

# 基于分位点的广义 Pareto 分布函数 最小二乘拟合方法\*

赵 刚, 李 刚

(大连理工大学 工程力学系;  
工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(我刊编委张亚辉推荐)

**摘要:** 广义 Pareto 分布函数(GPD, generalized Pareto distribution)是一种针对随机参数尾部进行渐进插值的方法,能够对高可靠性问题进行评估.应用该函数进行随机参数尾部近似时,需要对函数中的两个重要未知参数进行拟合确定.最常用的拟合方法是最大似然拟合和最小二乘拟合,需要将所有的尾部样本进行计算;需要大量尾部样本,计算效率低.该文提出依据少量的分位点进行最小二乘拟合,既保证了尾部样本空间足够大,同时又降低了计算成本;进一步提出了 Kriging 模型的两阶段更新,实现了分位点求解的快速收敛.算例表明,该文提出的方法能够快速提高模型精度,求得指定的分位点,而且与基于大量尾部样本的最大似然拟合结果精度一致.

**关键词:** 广义 Pareto 分布; 最小二乘拟合; 分位点; Kriging 模型

**中图分类号:** O302

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.380196

## 引 言

实际工程中一些重要承载结构的失效可能会导致大量的人员伤亡和经济损失,例如飞机主承力构件等<sup>[1-2]</sup>,这类结构的设计要达到很高的可靠性.常规的可靠度计算方法,有一次二阶矩法、二次二阶矩法、最大熵法等<sup>[3-5]</sup>,对于高可靠性问题可能会误差过大,尤其是对于非线性程度较高的功能函数,这些方法的精度可能无法满足工程需求.抽样类方法是解决高可靠性问题的一类重要方法,如重要性抽样法<sup>[6-7]</sup>、子集模拟法<sup>[8-9]</sup>、广义 Pareto 分布函数拟合法<sup>[10-11]</sup>.重要性抽样方法在低维问题中精度非常好,但是对于高维问题,精度无法满足要求<sup>[12]</sup>;子集模拟方法是基于 Monte-Carlo-Markov(蒙特卡罗-马尔可夫)链进行迭代抽样,依赖人为确定的参数较多,对参数的敏感性较高.

GPD 函数是由 Pickands 于 1975 年提出的<sup>[12]</sup>,是一种针对随机参数尾部进行渐进插值的方法,目前广泛应用于金融、保险、水文和风载等方面的研究.GPD 非常适合高可靠性问题评估.对于某些问题,例如采用解耦方法进行可靠性优化<sup>[13]</sup>,关注的不是某一点处的可靠度指标或者失效概率,而是在一定区域内的概率分布函数.对于这一类问题 GPD 函数法能够起到

\* 收稿日期: 2017-07-14; 修订日期: 2018-01-09

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2016CB046506)

作者简介: 赵刚(1987—),男,博士生(E-mail: zhaogang54@126.com);

李刚(1966—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: ligang@dlut.edu.cn).

很好的作用. GPD 函数存在两个待定参数需要通过抽样进行拟合. 在以往的研究中, 往往通过大样本集的抽样, 依据一定的策略选出适当数量的尾部样本, 再通过最大似然拟合或最小二乘拟合方法进行参数确定<sup>[11-12]</sup>. 但是这样会造成分布参数对所有尾部样本的依赖. 而根据抽样原理可知, 越是靠近尾部的样本, 其抽样的方差越大, 因此取少量尾部样本进行拟合参数的结果, 其稳定性可能会很差; 而取大量的尾部样本进行拟合, 计算效率又会很低.

因此本文提出依据分位点对 GPD 函数进行最小二乘拟合, 即在功能函数概率分布的尾部, 依据一定的概率选取若干分位点, 然后根据分位点及其对应的概率对 GPD 函数进行最小二乘拟合. 为了快速准确地得到所需分位点, 本文提出了基于 Kriging 模型两阶段更新的分位点确定方法. 最后通过数值算例, 将本文提出的方法与传统的最大似然函数法和 Monte-Carlo 法结果比较, 验证了本文方法的精度和效率.

