

一类时滞 Solow 模型的动态周期波动分析*

李俊瑞, 张艳霞

(西安财经学院 西安统计研究院, 西安 710100)

(本刊编委邓子辰推荐)

摘要: 考虑到资本生产投资和污染治理投资的时滞性,为分析其对经济环境系统动态演化的影响机理,基于经典的 Solow 模型,引入环境净化和两个投资时滞参数,首次提出了带有环境净化的双时滞 Solow 模型,并分析了该模型的动态周期波动行为.结果表明:无论单个投资时滞还是两个投资时滞,均能诱发经济周期的产生;时滞越大,经济周期波动越强烈;通过调整投资决策可达到预期均衡目标,实现经济环境系统的周期稳定运行.

关键词: Solow 模型; 时滞; 经济周期; Hopf 分岔; 极限环

中图分类号: O211.63

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380184

引 言

经济增长一直是宏观经济研究的热点问题.然而,伴随着经济的快速增长,环境遭到污染甚至恶化,已严重威胁到人类社会的发展.鉴于此,本文基于经典的 Solow 经济增长模型,将环境因素引入到该模型中,同时考虑到经济环境系统中的资本生产投资和污染治理投资所产生的效果具有一定的时间滞后性,建立了新的带有环境净化的双时滞 Solow 模型,并通过对模型的动力学分析,揭示了两个投资时滞参数对经济-环境系统动态演化的影响机理,为政府宏观监控经济环境系统的运行提供了一定的理论依据.

Solow 模型是发展经济学中著名的经济增长模型之一,常被用来刻画单一的经济系统.如 Karras^[1]、Guerrini^[2]和 Stamova 等^[3]从人口增长、技术进步和劳动力变化率等角度研究 Solow 模型;熊俊^[4]从 Solow 模型的假设条件出发,将其扩展为一个适用性较强的经济增长因素分析模型.为研究环境因素对经济系统的影响,已有不少学者尝试将环境净化引入到 Solow 模型中,用以刻画复杂的经济环境系统.带有环境净化的 Solow 模型最早由 Brock 等^[5]提出,他们发现环境 Kuznets(库兹涅茨)曲线(EKC)和 Solow 模型密切相关,通过引入环境系统变量,对 Solow 模型作了改进优化,并称之为“Green Solow”;在此研究的基础上,魏立桥等^[6]基于 Solow 模型研究了带有环境污染的经济增长模型,得出环境污染和人均收入水平之间存在着 EKC 所描述的倒 U 型关系;Antoci 等^[7]基于 Solow 模型研究发现人口数量的减少有助于经济增长和环境净化.以上文献研究对象均是确定性 Solow 模型,考虑到经济环境系统中含有大量的随机因素,一些学者对随机 Solow 模型开展了研究和探索;如 Cellini^[8]和 Lei 等^[9]采用引入服从

* 收稿日期: 2017-06-28; 修订日期: 2018-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(11572231); 陕西省教育厅专项科研项目(16JK1301)

作者简介: 李俊瑞(1973—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: jiaoruli@xaufe.edu.cn);

张艳霞(1988—),女,硕士生(E-mail: zhangyanxia1314@126.com).

Brown(布朗)运动的随机噪声干扰的方法,从不同角度研究了随机 Solow 模型的渐进稳定性性质;李佼瑞等^[10]以全局动态分析的角度引入两个随机参数,即环境净化能力和劳动力的相对变化率,建立了带有环境净化的双随机 Solow 模型,研究得出经济系统与环境系统协调发展的渐近稳定性条件。

考虑到经济因素的时滞效应,毕志伟等^[11]基于传统的 Solow 模型,研究了一个带时滞的多资本投入的经济增长模型,但仅仅刻画了单一的经济系统,而未涉及到环境系统的研究。事实上,在经济和环境复杂系统活动中,资本生产投资和污染治理投资是重要的研究变量,从投资决策到决策效果实现存在着客观的时滞性。对于带有时滞的非线性系统的动态演化规律,不少学者^[12-15]采用分岔理论探索了系统的稳定性和周期存在性。

基于以上的分析,本文首次提出了带有环境净化的双时滞 Solow 模型:引入资本生产投资时滞和污染治理投资时滞,并考虑环境系统和经济系统的相互影响,以时滞为分岔参数,采用非线性动力学方法,研究系统的动态周期波动行为。研究表明:无论单个投资时滞的情况,还是两个投资时滞的情况,均能诱发经济周期的产生,投资时滞越大,则经济周期波动越强烈;最后通过调整投资决策可达到预期均衡目标,实现经济环境系统的周期稳定运行。

