文章编号:1000-0887(2018)05-0592-19

一维格上时滞微分系统的行波解*

曹华荣， 吴事良

(西安电子科技大学 数学与统计学院，西安 710071)

摘要： 针对部分种群个体活动而其他个体静止的单种群模型，主要研究了一维格上具有静止阶段的时滞反应扩散系统的行波解的定性性质.在单稳和拟单调的假设条件下，首先,研究了行波解的存在性.其次，证明了行波解的渐近行为、单调性以及唯一性.最后，证明了所有非临界波前解(即波速大于最小波速的波前解)是指数渐近稳定的.

关 键 词： 行波解； 格微分系统； 静止阶段； 时滞

中图分类号： O175.14 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.380165

引 言

众所周知，反应扩散系统被用来广泛描述疾病的传播，物种的入侵、发展和迁移等现象[1-15].近年来，对于部分种群个体活动而其他个体静止的单种群反应扩散模型的研究也不断引起广大学者的关注，参见文献[2,8-9,14-15]等.例如，Hadeler 和 Lewis[2] 考虑了如下具有静止阶段的单种群模型：

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=Du_{xx}(x,t)+f(u(x,t))-\gamma_1 u(x,t)+\gamma_2 v(x,t),\\ \partial_t v(x,t)=\gamma_1 u(x,t)-\gamma_2 v(x,t),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $u(x,t)$, $v(x,t)$ 分别表示 t 时刻 x 点处，移动和静止状态下单种群生物的密度，$D>0$ 为扩散系数，f 为移动期的繁殖函数，$\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$ 表示两种状态之间的转移率.

考虑到生物体从生长、发育再到繁殖阶段需要一定的时间延迟,Hadeler 等[16]提出并研究了具有静止阶段的时滞扩散 Nicholson 绿蝇方程：

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=Du_{xx}(x,t)-d(u(x,t))+\\ \qquad b(u(x,t-\tau))\mathrm{e}^{-\mu^0\tau}-\gamma_1 u(x,t)+\gamma_2 v(x,t),\\ \partial_t v(x,t)=\gamma_1 u(x,t)-\gamma_2 v(x,t),\end{cases}\tag{2}$$

其中 μ^0 代表幼年个体的死亡率,时滞 $\tau\geqslant 0$ 表示个体从出生到成年所需时间.随后，Wu 和 Zhao[17] 将繁殖函数抽象化，研究了如下具有时滞和静止阶段的反应扩散系统的行波解：

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=Du_{xx}(x,t)+f(u(x,t),\,u(x,t-\tau))-\gamma_1 u(x,t)+\gamma_2 v(x,t),\\ \partial_t v(x,t)=\gamma_1 u(x,t)-\gamma_2 v(x,t).\end{cases}\tag{3}$$

* **收稿日期：** 2017-06-12；**修订日期：** 2017-09-06
基金项目： 中央高校基本科研业务费(JB160714)
作者简介： 曹华荣(1993—)，女,硕士生(E-mail：chr0219@163.com)；
吴事良(1981—),男,博士,教授(通讯作者. E-mail：slwu@xidian.edu.cn).

系统(1)~(3)均包含了一个基本假设:所有生物的生活空间均为连续的.然而,在实际中并非所有的情形都是如此.比如,松鼠赖以生存的树洞总是零散地分布在广袤的森林里.因此,用空间连续的方程描述类似于松鼠这类种群的增长与入侵过程并不是很严密.所以,有必要考虑将种群生存空间离散化.实际上,在种群动力学中,空间离散的反应扩散系统(简称为格动力系统)[1,14-15,18-21]常常被用来描述空间斑块环境下种群的增长与入侵过程.

基于以上考虑,本文研究以下一维空间格上具有时滞和静止阶段的反应扩散系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = (\Delta u)_i(t) + f(u_i(t), u_i(t-\tau)) - \gamma_1 u_i(t) + \gamma_2 v_i(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma_1 u_i(t) - \gamma_2 v_i(t),\end{cases} \tag{4}$$

其中 $u_i(t) \in \mathbf{R}, v_i(t) \in \mathbf{R}, i \in \mathbf{Z}, t > 0, (\Delta u)_i := d(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)$.同时 $f(u,v)$ 满足如下假定:

(A1) 存在常数 $K_1 > 0$ 使得 $f \in C^1([0, K_1], \mathbf{R})$, $f(u, u) > 0$, $u \in (0, K_1)$, $f(0, 0) = f(K_1, K_1) = 0$, 且 $\partial_2 f(u, v) \geqslant 0$, $(u, v) \in [0, K_1]^2$.