## 1 广义 Pareto 分布函数

设  $x$  为服从某一分布的随机变量, 称  $x$  超过指定阈值  $u$  的条件概率分布  $F_u(x | x > u)$  为  $x$  的超出量分布. Pickands 指出当阈值足够大时, 一大类分布 (包括几乎所有的常见分布) 的超出量分布近似服从 GPD<sup>[12]</sup>:

$$G(x, \xi, \sigma) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\sigma}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\xi$  和  $\sigma$  为未知参数,  $\xi$  为分布的形状参数,  $\sigma$  为分布的尺度参数. 由条件概率公式可以推导出原随机变量  $x$  的累计概率密度函数如下:

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(x | x > u) + F(u). \quad (2)$$

当取足够大的  $u$  时,  $F_u(x | x > u)$  即为 GPD 函数, 联合方程 (1) 和 (2) 可以得到指定概率  $P$  对应的分位点值  $x_p$  的估计如下:

$$\hat{x}_p = F^{-1}(P) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{1 - F(P)}{1 - F(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right). \quad (3)$$

## 2 Kriging 模型的单点更新方法

Kriging 方法是以南非矿业工程师 Krige D G 名字命名的空间估计技术, 主要用于建立输入与输出之间的近似关系<sup>[14-15]</sup>, 被广泛应用于复杂工程问题中. Kriging 方法是建立在变异函数理论及结构分析基础上, 在有限区域内对区域化变量的取值进行线性无偏最优估计, 因此具有局部估计的特点, 能够对高非线性问题有较好的近似.

Balesdent 等提出了基于样本点更新的 Kriging 模型来确定分位点, 并应用于重要抽样方法迭代过程<sup>[16]</sup>. 首先通过 Latin (拉丁) 超立方方法抽取训练样本建立初始的模型, 并对样本数量为  $N$  的样本空间进行预测. 根据 Kriging 预测值和预测方差计算得到分位点的不确定样本集, 通过样本点更新的方法提高 Kriging 模型在分位点附近的精度, 减少不确定样本集中的样本数量, 直至不确定样本集中的样本数量为 0, 最终计算得到指定的分位点值.

设  $\mathbf{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  为训练样本的输入,  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为待预测的样本集, 则分位点的不确定样本集可以定义为

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{X} &= \{ \mathbf{x}_i \mid \hat{g}(\mathbf{x}_i) - k\hat{\sigma}(\mathbf{x}_i) < q < \hat{g}(\mathbf{x}_i) + k\hat{\sigma}(\mathbf{x}_i) \}, \\ \hat{\sigma}(\mathbf{x}_i)^2 &= \hat{\sigma}_\xi^2 [1 - \mathbf{r}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}_i)], \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} R(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1) & \cdots & R(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_1) & \cdots & R(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_m) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}_i) &= [R(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_1), R(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_2), \dots, R(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_m)], \end{aligned} \right. \quad (4)$$

其中,  $k$  是方差放大参数, 一般取  $k = 1.96$ ,  $q$  为根据当前 Kriging 预测结果得到的指定分位点,  $\hat{\sigma}(\mathbf{x}_i)$  为 Kriging 模型在  $\mathbf{x}_i$  处的预测方差. 根据  $\tilde{X}$  中的样本点对 Kriging 模型进行更新, 逐渐减少  $\tilde{X}$  中的样本数量, 直至样本数量为 0 停止更新, 此时得到的分位点  $q$  即被认为是要求的分位点.

Balesdent 等<sup>[16]</sup> 采用最大化参数  $L_{AN}$  (式(5)所示) 得到更新样本. 这实际上是一种单点更新的方法. 对于重要性抽样方法, 每次迭代过程中, 由于样本总数不是很多, 不确定样本集中样本数量较少, 因此更新收敛速度较快. 而 GPD 方法需要建立在一个较大的样本空间基础上, 采用单点更新 Kriging 模型计算分位点时, 优化得到训练样本的计算成本可能会远高于获得真实训练样本的计算过程, 甚至会出现不收敛的情况.