1 带有环境净化的双时滞 Solow 模型

基于经典的 Solow 模型,引入环境净化,将单一的经济系统与环境系统融合为一体,构成完整的经济环境系统,改进为带有环境净化的 Solow 模型,如图 1。

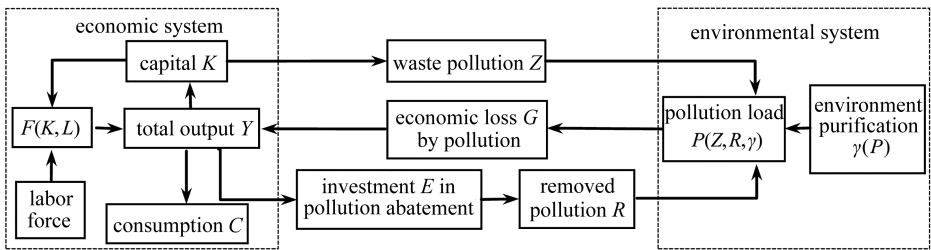


图 1 带有环境净化的 Solow 模型

Fig. 1 The Solow model with environmental purification

图 1 显示,经济环境系统由经济系统和环境系统构成,两个子系统通过物质和能量交换循环运行。经济环境系统中存在两个反馈回路:1)在资本生产中,经济系统产生的污染物输入到环境系统,环境污染物存量增加,而环境系统中污染物的积累反之对经济系统造成经济损失,抑制经济的发展;2)环境系统造成严重的经济损失,刺激经济系统投入污染治理投资,减少环境系统中的污染物存量,从而减少由环境系统引起的经济损失。

在经过改进的带有环境净化的 Solow 模型中,主要研究经济系统生产资本 $K(t)$ 和环境系统污染物存量 $P(t)$ 随时间 t 的演化规律。为简单记,省略 t ,即将 $K(t)$ 简记为 K , $P(t)$ 简记为 P ,其他变量同此记法。在经济系统中,假定经济总产量 Y 主要用于生产资本 K 、污染治理投资 E 和消费 C ,并假设污染治理投资 E 去除掉的污染量为 R ,环境污染对经济系统造成的经济损失为 G ;在环境系统中,环境污染物存量 P 主要取决于资本生产排放的废弃物污染量 Z 、污染治理去除的污染量 R 和环境净化掉的污染量 γ 。

所以,资本量 K 的变化包括投资量 sY 的增加、污染造成的经济损失 G 和固定资产的损耗;污染物存量 P 的变化包括 Z 的输入量、 R 的减少量和 γ 的净化量,从而得到经过改进的带有环境净化的 Solow 模型:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = sY - G(Y, P) - \theta K, \\ \frac{dP}{dt} = Z(Y) - R(Z, E) - \gamma(P), \end{cases} \quad (1)$$

其中 s 表示投资率, $0 \leq s \leq 1$, θ 表示生产资本的损耗率, $0 < \theta < 1$.

在复杂的经济环境系统中,考虑到资本生产投资和污染治理投资在投资时不能立即获得收益,需经过一段时间间隔后,才能获得经济效益,即资本生产投资、污染治理投资与产生的经济效益之间存在着时滞.为深入研究带有环境净化的 Solow 模型经济周期波动的非线性行为,引入两个时滞参数:资本生产投资时滞和污染治理投资时滞,建立新的带有环境净化的双时滞 Solow 模型,描述投资的时滞性对经济周期波动行为的影响,并刻画投资时滞下,非线性经济环境系统的动态演化规律.引入资本生产投资时滞 τ_1 和污染治理投资时滞 τ_2 , 则带有环境净化的双时滞 Solow 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = sY(t - \tau_1) - G(Y, P) - \theta K, \\ \frac{dP}{dt} = Z(Y(t - \tau_1)) - R(Z, E(t - \tau_2)) - \gamma(P). \end{cases} \quad (2)$$

2 双时滞 Solow 模型中的函数分析

生产函数 $F(K, L)$ 主要刻画一定时期内,在技术水平不变的情况下,生产要素 K, L 的投入量与经济总产量 Y 之间的关系,文献中通常采用 Cobb-Douglas 生产函数形式^[9]:

$$Y = F(K, L) = AK^\beta L^{1-\beta}, \quad (3)$$

其中 A 表示综合技术进步水平, β 为参数, $0 < \beta < 1$, L 是生产中劳动力的投入,为计算方便,这里假设劳动力数量 L 为 1.