(A2) $\partial_1 f(K_1, K_1) + \partial_2 f(K_1, K_1) < 0$, $\partial_1 f(0, 0)u + \partial_2 f(0, 0)v \geqslant f(u, v)$, 其中 $(u, v) \in [0, K_1]^2$.

显然,系统(4)是系统(3)的一个空间离散形式.由条件(A1)得系统(4)存在一个零平衡点 $\mathbf{0}:=(0,0)$ 和一个正平衡点 $\boldsymbol{K}:=(K_1,K_2)$,其中 $K_2 = (\gamma_1/\gamma_2)K_1$.结合条件(A2),可得 $\partial_1 f(0, 0) + \partial_2 f(0, 0) \geqslant (2/K_1)f(K_1/2, K_1/2) > 0$.针对系统(4),如果存在一个常数 $c > 0$ 和一个函数 $(U(\cdot), V(\cdot))$: $\mathbf{R} \to [0, K_1] \times [0, K_2]$ 使得 $(u_i(t), v_i(t)) = (U(i - ct), V(i - ct))$.则称 $(u_i(t), v_i(t))$ 为系统(4)的行波解,c 为波速,(U, V) 为波廓.并且如果 $(U(\cdot), V(\cdot))$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调的,则称 (U, V) 为波前解.

本文主要研究一维格时滞系统(4)的行波解的各种定性性质,包括存在性、渐近行为、单调性、唯一性以及稳定性.首先,将系统(4)转化为一个带有积分项的标量方程.其次,利用单调迭代技术[12]、上下解方法[6]以及取极限的方法[13],证明了 $c \geqslant c^*$ 时,行波解的存在性.进而,利用 Ikehara 定理[14,17,22]建立了正负无穷远处行波波廓的渐近行为.在此基础上,得到了 $0 < c < c^*$ 时,行波解的不存在性.进一步,利用强比较原理[14,17-18]结合滑动平面技巧,证明了行波解的单调性和(平移不变意义下的)唯一性.最后,通过对相应的线性系统建立比较定理,证明了非临界行波解的指数稳定性,并得到了收敛率.

本文结构如下:第 1 节研究行波解的存在性;第 2 节研究行波解的渐近行为;第 3 节讨论行波解的单调性与唯一性;第 4 节研究行波解的稳定性;最后,对全文内容进行总结.

1　行波解的存在性

本节主要研究系统(4)行波解的存在性.首先,将方程组(4)转化成为标量方程.进而,利用单调迭代技术结合上下解以及取极限的方法证明行波解的存在性.因为证明与已有的一些结果类似,这里仅叙述了主要的结论而省略具体的证明细节.

1.1　转化为数量方程

令 $(u_i(t), v_i(t)) = (U(\xi), V(\xi))$, 其中 $\xi = i + ct$.将其代入系统(4)可得如下相应的行波系统:

$$\begin{cases} cU'(\xi)=d[U(\xi+1)+U(\xi-1)-2U(\xi)]+f(U(\xi),U(\xi-c\tau))- \\ \qquad \gamma_1 U(\xi)+\gamma_2 V(\xi), \\ cV'(\xi)=\gamma_1 U(\xi)-\gamma_2 V(\xi), \end{cases} \tag{5}$$

其中边界条件为

$$(U(-\infty),V(-\infty))=(0,0),\ (U(\infty),V(\infty))=(K_1,K_2). \tag{6}$$

则系统(5)的第二个方程可转化为以下积分方程：

$$V(\xi)=\frac{\gamma_1}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}U(s)\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

将其代入系统(5)，可得

$$cU'(\xi)=d[U(\xi+1)+U(\xi-1)-2U(\xi)]+f(U(\xi),U(\xi-c\tau))- \\ \gamma_1 U(\xi)+\frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}U(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

不难得出下面结论成立.