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \max_{\mathbf{x}} (L_{AN}(\mathbf{x}, \tilde{X})) = \\ &\arg \max_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{i=1}^h [\hat{\sigma}(\tilde{X}_i) - \hat{\sigma}(\tilde{X}_i, \mathbf{x})] \right\}, \\ \hat{\sigma}(\tilde{X}_i, \mathbf{x})^2 &= \hat{\sigma}_\xi^2 [1 - \mathbf{r}^T(\tilde{X}_i, \mathbf{x}) \mathbf{R}'^{-1} \mathbf{r}(\tilde{X}_i, \mathbf{x})], \\ \mathbf{R}' &= \begin{bmatrix} R(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1) & \cdots & R(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_m) & R(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_1) & \cdots & R(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_m) & R(\mathbf{z}_m, \mathbf{x}) \\ R(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1) & \cdots & R(\mathbf{x}, \mathbf{z}_m) & R(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}(\tilde{X}_i, \mathbf{x}) &= [\mathbf{r}(\tilde{X}_i), \text{corr}(\tilde{X}_i, \mathbf{x})]. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

### 3 Kriging 模型的多点更新方法

为了解决上述 Kriging 模型单点更新的局限性, 使不确定样本集中的样本数量迅速减少, 本文提出了 Kriging 模型的多点更新方法. 首先根据 Kriging 预测结果, 在不确定样本集中均匀选取一定数量的样本点加入到训练样本集中更新 Kriging 模型, 使得不确定样本集中的样本快速减少. 当这一数量减少到某一指定值时, 再采用单点更新方法继续更新 Kriging 模型直至不确定样本集中的样本数量为 0. 这种方法可以实现不确定样本集的样本数量迅速降低, 实现分位点求解的快速收敛. 单点更新方法之前已经介绍, 此处不再赘述, 多点更新方法具体流程如下:

- 1) 采用 Latin 超立方的方法抽取训练样本初步建立 Kriging 模型;
- 2) 利用 Kriging 模型对样本空间  $\mathbf{X}$  进行预测, 并计算得到不确定样本集  $\tilde{X}$ ;
- 3) 根据 Kriging 模型在  $\tilde{X}$  上的预测结果均匀地抽取  $m$  个样本加入训练样本集, 更新 Kriging 模型;
- 4) 判断  $\tilde{X}$  中的样本个数是否小于指定的数量  $l_0$ , 如果小于  $l_0$  则进入下一阶段的更新, 如

果大于  $l_0$  则回到步骤 2)。

当  $\tilde{X}$  中的样本个数小于指定的数量  $l_0$  时,如果仍然采用多点更新方法,将会导致计算成本激增.原因是此时  $\tilde{X}$  中的样本个数减少效率不高,迭代次数增加.因此需要采用单点更新的方法更新 Kriging 模型直至  $\tilde{X}$  中的样本数量为 0,最终得到分位点。

#### 4 基于分位点的 GPD 函数最小二乘拟合

GPD 函数的两个重要未知参数是根据尾部样本,利用最大似然拟合或最小二乘拟合得到的.传统的最小二乘拟合方法是通过随机抽样并对样本进行排序得到尾部样本,再利用经验概率公式(式(6))计算每个尾部样本对应的概率<sup>[10-11]</sup>,最终根据 GPD 函数形式对尾部样本值及其对应的概率值进行拟合得到未知参数。

$$P_i = \frac{i}{N + 1}, \quad (6)$$

其中  $N$  为样本总数量, $i$  为样本按大小排序的序号, $P_i$  为第  $i$  个样本对应的经验概率。

最大似然拟合与最小二乘拟合类似,但是不需要经验概率公式,直接针对尾部样本进行拟合得到未知参数.以上两种方法都需要获取所有的尾部样本点,而为使 GPD 函数具有较高的近似精度就需要大量的尾部样本,导致计算效率降低.如何减少尾部样本数量,同时又能保障 GPD 近似的精度?