函数 $Z(Y)$ 用以描述废弃物污染量 Z 与经济总产量 Y 之间的关系.根据 EKC 理论^[16], Z 与 Y 呈倒 U 型,假定函数形式如下:

$$Z(Y) = \varepsilon Y e^{-\lambda Y}, \quad (4)$$

其中 ε, λ 为参数,则污染强度为 $Z/Y = \varepsilon e^{-\lambda Y}$.假设参数 $\varepsilon = 15.25, \lambda = 0.2$, 利用 MATLAB 软件数值模拟,得到函数 $Z(Y)$ 的走势图和污染强度的变化图,如图 2.由图 2(a)可知,在起始阶段,经济的高速发展产生大量的污染排放, Z 随着 Y 的增加而增加;当 Y 达到一定程度后,由于经济结构模式的优化和清洁环境技术的提高,随 Y 的增加, Z 增加的速度变缓,直至为 0, Z 值达到最高点;之后, Z 随着 Y 的增加而逐渐下降,主要是由于总产量 Y 的增加带来经济结构模式的优化和清洁环境技术的提高.由图 2(b)可知,污染强度随总产量的增加而呈指数式下降趋势.

环境净化函数 $\gamma(P)$ 用以描述环境净化能力与环境污染物存量之间的关系,表示污染的自然净化量,具有较强的非线性特征.当污染物存量处于较低状态时,环境系统的自我净化能力较强;当污染物存量达到一定的上限 P_a 后,环境的自我净化能力逐渐减弱.这种特征用 Hill 函数^[17]进行刻画:

$$\gamma(P) = \delta P P_a^q / (P^q + P_a^q), \quad (5)$$

其中 δ, q, P_a 为参数,且 $q > 1$.假设参数 $\delta = 0.5, P_a = 100, q = 1.6$, 利用 MATLAB 软件数值模拟,得到函数 $\gamma(P)$ 的走势图,如图 3.如果 $P \ll P_a$, 则 $\gamma(P) \approx \delta P$, 即近似为线性函数;如果 $P = P_a$, 则 $\gamma(P) = \delta P_a / 2$, 即可净化掉 $\delta P_a / 2$ 的污染物;如果 $P \gg P_a$, 则 $\gamma(P) \approx 0$, 即失去环境净

化能力。

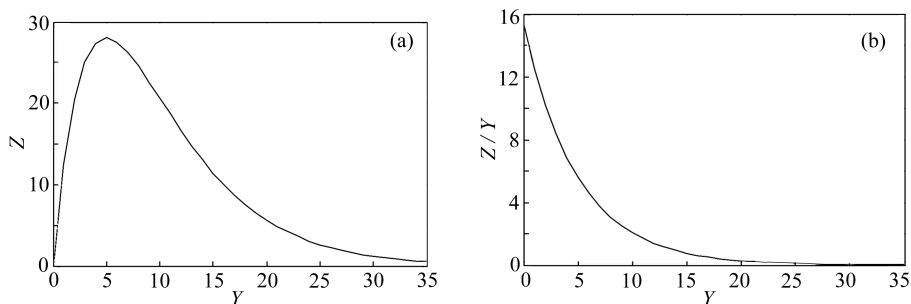


图2 函数 $Z(Y)$ 的走势图和污染强度的变化图

Fig. 2 The trend diagram of function $Z(Y)$ and the pollution intensity variation diagram

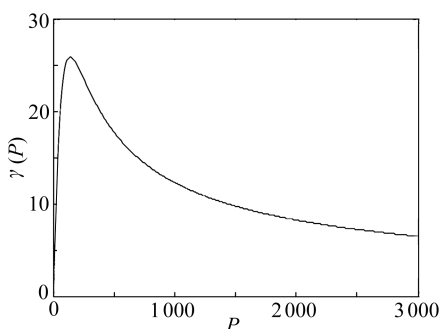


图3 环境净化函数的走势图

Fig. 3 The trend diagram of the environment purification function

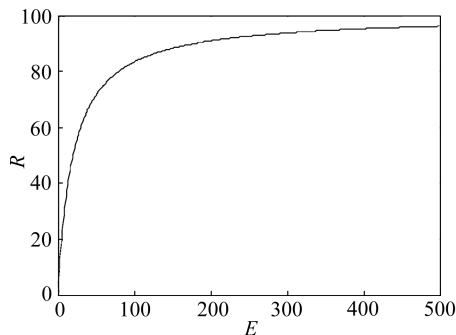


图4 污染治理函数的走势图

Fig. 4 The trend diagram of the pollution control function

污染经济损失函数 $G(Y, P)$ 用以描述环境污染物存量与污染造成的经济损失之间的关系。污染经济损失 G 与环境净化能力的强弱有相关关系, 假设其正比于非线性环境净化能力与线性净化能力的差值^[17], 则其函数形式可表示为