引理 1

(i) 假设 $(U(\xi),V(\xi))$ 是系统(4) 的单调行波解，则 $U(\xi)$ 是式(8)的解.

(ii) 假设 $U(\xi)$ 是式(8) 的解，且 $V(\xi)$ 满足式(7)，其中，$(U(\xi),V(\xi))\in[0,K_1]^2,\xi\in\mathbf{R}$.若

$$U(-\infty)=0,\ U(+\infty)=K_1, \tag{9}$$

则 $(U(\xi),V(\xi))$ 是系统(4)的单调行波解.

因此，研究系统(4)的行波解的存在性，只需研究式(8)的解的存在性.

将式(8)在(0,0)与 (K_1,K_1) 点处线性化后，可得如下两个特征函数：

$$\Delta_1(c,\lambda)=c\lambda-d(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2)- \\ \partial_1 f(0,0)-\partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}+\gamma_1-\frac{\gamma_1\gamma_2}{c\lambda+\gamma_2}, \tag{10}$$

$$\Delta_2(c,\lambda)=c\lambda-d(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}-2)- \\ \partial_1 f(K_1,K_1)-\partial_2 f(K_1,K_1)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}+\gamma_1-\frac{\gamma_1\gamma_2}{c\lambda+\gamma_2}, \tag{11}$$

其中 $c\geqslant 0,\lambda\neq-\gamma_2/c$.由此可得以下结论.

引理 2 假设条件(A1)、(A2)成立.

(i) 如果存在 $c^*:=c^*(\tau,\gamma_1,\gamma_2)>0$，那么：

(a) 若 $0\leqslant c<c^*$ 且 $\lambda\geqslant 0$，则 $\Delta_1(c,\lambda)<0$.

(b) 若 $c=c^*$，则存在一个正实根 $\lambda(c^*)$ 使得 $\Delta_1(c,\lambda)=0$.

(c) 若 $c>c^*$，则存在两个正实根 $\lambda_i:=\lambda_i(c)$，$i=1,2$，使得 $\Delta_1(c,\lambda)=0$，其中 $\lambda_1(c)<\lambda(c^*)<\lambda_2(c)$ 且 $\lambda_1'(c)<0,\lambda_2'(c)>0$；如果 $\lambda\in(\lambda_1(c),\lambda_2(c))$，则 $\Delta_1(c,\lambda)>0$，否则，$\Delta_1(c,\lambda)<0$.

(ii) 方程 $\Delta_2(c,\lambda)=0$ 有两个实根 $\lambda_3(c)<0,\lambda_4(c)>0$.

1.2 主要结论

记 $C_{[0,K_1]}(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{\phi\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}):0\leqslant\phi(s)\leqslant K_1,s\in\mathbf{R}\}$.为了运用单调迭代技术[6,12-13]，引入算子 $\mathrm{T}:C_{[0,K_1]}(\mathbf{R},\mathbf{R})\to C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 为

$$\mathrm{T}(\phi)(\xi)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-\mu(\xi-s)}\mathrm{H}(\phi)(s)\mathrm{d}s,\tag{12}$$

其中 $\mu=\frac{(2d+\gamma_1+L)}{c}$, $L=\max_{(u,v)\in[0,K_1]^2}\{|\partial_1 f(u,v)|\}$, 且

$$\mathrm{H}(\phi)(\xi)=d[\phi(\xi+1)+\phi(\xi-1)]+f(\phi(\xi),\phi(\xi-c\tau))+ L\phi(\xi)+\frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}\phi(s).\tag{13}$$

下面给出算子 T 的一些性质.

引理 3 假设条件(A1)成立.则

(i) 若对任意的 $\phi_1,\phi_2\in C_{[0,K_1]}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 有 $\phi_1\leqslant\phi_2$, 则 $\mathrm{T}(\phi_1)(\xi)\leqslant\mathrm{T}(\phi_2)(\xi)$.

(ii) 若对任意的 $\phi\in C_{[0,K_1]}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 在 $\xi\in\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $\mathrm{T}(\phi)(\xi)$ 在 $\xi\in\mathbf{R}$ 上单调递增.

