dots, 8)$

### 3 结 论

本文研究了节点数不同的不确定时空网络的指数外同步问题.首先,基于 Lyapunov 稳定性定理,通过设计合理的控制器,实现了两个节点数不同的不确定时空网络的指数外同步.进一步确定了表示网络拓扑结构的耦合矩阵元和反馈强度的自适应律.最后,以一维 Burgers 系统和 Logistic 系统构成的时空网络为例进行了仿真模拟.结果表明,通过对响应网络施加自适应控制器,能够使网络的同步误差逐渐趋于零,并且一直保持稳定状态.当不确定时空网络实现同步时,待定的耦合矩阵元和反馈强度趋于确定值.此外还发现通过对可调参数的调节,可影响同步误差趋于零及待定参数趋于确定值的速度.这说明同步方案中自适应律识别有效,网络控制器具有良好的同步控制性能,节点数不同的不确定时空网络实现了指数外同步.

## 参考文献(References):

- [1] ČELIKOVSKÝ S, LYNNYK V, CHEN G. Robust synchronization of a class of chaotic networks [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(10): 2936-2948.
- [2] GAO Lixin, TONG Changfei, WANG Liyong.  $H_\infty$  dynamic output feedback consensus control for discrete-time multi-agent systems with switching topology [J]. *Arabian Journal for Science & Engineering*, 2014, **39**(2): 1477-1487.
- [3] BELYKH V N, BELYKH I V, HASLERB M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, **195**(1/2): 159-187.
- [4] BELYKH I V, BELYKH V N, HASLER M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, **195**(1/2): 188-206.
- [5] TANG Z, JU H P, LEE T H. Topology and parameters recognition of uncertain complex networks via nonidentical adaptive synchronization [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(4): 2171-2181.
- [6] WU Kaining, ZHAO Bingxin, YAO Yu. Synchronization of coupled neutral-type delay partial differential systems [J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2016, **35**(2): 443-458.
- [7] HAN Min, ZHANG Yamei. Complex function projective synchronization in drive-response complex-variable dynamical networks with coupling time delays [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(8): 1742-1758.
- [8] PECORA L M, CARROLL T L. Master stability functions for synchronized coupled systems [J]. *Physical Review Letters*, 1998, **80**(10): 2109-2112.
- [9] DHAMALA M, JIRSA V K, DING M Z. Enhancement of neural synchrony by time delay [J]. *Physical Review Letters*, 2004, **92**(7): 074104.
- [10] FRASCA M, BUSCARINO A, RIZZO A, et al. Synchronization of moving chaotic agents [J]. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(4): 044102.
- [11] PERUANI F, SIBONA G J. Dynamics and steady states in excitable mobile agent systems [J]. *Physical Review Letters*, 2008, **100**(16): 168103.
- [12] WU Xuefei. Complex projective synchronization in drive-response stochastic networks with switching topology and complex-variable systems [J]. *Advances in Difference Equations*, 2015, **2015**: 129. DOI: 10.1186/s13662-015-0468-9.
- [13] ZHOU Xianghui, ZHOU Wuneng, YANG Jun, et al. Stochastic synchronization of neural networks with multiple time-varying delays and Markovian jump [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, **352**(3): 1265-1283.
- [14] YU Wenwu, DELELLIS P, CHEN Guanrong, et al. Distributed adaptive control of synchronization in complex networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2153-2158.
- [15] BAGHERI A, OZGOLI S. Exponentially impulsive projective and lag synchronization between uncertain complex networks [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **84**(4): 2043-2055.
- [16] WANG Tianbo, ZHOU Wuneng, ZHAO Shouwei. Robust synchronization for stochastic delayed complex networks with switching topology and unmodeled dynamics via adaptive control approach [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(8): 2097-2106.
- [17] LI Chaojie, YU Wenwu, HUANG Tingwen. Impulsive synchronization schemes of stochastic