$$G(Y, P) = lYP^{q+1}/(P^q + P_a^q), \quad (6)$$

其中 l 为参数。

污染治理投资 E 与污染造成的经济损失 G 有直接响应关系, 经济损失越大, 则响应的污染治理投资越大, 二者呈正相关关系, 假定关系式为

$$E = iG, \quad (7)$$

其中 i 是参数, $i > 0$, 表示污染治理投资的响应程度。这里的参数 i 综合各种经济、环境和政策因素, 参数 i 的大小体现了经济系统对经济损失的响应程度, i 值越大, 表明污染治理投资越大。

污染治理函数 $R(Z, E)$ 用以描述去除的污染量 R 与污染治理投资 E 、废弃物污染量 Z 之间的关系。污染治理投资 E 越大, 则去除掉的废弃物污染量 Z 越多。则可假定其函数形式^[17]为

$$R(Z, E) = ZE/(E + \omega Z), \quad (8)$$

其中 ω 为参数。如果 $E \ll \omega Z$, 则 $R \approx E/\omega$, 即近似为线性函数; 如果 $E = \omega Z$, 则 $R = Z/2$, 表示可去除掉一半的废弃物污染物; 如果 $E \gg \omega Z$, 则 $R \approx Z$, 表示可去除掉几乎所有的废弃物污染物。假设参数 $Z = 100, \omega = 0.2$, 利用 MATLAB 软件数值模拟, 得到污染治理函数 $R(Z, E)$ 的走势, 如图 4。由图可知, 污染治理投资的边际效应随 E 的增大而逐渐减弱, 并且增加污染治理投资意味着资本生产的投资减少。所以, 污染治理投资并非越大越好, 适度的污染治理投资可

以促进经济的发展,但过度的污染治理投资会减少生产资本的投资,从而抑制经济的发展。

结合以上函数,带有环境净化的双时滞 Solow 模型(2)可表示为

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = sAK^\beta(t - \tau_1)L^{1-\beta} - G(Y, P) - \theta K, \\ \frac{dP}{dt} = \varepsilon AK^\beta(t - \tau_1)L^{1-\beta}e^{-\lambda Y} - \\ Z(Y)ilYP^{q+1}(t - \tau_2)/(P^q + P_a^q)/(iG + \omega Z) - \gamma(P). \end{cases} \quad (9)$$

3 双时滞 Solow 模型的动态周期波动

本节主要从无投资时滞、单个投资时滞、两个投资时滞 3 个不同角度来研究带有环境净化的双时滞 Solow 模型(9)的经济周期波动行为,运用分岔理论,以资本生产投资时滞和污染治理投资时滞为分岔参数,利用 MATLAB 软件数值仿真,绘制相图和时间序列图,采用非线性动力学的方法深入研究投资的时滞性对经济环境系统的影响机理。

对于一类时滞的非线性系统的研究,有如下命题:

(a) 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时,时滞模型在平衡点 M 处渐进稳定, τ_0 越大,滞后性越强。

(b) 当 $\tau = \tau_0$ 时,时滞模型在平衡点 M 处发生 Hopf 分岔。

(c) 当 $\tau > \tau_0$ 时,时滞模型在平衡点 M 处是不稳定的,出现极限环现象, τ_0 越大,极限环越大。

3.1 无投资时滞时 ($\tau_1 = 0, \tau_2 = 0$)

为力求贴合实际,这里基本参数的设定取自相关研究文献^[17]。设定参数 $A = 0.333, \beta = 0.6, L = 1, s = 0.3, l = 0.0015, \theta = 0.01, P_a = 100, \lambda = 0.2, \delta = 0.5, q = 1.6, \varepsilon = 15.25, \omega = 0.2, i = 0.34$, 并假定模型(9)的均衡点为 $M(K^*, P^*)$, 设初值 $K(0) = 3, P(0) = 0.2$ 。利用 MATLAB 软件数值仿真,得到无投资时滞时模型(9)的相图和时间序列图,如图 5。当时滞参数均为 0 时,系统的轨线随时间的演化逐渐螺旋缩小趋于平衡点,状态变量 K 和 P 的波动随时间的演化逐渐减弱,最终趋于稳定,所以模型在平衡点 M 处渐进稳定。