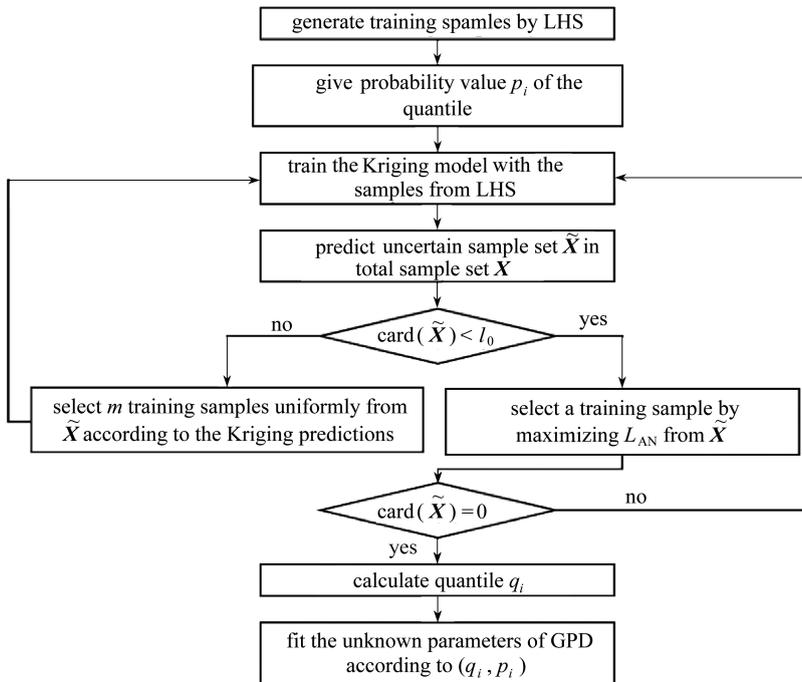


图 1 基于分位点最小二乘拟合 GPD 方法流程图

Fig. 1 The flowchart of least-squares fitting based on the quantiles

根据最小二乘拟合方法的原理可知,拟合过程中可以不需要所有的尾部样本,只需根据功能函数尾部样本对应的经验概率值,均匀抽取一定数量的分位点,再对 GPD 未知参数进行最小二乘拟合确定.对比传统的最小二乘拟合方法,本方法采用少量分布均匀的尾部分位点代替

所有尾部样本,能够保障 GPD 拟合的尾部样本空间足够大,提高了 GPD 拟合精度和稳定性,而且本方法不需要对所有的尾部样本进行计算,大大节约了计算量.分位点可以通过更新 Kriging 模型方法进行计算.方法流程如图 1 所示.

### 5 数值算例分析

本文采用函数(式(7))作为测试方法的功能函数<sup>[17]</sup>,其随机变量的分布参数如表 1 所示.

$$G(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6 + 0.001 \sum_{i=1}^6 \sin(100x_i). \tag{7}$$

表 1 随机变量分布参数

Table 1 The distribution parameters of the random variables

random variable	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
distribution	normal(120,12)	normal(120,12)	normal(120,12)	normal(120,12)	normal(50,15)	normal(40,12)

#### 5.1 更新 Kriging 模型得到的分位点精度检验

为了验证更新 Kriging 模型得到的分位点精度,这里在数量为  $5 \times 10^5$  的样本空间中分别采用更新 Kriging 模型方法和直接抽样(DS)方法选取各个分位点,分位点概率值分别为 0.990 0, 0.992 0, 0.994 0, 0.996 0, 0.996 0, 0.999 9.由于直接抽样方法是根据样本空间中所有样本的真实值得到的分位点,因此可以将直接抽样得到的分位点结果作为本方法结果的验证.在 Kriging 模型更新过程中,多点更新和单点更新的分界确定值  $l_0$  取 50,多点更新过程中更新样本点数量  $m$  取 10.这两种计算分位点的方法分别执行 100 次,最终得到各个分位点的均值和方差如表 2 所示.Kriging 模型得到的分位点结果与直接抽样得到的结果无论在均值还是标准差上都非常接近.这说明采用更新 Kriging 模型计算分位点具有很高的精度.在 100 次分析中更新 Kriging 模型平均需要调用原始功能函数 169 次(包含 Latin 超立方方法抽取的 60 个初始训练样本)便可以计算出 6 个分位点值.因此本方法兼具较高的计算效率.