定义 1 如果存在连续函数 $\bar{\phi}\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}]$ 满足

$$c\bar{\phi}'(\xi)\geqslant d[\bar{\phi}(\xi+1)+\bar{\phi}(\xi-1)-2\bar{\phi}(\xi)]+f(\bar{\phi}(\xi),\bar{\phi}(\xi-c\tau))- \gamma_1\bar{\phi}(\xi)+\frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}\bar{\phi}(s)\mathrm{d}s,\quad \text{a.e.}\quad \xi\in\mathbf{R},\tag{14}$$

则 $\bar{\phi}$ 被称为系统(8) 的上解.类似地, 即可定义 $\underline{\phi}$ 为系统(8)的下解.

引理 4 假设条件(A1)、(A2)成立.令 $c>c^*$.如果对每一个 $\alpha\in(1,\lambda_2/\lambda_1)$, 都存在 $M(c,\alpha)\geqslant 1$.则任给 $m\geqslant M(c,\alpha)$, 系统(8) 的上解 $\bar{\phi}$ 和下解 $\underline{\phi}$ 可分别定义为

$$\bar{\phi}(\xi)=\min\{K_1,\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}+m\mathrm{e}^{\alpha\lambda_1\xi}\},\ \underline{\phi}(\xi)=\max\{0,\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}-m\mathrm{e}^{\alpha\lambda_1\xi}\},\quad \xi\in\mathbf{R}.\tag{15}$$

基于以上的上下解并结合单调迭代技术和取极限的方法, 可得 $c\geqslant c^*$ 时行波解的存在性, $0<c<c^*$ 时, 行波解的不存在性将在第 2 节得到行波解的渐近行为后给出.

定理 1 假设条件(A1)、(A2)成立.

(i) 如果 $c\geqslant c^*(\tau,\gamma_1,\gamma_2)$, 则系统(4) 存在连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的行波解.

(ii) 如果 $0<c<c^*(\tau,\gamma_1,\gamma_2)$, 则系统(4) 不存在连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的行波解.

2 行波解的渐近行为

本节将研究系统(4)行波的渐近行为.首先回顾下由 Carr 和 Chmaj 提出的 Ikehara 定理[22].

定理 2 令 $\bar{F}(\Lambda):=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\Lambda\xi}u(\xi)\mathrm{d}\xi$, 其中 $u(\xi)$ 为非增的正定函数.如果存在 $k>-1$, $\Lambda_0>0$,且函数 S 在 $-\Lambda_0\leqslant\mathrm{Re}\,\Lambda<0$ 内解析, 使得 $\bar{F}(\Lambda)=S(-\Lambda_0)/(\Lambda+\Lambda_0)^{k+1}$.则

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{u(\xi)}{\xi^k\mathrm{e}^{-\Lambda_0\xi}}=\frac{S(-\Lambda_0)}{\Gamma(\Lambda_0+1)}.$$

类似于文献[17]中引理 3.2 和文献[14]中引理 2.8, 不难证明以下结论成立.

引理 5 假设 $(U(\xi),V(\xi))$ 为系统(4) 的行波解, 则 $U(\xi)\in(0,K_1)$ 且 $V(\xi)\in(0,K_2)$, 其中 $\xi\in\mathbf{R}$, 且 $U'(\pm\infty)=V'(\pm\infty)=0$.

本节主要结论如下.

定理 3 假设条件(A1)、(A2)成立.若 $(U(\xi),V(\xi))$ 是系统(4)的波速 $c\geqslant c^*$ 的行波解，则有

(i) 当 $\xi\to-\infty$ 时，有

$$\begin{cases}\lim\limits_{\xi\to-\infty}U(\xi)\xi^k\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}=l_1(c),\ \lim\limits_{\xi\to-\infty}U'(\xi)\xi^k\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}=l_1(c)\lambda_1,\\ \lim\limits_{\xi\to-\infty}V(\xi)\xi^k\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}=\dfrac{\gamma_1 l_1(c)}{c\lambda_1+\gamma_2},\ \lim\limits_{\xi\to-\infty}V'(\xi)\xi^k\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}=\dfrac{\gamma_1 l_1(c)\lambda_1}{c\lambda_1+\gamma_2};\end{cases}\tag{16}$$