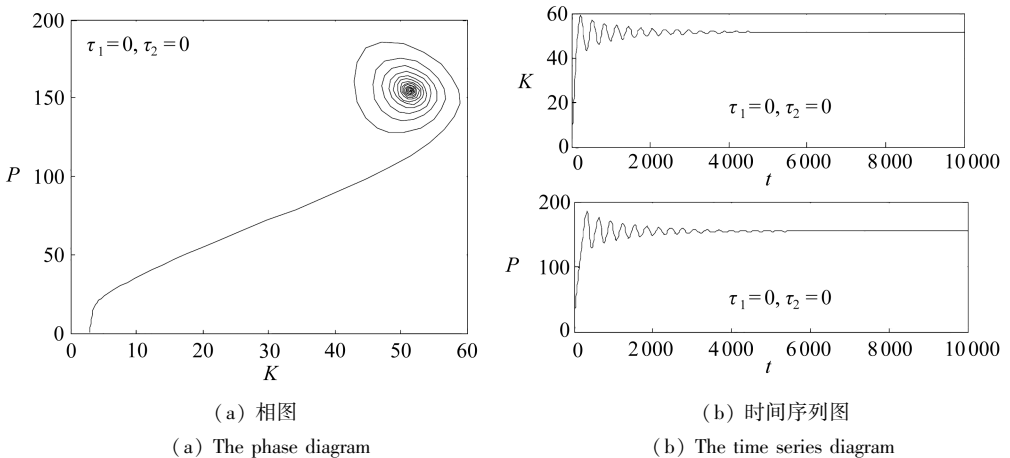


图 5 无投资时滞时 Solow 模型的相图和时间序列图

Fig. 5 The phase diagram and the time series diagram of the Solow model without investment delay

3.2 单个投资时滞时 ($\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ 或 $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$)

本小节主要研究资本生产投资和污染治理投资分别时滞时,对一类时滞 Solow 模型的经

济周期波动的影响以及影响的差异性.利用 MATLAB 软件数值模拟发现,仅资本生产投资时滞时,即 $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$,存在临界点 $\tau_1^* \approx 0.36$,使得:

- 1) 当 $\tau_1 \in [0, 0.36)$ 时,模型(9)在平衡点 M 处渐进稳定, τ_1 越大,滞后性越强.
- 2) 当 $\tau_1 = 0.36$ 时,模型(9)在平衡点 M 处发生 Hopf 分岔.
- 3) 当 $\tau_1 > 0.36$ 时,模型(9)在平衡点 M 处不稳定,出现极限环现象, τ_1 越大,极限环越大.

仅污染治理投资时滞时,即 $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$,同样也存在临界点 $\tau_2^* \approx 7.55$,使得:

- 1) 当 $\tau_2 \in [0, 7.55)$ 时,模型(9)在平衡点 M 处渐进稳定, τ_2 越大,滞后性越强.
- 2) 当 $\tau_2 = 7.55$ 时,模型(9)在平衡点 M 处发生 Hopf 分岔.
- 3) 当 $\tau_2 > 7.55$ 时,模型(9)在平衡点 M 处不稳定,出现极限环现象, τ_2 越大,极限环越大.

数值仿真得到模型(9)的状态变量随时间演化的相图和时间序列图,如图 6、图 7.研究发现,两个时滞参数对时滞 Solow 模型的经济周期波动的影响极其相似.当时滞参数很小时,模型随时间的演化逐渐趋于平衡点 M 处;当时滞参数达到相应的临界点时,虽然模型随时间的演化最终无限收敛到平衡点 M 处,但波动性增强,并且达到平衡点的时间延长;当时滞参数超过临界点时,模型随时间的演化,产生了极限环现象,即经济周期;时滞参数越大,则经济周期波动越强烈,振幅越大.所以,时滞 Solow 模型在临界点处发生了 Hopf 分岔,无论是资本生产投资时滞还是污染治理投资时滞,都会诱发经济周期的产生.