表 2 通过更新 Kriging 模型和直接抽样得到的分位点结果比较

Table 2 The quantiles obtained with the direct sampling method and the updating Kriging method

probability $p$	0.990 0	0.992 0	0.994 0	0.996 0	0.996 0	0.999 9
$Q$ (Kriging)	$5.104 5 \times 10^2$	$5.188 6 \times 10^2$	$5.293 4 \times 10^2$	$5.434 5 \times 10^2$	$5.662 2 \times 10^2$	$6.549 9 \times 10^2$
$Q$ (DS)	$5.102 5 \times 10^2$	$5.186 5 \times 10^2$	$5.292 2 \times 10^2$	$5.434 1 \times 10^2$	$5.658 7 \times 10^2$	$6.532 6 \times 10^2$
$\sigma$ (Kriging)	0.413 2	0.484 6	0.518 0	0.737 9	1.154 5	3.883 2
$\sigma$ (DS)	0.550 1	0.594 6	0.616 2	0.758 5	0.862 0	3.674 4

采用更新 Kriging 模型选取分位点的迭代收敛过程如图 2 所示.在确定第一个分位点的过程中,由于初始 Kriging 模型在第一个分位点处的精度不高,因此初始的不确定样本集中样本数量为 6 754,经过第一次多点更新,不确定样本数量降到 1 117,经过 5 次多点更新,不确定样本数量降到 36.这说明多点更新方法能够使分位点的不确定样本数量迅速降低,大大提高了算法的收敛速度.当不确定样本数量接近  $l_0$  时,多点更新方法的收敛效率降低,因此需要进行单点更新,最终得到分位点值.在确定所有分位点的过程中,只有第一个分位点需要进行多点更新.这是因为在确定第一个分位点的过程中,多点更新方法加强了 Kriging 模型在整个尾部上的精度,因此在确定其他分位点时,初始不确定样本数量小于  $l_0$ ,直接进行单点更新.

#### 5.2 基于分位点的 GPD 函数最小二乘拟合

为了验证基于分位点的 GPD 函数最小二乘拟合方法的精度,这里将基于分位点的 GPD 函数最小二乘拟合方法与最大似然拟合法进行比较,并采用  $10^7$  次 Monte-Carlo 结果进行验证.

在区间 $[0.99, 0.999\ 9]$ 上分别均匀取 3, 4, 5, 6 个概率值, 采用更新 Kriging 模型方法在样本总数量为  $5 \times 10^5$  的样本空间中确定每个概率对应的分位点值进行 GPD 函数的最小二乘拟合, 然后通过拟合得到的 GPD 函数对可靠指标为 4.0 处的分位点值进行估计. 对于最大似然法, 这里同样在样本总数量为  $5 \times 10^5$  的样本空间中选取  $5 \times 10^5 \times 1\% = 5\ 000$  个样本作为尾部样本进行拟合. 两种方法分别进行 100 次得到尾部分布.