- complex networks with switching topology: average time approach [J]. *Neural Networks*, 2014, **54**(6): 85-94.
- [18] LIU Tao, HILL D J, ZHAO Jun. Incremental-dissipativity-based output synchronization of dynamical networks with switching topology[C]//*The 53rd IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC 2014)*. Los Angeles, California, 2014.
- [19] QIU Xiang, YU Li, ZHANG Dan. Stabilization of supply networks with transportation delay and switching topology[J]. *Neurocomputing*, 2015, **155**: 247-252.
- [20] LIU Jian, LIU Shutang, SPROTT J C. Adaptive complex modified hybrid function projective synchronization of different dimensional complex chaos with uncertain complex parameters [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **83**(1/2): 1109-1121.
- [21] JIN Xiaozheng, YANG Guanghong. Adaptive sliding mode fault-tolerant control for nonlinearly chaotic systems against network faults and time-delays[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(5): 1206-1220.
- [22] WANG Xiaofan, CHEN Guanrong. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. *International Journal Bifurcation and Chaos*, 2002, **12**(1): 187-192.
- [23] YANG Yongqing, CAO Jinde. Exponential synchronization of the complex dynamical networks with a coupling delay and impulsive effects [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, **11**(3): 1650-1659.
- [24] WANG Lei, CHEN M Z Q, WANG Qingguo. Bounded synchronization of a heterogeneous complex switched network[J]. *Automatica*, 2015, **56**: 19-24.
- [25] ZHANG Chunmei, LI Wenxue, WANG Ke. Graph-theoretic method on exponential synchronization of stochastic coupled networks with Markovian switching[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2015, **15**(3): 37-51.
- [26] WANG Lei, WANG Qingguo. Synchronization in complex networks with switching topology[J]. *Physics Letters A*, 2011, **375**(34): 3070-3074.
- [27] WU Xiangjun, LU Hongtao. Generalized projective synchronization between two different general complex dynamical networks with delayed coupling[J]. *Physics Letters A*, 2010, **374**(38): 3932-3941.
- [28] ALI M S, ARIK S, SARAVANAKUMAR R. Delay-dependent stability criteria of uncertain Markovian jump neural networks with discrete interval and distributed time-varying delays[J]. *Neurocomputing*, 2015, **158**(1): 167-173.
- [29] 杜利明, 赵军. 具有切换拓扑结构的非恒等节点复杂网络同步化判据[J]. *控制理论与应用*, 2013, **30**(5): 649-655. (DU Liming, ZHAO Jun. A synchronization criterion for dynamical networks with non-identical nodes and switching topology[J]. *Control Theory & Applications*, 2013, **30**(5): 649-655. (in Chinese))
- [30] WU Yongqing, LIU Li. Exponential outer synchronization between two uncertain time-varying complex networks with nonlinear coupling[J]. *Entropy*, 2015, **17**(5): 3097-3109.
- [31] 闫欢, 赵振江, 宋乾坤. 具有泄漏时滞的复值神经网络的全局同步性[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(8): 832-841. (YAN Huan, ZHAO Zhenjiang, SONG Qiankun. Global synchronization of complex-valued neural networks with leakage time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 832-841. (in Chinese))
- [32] 张玮玮, 吴然超. 基于线性控制的分数阶混沌系统的对偶投影同步[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(7): 710-717. (ZHANG Weiwei, WU Ranchao. Dual projective synchronization of fractional-order chaotic systems with a linear controller [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*,

2016, **37**(7): 710-717.(in Chinese))

- [33] 邹丽, 王振, 宗智, 等. 指数同伦法对 Cauchy 条件下变系数 Burgers 方程的解析与数值分析 [J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(7): 777-789.(ZOU Li, WANG Zhen, ZONG Zhi, et al. Analytical and numerical investigation of the variable coefficient Burgers equation under Cauchy condition with the exponential homotopy method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(7): 777-789.(in Chinese))

## A Class of Exponential Outer Synchronization Between Uncertain Spatiotemporal Networks With Different Numbers of Nodes

RONG Tingting, GAO Yan, YAN Zhe

(School of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University,  
Dalian, Liaoning 116029, P.R.China)

**Abstract:** The problem of exponential outer synchronization between uncertain spatiotemporal networks with different numbers of nodes was studied. Firstly, based on the Lyapunov stability theorem, an appropriate controller was designed to realize exponential outer synchronization between uncertain spatiotemporal networks with different numbers of nodes. The adaptive law of the coupling matrix elements representing the topological structure of the network and the feedback strength was further identified. Finally, with the spatiotemporal network composed of the 1D Burgers system and the Logistic system as an example for numerical simulation. The results show that there exist stable external synchronization phenomena in the whole network. Furthermore, the synchronization speed depends on the adjustable parameters, and the number of network nodes does not affect the stability of the whole network synchronization. The proposed synchronization scheme has certain universality.

**Key words:** exponential outer synchronization; spatiotemporal network; uncertain parameter; Lyapunov stability theorem

---

引用本文/Cite this paper:

荣婷婷, 高艳, 颜哲. 一类节点数不同的不确定时空网络的指数外同步 [J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(2): 215-225.

RONG Tingting, GAO Yan, YAN Zhe. A class of exponential outer synchronization between uncertain spatiotemporal networks with different numbers of nodes [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(2): 215-225.