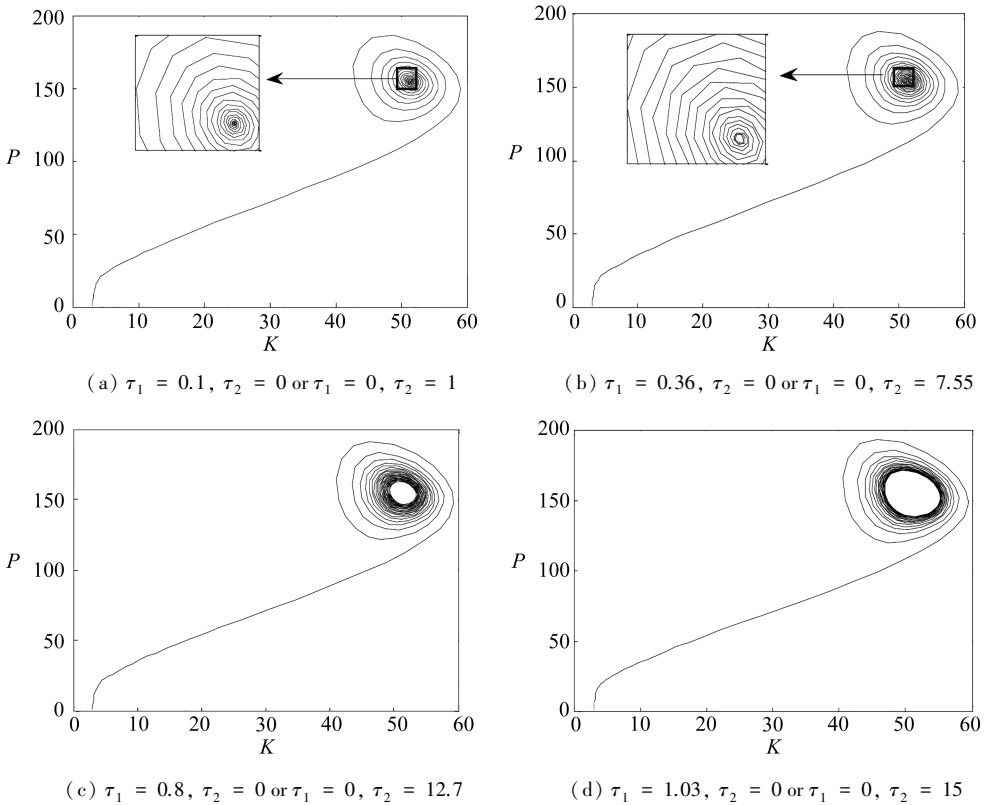


图 6 单个投资时滞时 Solow 模型的相图

Fig. 6 The phase diagram of the Solow model with a single investment delay

3.3 两个投资时滞时 ($\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$)

事实上,在复杂的经济环境系统中,资本生产投资和污染治理投资都会产生不同的时间延迟,同时对系统产生一定影响,本小节主要研究两个投资时滞均存在时,其时滞效应对时滞 So-

low 模型经济周期波动的影响。通过数值模拟,两个投资均时滞时,时滞 Solow 模型的状态变量随时间演化的相图和时间序列图如图 8。参照图 6 和图 7,两个投资时滞均存在时,时滞 Solow 模型提前在 $\tau_1 < 0.36$ 和 $\tau_2 < 7.55$ 时发生了 Hopf 分岔,出现了极限环现象,即经济周期;时滞参数越大,则滞后性越强,并且经济周期波动性越强烈。所以,在两个投资时滞均存在时,时滞合力会提前诱发经济周期的产生,并加剧经济周期的波动。