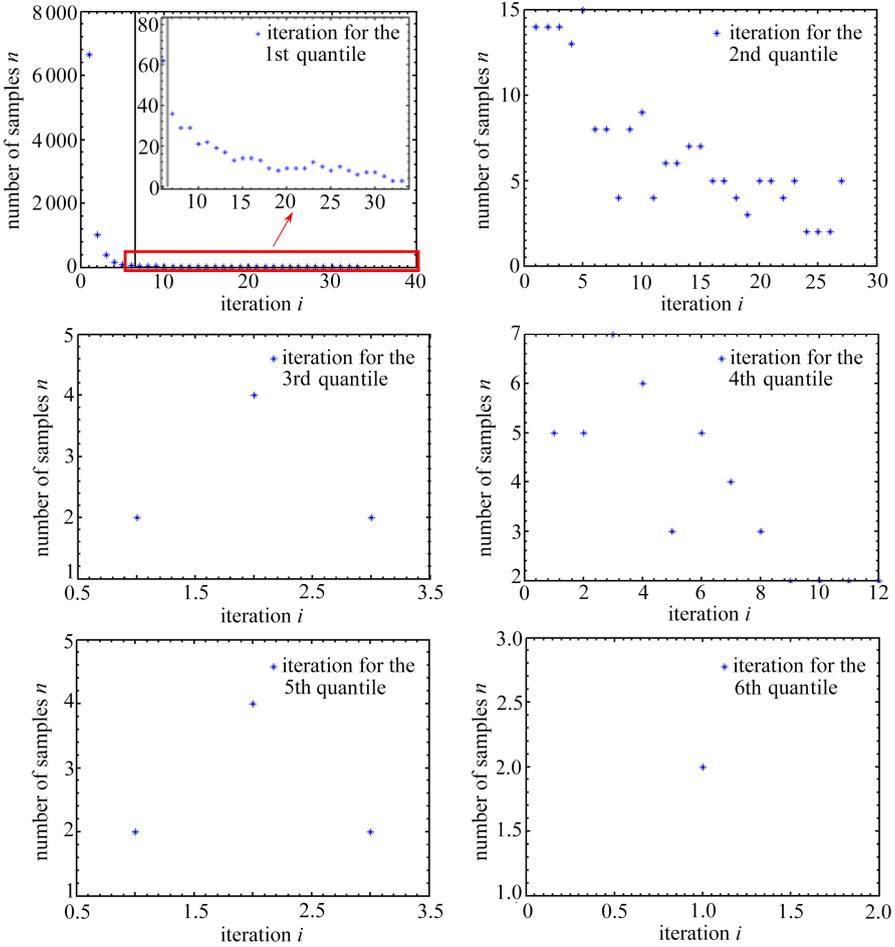


图 2 可能分位点数量收敛情况

Fig. 2 The convergence of the number of uncertain points

如图 3 和表 3 所示, 不同数量分位点结果与 Monte-Carlo 结果都非常接近, 而且分位点的数量对最终的 GPD 结果影响不大. 当取 3 个分位点时, 需要的原始函数调用次数为  $95 + 60 = 155$  (60 为 LHS 计算训练样本调用次数), 取 6 个分位点时, 为  $109 + 60 = 169$ , 仅仅增加了 14 次函数调用, 说明即使采用多个分位点进行最小二乘拟合, 计算成本增加很少, 因此对于需要多个分位点的问题, 本方法依然适用. 将 3 个分位点结果与最大似然法结果进行比较, 如图 4 和表 3 所示, 拟合结果非常接近, 得到的可靠指标 4.0 处的分位点分别为  $6.810\ 2 \times 10^2$  和  $6.813\ 9 \times 10^2$ , 与 Monte-Carlo 结果相比, 两者的相对误差  $\varepsilon$  分别为 0.48% 和 0.43%, 预测结果的标准差分别为 5.490 9, 4.108 6. 在计算成本上, 3 分位点拟合只需要 155 次原始函数调用, 而最大似然拟合至少需要调用原始函数 5 000 次.