(ii) 当 $\xi\to+\infty$ 时，有

$$\begin{cases}\lim\limits_{\xi\to+\infty}(K_1-U(\xi))\mathrm{e}^{-\lambda_3\xi}=l_2(c),\ \lim\limits_{\xi\to+\infty}U'(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_3\xi}=-l_2(c)\lambda_3,\\ \lim\limits_{\xi\to+\infty}(K_2-V(\xi))\mathrm{e}^{-\lambda_3\xi}=\dfrac{\gamma_1 l_2(c)}{c\lambda_3+\gamma_2},\ \lim\limits_{\xi\to+\infty}V'(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_3\xi}=-\dfrac{\gamma_1 l_2(c)\lambda_3}{c\lambda_3+\gamma_2},\end{cases}\tag{17}$$

其中 $l_1(c)$，$l_2(c)$ 为常数.当 $c>c^*$ 时，$k=0$.当 $c=c^*$ 时，$k=-1$.

证明 (i) 注意到 $V(\xi)$ 满足式(7).故此仅证明波廓 $U(\xi)$ 的渐近行为.下面将分 3 步完成.

1) 证明存在 $\xi'\in\mathbf{R}$,使得 $U(\xi)$ 在 $(-\infty,\xi']$ 上可积.

令 $\sigma_1=\partial_1 f(0,0)+\partial_2 f(0,0)$，$\sigma_2=\partial_2 f(0,0)-\partial_1 f(0,0)$.根据假设条件,可得 $\sigma_1>0$.由于 $U(-\infty)=0$，且 $U(\xi)$ 为系统(8)的解，则存在 $\xi'<0$，使得当 $\xi\leqslant\xi'$ 时，有

$$L[U^2(\xi)+2U(\xi)U(\xi-c\tau)+U^2(\xi-c\tau)]\leqslant\frac{\sigma_1}{4}U(\xi)+\frac{\sigma_1}{4}U(\xi-c\tau),\tag{18}$$

其中 $L=\max_{(u,v)\in[0,K_1]^2}\{|\partial_1 f(u,v)|\}$.

为方便起见，记

$$\tilde{U}(\xi):=\frac{\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}U(s)\mathrm{d}s=\frac{\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)s}U(s+\xi)\mathrm{d}s.\tag{19}$$

将式(19)代入式(8)，并对 $f(U(\xi),U(\xi-c\tau))$ 进行 Taylor(泰勒)展开，整理得

$$\begin{aligned}cU'(\xi)\geqslant{}&d[U(\xi+1)+U(\xi-1)-2U(\xi)]+\\&\partial_1 f(0,0)U(\xi)+\partial_2 f(0,0)U(\xi-c\tau)-\\&L[U^2(\xi)+2U(\xi)U(\xi-c\tau)+U^2(\xi-c\tau)]+\gamma_1[\tilde{U}(\xi)-U(\xi)]\geqslant\\&d[U(\xi+1)+U(\xi-1)-2U(\xi)]+\frac{\sigma_1}{4}U(\xi)+\\&\frac{\sigma_2}{2}[U(\xi-c\tau)-U(\xi)]+\gamma_1[\tilde{U}(\xi)-U(\xi)].\end{aligned}\tag{20}$$

注意到 $U(-\infty)=U'(-\infty)=0$.对式(20)两边从 y 到 ξ 进行积分，并对 y 取极限，有

$$\begin{aligned}cU(\xi)\geqslant{}&d\left[\int_{\xi}^{\xi+1}U(s)\mathrm{d}s-\int_{\xi-1}^{\xi}U(s)\mathrm{d}s\right]+\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\sigma_1}{4}U(s)\mathrm{d}s+\\&\lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{\xi}\left(\frac{\sigma_2}{2}[U(s-c\tau)-U(s)]+\gamma_1[\tilde{U}(s)-U(s)]\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{21}$$

根据 Fubini 定理和 Lebesgue 控制收敛定理，可得

$$\begin{aligned}\int_{y}^{\xi}[\tilde{U}(s)-U(s)]\mathrm{d}s={}&\frac{\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{0}z\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z}\int_{0}^{1}[U(\theta z+\xi)-U(\theta z+y)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\to\\&\frac{\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{1}z\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z}U(\theta z+\xi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{22}$$