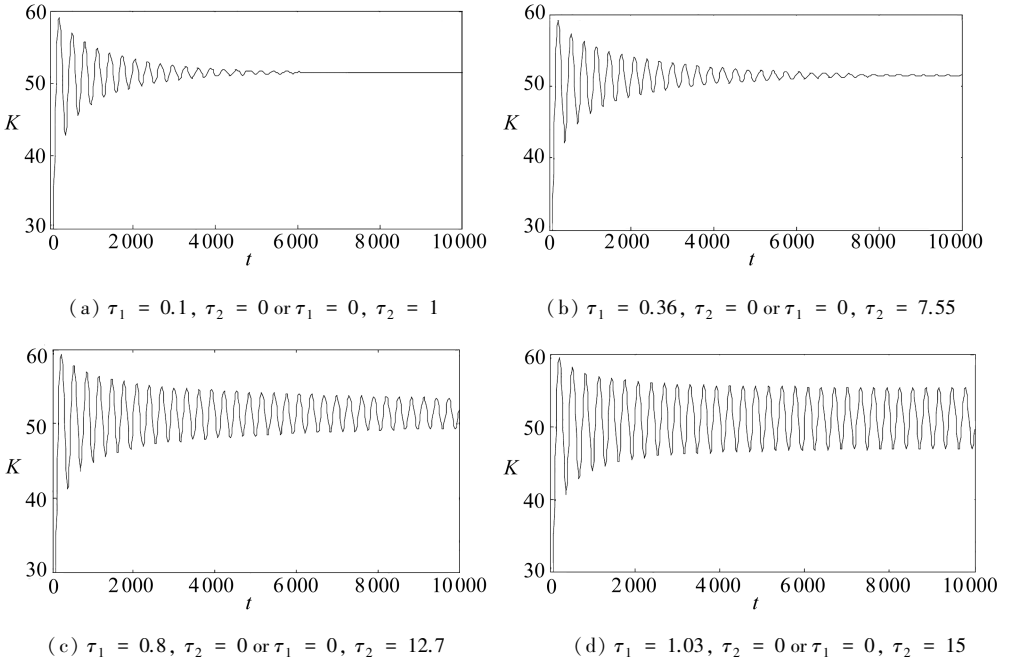


图 7 单个投资时滞时 Solow 模型的时间序列图

Fig. 7 The time series diagram of the Solow model with a single investment delay

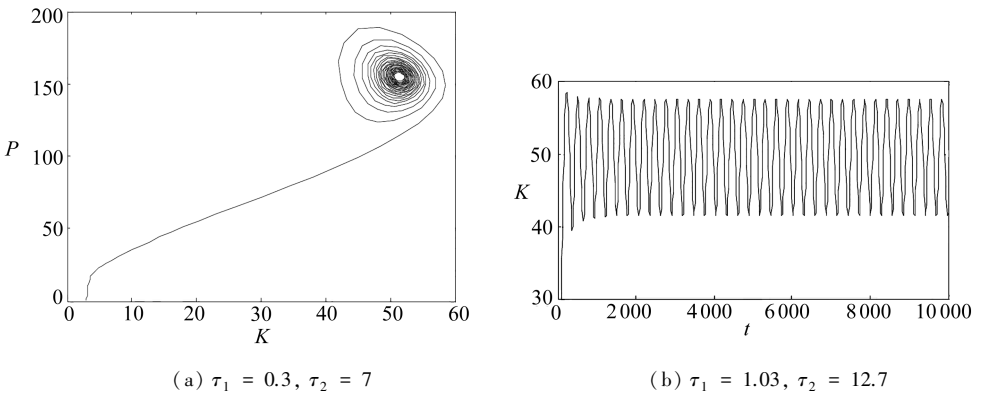


图 8 两个投资时滞时 Solow 模型的相图和时间序列图

Fig. 8 The phase diagram and the time series diagram of the Solow model with 2 investment delays

4 结 论

本文首次提出了带有环境净化的双时滞 Solow 模型,并采用非线性动力学方法,通过数值模拟和参数分析,研究了带有环境净化的双时滞 Solow 模型的经济周期波动行为。

研究表明:经济环境系统受投资时滞的影响较大;无时滞时,经济环境系统存在小幅度的振荡,但很快趋于稳定;引入时滞后,无论单个投资时滞还是两个投资时滞,均能诱发经济

周期的产生,并且双投资时滞下,经济周期的波动性更加强烈;投资时滞越大,则经济周期的波动性越强烈.在实际的经济环境问题上,政府决策者和投资者可以通过制定合理有效的实施方案以及调整投资决策的时滞参数,降低总投资的滞后性,避免严重的经济周期波动,从而使整个经济环境系统保持小幅度振荡的稳定运行,最终实现预期经济环境系统运行的均衡目标.

本文从投资时滞的角度研究了一类时滞 Solow 模型的经济周期波动行为,但由于经济环境系统的非线性特征,决定了系统受多种滞后因素的影响,所以对此系统的时滞性研究仍具有很大空间.

参考文献(References):