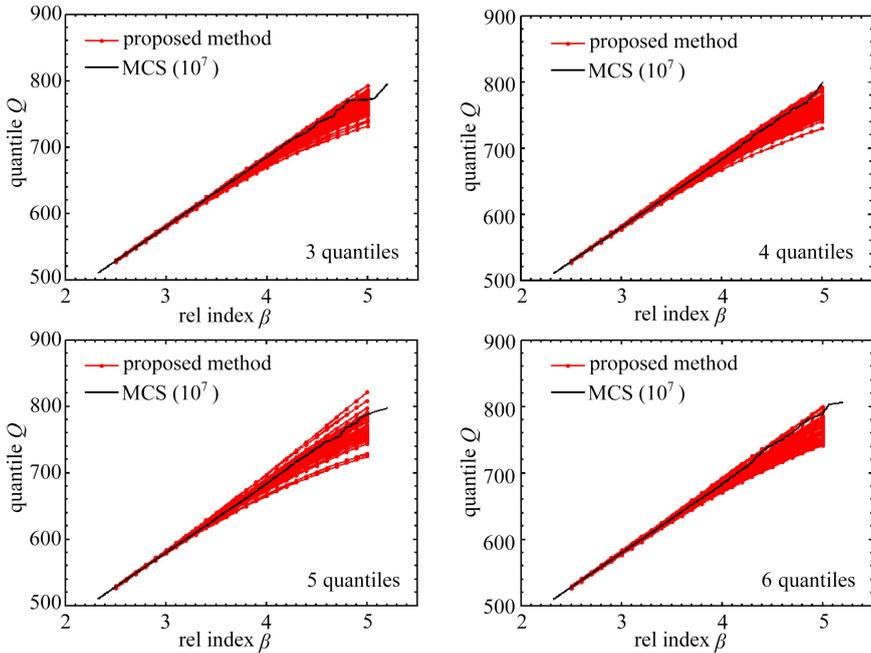


图 3 不同数量分位点拟合结果对比

Fig. 3 The comparison with the proposed method between different numbers of quantiles

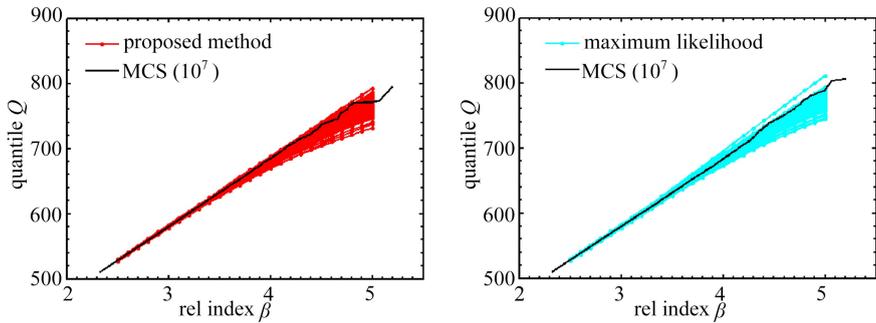


图 4 三分位点拟合结果与最大似然拟合结果的比较

Fig. 4 The comparison between the proposed method based on 3 quantiles and the maximum likelihood method

表 3 不同数量分位点拟合结果与最大似然法、Monte-Carlo 法结果比较

Table 3 The comparison among the proposed method, the maximum likelihood method and the MCS method

$N_Q$	$E(Q)$	relative error $\varepsilon / \%$	$\sigma(Q)$	feval $m$
3	681.02	0.48	5.490 9	95+60
4	681.21	0.46	5.600 1	101+60
5	681.22	0.46	5.630 6	103+60
6	681.25	0.45	5.593 1	109+60
maximum likelihood	681.39	0.43	4.108 6	>5 000
MCS	684.34	-	-	$10^7$

## 6 结 论

本文针对 GPD 函数拟合的特点,提出了基于分位点的 GPD 函数最小二乘拟合方法,并结

合前人的研究,提出了 Kriging 模型的两阶段更新方法,以高效准确确定指定的分位点值.与传统的最大似然法结果和 Monte-Carlo 结果进行比较,基于分位点拟合的 GPD 函数结果与基于大量尾部样本的最大似然法结果非常接近,因此在 GPD 未知参数拟合上,少量的分位点可以代替较大的尾部样本空间,在保证精度同时,大大提高计算效率.