- [1] KARRAS G. Land and population growth in the Solow growth model: some empirical evidence [J]. *Economics Letters*, 2010, **109**(2): 66-68.
- [2] GUERRINI L. The Solow-Swan model with a bounded population growth rate[J]. *Journal of Mathematical Economics*, 2006, **42**(1): 14-21.
- [3] STAMOVA I M, STAMOV A G. Impulsive control on the asymptotic stability of the solutions of a Solow model with endogenous labor growth[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, **349**(8): 2707-2716.
- [4] 熊俊. 经济增长因素分析模型: 对索洛模型的一个扩展[J]. 数量经济技术经济研究, 2005, **22**(8): 25-34. (XIONG Jun. Analytical model of economic growth factors: an expansion of Solow model[J]. *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 2005, **22**(8): 25-34. (in Chinese))
- [5] BROCK W A, TAYLOR M S. The Green Solow model[J]. *Journal of Economic Growth*, 2010, **15**(2): 127-153.
- [6] 魏立桥, 赵晓娜, 景文宏. 基于环境污染的经济增长模型——以广东省为例[J]. 软科学, 2008, **22**(2): 54-56. (WEI Liqiao, ZHAO Xiaona, JING Wenhong. Economic growth model based on environmental pollution—taking Guangdong province as an example[J]. *Soft Science*, 2008, **22**(2): 54-56. (in Chinese))
- [7] ANTOCI A, RUSSU P, SORDI S, et al. Industrialization and environmental externalities in a Solow-type model[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, **47**(6): 211-224.
- [8] CELLINI R. Implications of Solow's growth model in the presence of a stochastic steady state [J]. *Journal of Macroeconomics*, 1997, **19**(1): 135-153.
- [9] LEI Dongxia, HUANG Yongzhong. Stationary distribution of stochastic Solow model[J]. *Mathematica Application*, 2014, **27**(4): 775-778.
- [10] 李佼瑞, 张艳霞. 带有环境净化的双随机参数 Solow 模型的稳定性[J]. 统计与信息论坛, 2016, **31**(6): 7-13. (LI Jiaorui, ZHANG Yanxia. The stability of the Solow model with double random parameters based on environmental purification[J]. *Statistics and Information Forum*, 2016, **31**(6): 7-13. (in Chinese))
- [11] 毕志伟, 胡适耕, 梅正阳. 一个时滞经济增长模型的动态分析[J]. 华中科技大学学报, 2001, **29**(9): 109-111. (BI Zhiwei, HU Shigeng, MEI Zhengyang. Dynamical analysis on the model for economic growth with delay[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2001, **29**(9): 109-111. (in Chinese))
- [12] YU Y, HAN X, ZHANG C, et al. Mixed-mode oscillations in a nonlinear time delay oscillator with time varying parameters [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, **47**: 23-34.
- [13] WU X P. Zero-Hopf bifurcation analysis of a Kaldor-Kalecki model of business cycle with de-

- lay[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, **13**(2): 736-754.
- [14] LIU C, LU N, ZHANG Q. Dynamical analysis in a hybrid bioeconomic system with multiple time delays and strong Allee effect[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2017, **136**: 104-131.
- [15] 王万永, 陈丽娟. 具有时滞耦合的 n 个 Van der Pol 振子弱共振双 Hopf 分岔[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(7): 764-770. (WANG Wanyong, CHEN Lijuan. Weak resonant double Hopf bifurcation of n Van der Pol oscillators with delay coupling[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(7): 764-770. (in Chinese))
- [16] PASCHE M. Technical progress, structural change and the environmental Kuznets curve[J]. *Ecological Economics*, 2002, **42**(3): 381-389.
- [17] 陈六君, 毛潭, 刘为, 等. 环境恶化与经济衰退的动力学模型[J]. *北京师范大学学报(自然科学版)*, 2004, **40**(5): 617-622. (CHEN LiuJun, MAO Tan, LIU wei, et al. A dynamic model on environmental degradation and economic recession[J]. *Journal of Beijing Normal University (Natural Science)*, 2004, **40**(5): 617-622. (in Chinese))

Dynamic Cycle Analysis of a Solow Model With Time Delays

LI Jiaorui, ZHANG Yanxia

(Xi'an Statistical Research Institute, Xi'an University of Finance and Economics,
Xi'an 710100, P.R.China)

(Recommended by DENG Zichen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Based on the classical Solow model, a dual delay Solow model was proposed for the first time in view of the capital production investment time delay, the pollution treatment investment time delay and the environment purification parameters, to analyze the dynamic evolution mechanism of the economy-environment system. Then the dynamic periodic fluctuation behavior of the model was discussed. The results show that the economic cycle will be triggered by any individual investment time delay or both 2 delays; with the increasing of the time delay, the economic cyclic fluctuation will become more intense; the appropriate adjustment of the investment policy will help achieve the expected equilibrium objective, and the stable cyclic operation of the economy-environment system can be realized.

Key words: Solow model; time delay; economic cycle; Hopf bifurcation; limit cycle

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11572231)

引用本文/Cite this paper:

李俊瑞, 张艳霞. 一类时滞 Solow 模型的动态周期波动分析[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(3): 334-342.

LI Jiaorui, ZHANG Yanxia. Dynamic cycle analysis of a Solow model with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 334-342.