### 参考文献(References):

- [1] 赵劲彪, 郑香伟, 冯蕴雯, 等. 飞机起落架应急放机构可靠性分析[J]. 机械设计与制造, 2014, **8**: 31-33. (ZHAO Jinbiao, ZHENG Xiangwei, FENG Yunwen, et al. Reliability analysis of landing gear mechanism during emergency extending [J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2014, **8**: 31-33. (in Chinese))
- [2] 武晓全, 薛军. 民机结构疲劳损伤可靠性分析[J]. 装备制造技术, 2014, **10**: 201-203. (WU Xiaquan, XUE Jun. Structural reliability analysis of fatigue damage of civil aircraft [J]. *Equipment Manufacturing Technology*, 2014, **10**: 201-203. (in Chinese))
- [3] YOO D, LEE I, CHO H. Probabilistic sensitivity analysis for novel second-order reliability method(SORM) using generalized chi-squared distribution [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, **50**(5): 787-797.
- [4] LI Gang, ZHANG Kai. A combined reliability analysis approach with dimension reduction method and maximum entropy method [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **43**(1): 121-134.
- [5] EZZATI G, MAMMADOV M, KULKARNI S. A new reliability analysis method based on the conjugate gradient direction [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, **51**(1): 89-98.
- [6] MARTINO L, ELVIRA V, LUENGO D, et al. Layered adaptive importance sampling [J]. *Statistics and Computing*, 2017, **27**(3): 599-623.
- [7] FAN Haijian, LIANG R. Importance sampling based algorithm for efficient reliability analysis of axially loaded piles [J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, **65**: 278-284.
- [8] DUBOURG V, SUDRET B, BOURINET J-M. Reliability-based design optimization using Kriging surrogates and subset simulation [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **44**(5): 673-690.
- [9] LI Hongshuang, MA Yuanzhuo, CAO Zijun. A generalized subset simulation approach for estimating small failure probabilities of multiple stochastic responses [J]. *Computers & Structures*, 2015, **153**: 239-251.
- [10] RAMU P, KIM N H, HAFTKA R T. Multiple tail median approach for high reliability estimation [J]. *Structural Safety*, 2010, **32**(2): 124-137.
- [11] TANG Zhangchun, LU Zhenzhou, PAN Wang, et al. A mean extrapolation technique for high reliability analysis [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **222**: 82-93.
- [12] PICKANDS J. Statistical-inference using extreme order statistics [J]. *The Annals of Statistics*, 1975, **3**(1): 119-131.
- [13] TORII A J, LOPEZ R H, MIGUEL L F F. A general RBDO decoupling approach for different reliability analysis methods [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **54**(2): 317-332.
- [14] JEONG S, MURAYAMA M, YAMAMOTO K. Efficient optimization design method using Kriging model [J]. *Journal of Aircraft*, 2005, **42**(2): 413-420.

- [15] 谢延敏, 于沪平, 陈军, 等. 基于 Kriging 模型的可靠度计算[J]. 上海交通大学学报, 2007, **41**(2): 177-180. (XIE Yanmin, YU Huping, CHEN Jun, et al. The reliability estimation based on Kriging model[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2007, **41**(2): 177-180. (in Chinese))
- [16] BALESDENT M, MORIO J, MARZAT J. Kriging-based adaptive importance sampling algorithms for rare event estimation[J]. *Structural Safety*, 2013, **44**: 1-10.
- [17] SANTOS S R, MATIOLI L C, BECK A T. New optimization algorithms for structural reliability analysis[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2012, **83**(1): 23-55.

## A Least-Squares Fitting Method for Generalized Pareto Distributions Based on Quantiles

ZHAO Gang, LI Gang

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment  
(Dalian University of Technology);

Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Recommended by ZHANG Yahui, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The generalized Pareto distribution (GPD) is a classical asymptotically motivated model for excesses above a high threshold based on the extreme value theory, which is useful for the high reliability index estimation. In the GPD there are 2 unknown parameters which could be estimated with the least-squares fitting method and the maximum likelihood method. Both methods need all the tail samples of a distribution in previous studies. However, for the GPD estimation, the better accuracy would lead to a much higher computational cost. So a least-squares fitting method based on the quantiles was proposed to obtain the unknown parameters in the GPD. The 2-stage-updating method for the Kriging model was also given to calculate the quantiles. Compared with the GPD based on the maximum likelihood method and the Monte-Carlo method, the 2-stage-updating method for the Kriging model helps find the specified quantiles accurately and efficiently, and the least-squares fitting method based on the quantiles also performs well.

**Key words:** generalized Pareto distribution; least-squares fitting method; quantile; Kriging model

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China (973 Program) (2016CB046506)

---

引用本文/Cite this paper:

赵刚, 李刚. 基于分位点的广义 Pareto 分布函数最小二乘拟合方法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 415-423.

ZHAO Gang, LI Gang. A least-squares fitting method for generalized Pareto distributions based on quantiles[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 415-423.