从而，结合式(21)，可得以下不等式成立：

$$cU(\xi) \geqslant d\left[\int_{\xi}^{\xi+1} U(s)\,\mathrm{d}s - \int_{\xi-1}^{\xi} U(s)\,\mathrm{d}s\right] + \frac{\sigma_1}{4}\int_{-\infty}^{\xi} U(s)\,\mathrm{d}s -$$

$$\frac{\sigma_2 c\tau}{2}\int_0^1 U(\xi - \theta c\tau)\,\mathrm{d}\theta + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^0\int_0^1 z\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z} U(\theta z + \xi)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{23}$$

故 $U(\xi)$ 在$(-\infty, \xi']$上可积.因此，$\tilde{U}(\xi)$ 在$(-\infty, \xi']$上也可积.

2）证明当 $\xi \to -\infty$ 时，有 $U(\xi) = O(\mathrm{e}^{\gamma\xi})$,其中 $\gamma > 0$.

由步 1)，可定义 $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} U(s)\,\mathrm{d}s$,其中 $\xi \leqslant \xi'$.显然，$F(\xi)$ 是非减的且满足 $F(-\infty) = 0$.对式(20) 两边从 $-\infty$ 到 ξ 进行积分，则有

$$cU(\xi) \geqslant d[F(\xi+1) + F(\xi-1)] + \left[\frac{\sigma_1}{4} - \gamma_1 - 2d\right]F(\xi) +$$

$$\frac{\sigma_2}{2}[F(\xi - c\tau) - F(\xi)] + \gamma_1\int_{-\infty}^{\xi}\tilde{U}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{24}$$

另外

$$\int_{-\infty}^{\xi}\tilde{U}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\gamma_2}{c}\lim_{y\to-\infty}\int_{-\infty}^{\xi}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)s}U(s+z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}s = \frac{\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z}F(z+\xi)\,\mathrm{d}z. \tag{25}$$

且

$$\lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{\xi}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z}[F(s+z) - F(s)] = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{1} z\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z}F(\xi+\theta z)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{26}$$

重复式(21)和(22)的工作，可直接计算给出

$$cF(\xi) + \frac{\sigma_2 c\tau}{2}\int_0^1 F(\xi - \theta c\tau)\,\mathrm{d}\theta \geqslant$$

$$\frac{\sigma_1}{4}\int_{-\infty}^{\xi}F(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{0}\int_0^1 z\mathrm{e}^{(\gamma_2/c)z}F(\xi+\theta z)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{27}$$

注意到 $F(\xi)$ 是非减的，可得 $F(\xi+\theta z) \geqslant F(\xi)$.则对任意的 $l > 0$ 且 $\xi \leqslant \xi'$，有

$$c\left(1 + \frac{\sigma_2\tau}{2}\right)F(\xi) \geqslant \frac{\sigma_1}{4}\int_{-\infty}^{\xi}F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\sigma_1}{4}\int_{-\infty}^{0}F(\xi+s)\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\frac{\sigma_1}{4}\int_{-l}^{0}F(\xi+s)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{\sigma_1 l}{4}F(\xi - l). \tag{28}$$

故有

$$\frac{c(4 + 2\tau\sigma_2)}{\sigma_1 l}F(\xi) \geqslant F(\xi - l).$$

选择一个 $l_0 > 0$ 充分大，使得 $\theta_0 := c(4 + 2\tau\sigma_2)/\sigma_1 l_0 \in (0,1)$.则对任意的 $\xi \leqslant \xi'$，有 $F(\xi - l_0) \leqslant \theta_0 F(\xi)$.

定义一个函数 $\tilde{F}(\xi) = F(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma\xi}$，其中 $\gamma = (1/l_0)\ln(1/\theta_0)$.则任给 $\xi \leqslant \xi'$，有

$$\tilde{F}(\xi - l_0) = F(\xi - l_0)\mathrm{e}^{-\gamma(\xi - l_0)} = \frac{1}{\theta_0}F(\xi - l_0)\mathrm{e}^{-\gamma\xi} \leqslant F(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma\xi} = \tilde{F}(\xi). \tag{29}$$

所以有 $0 \leqslant \tilde{F}(\xi) \leqslant M_0 := \sup_{\xi\leqslant\xi'}\{\tilde{F}(s) \mid s \in [\xi' - l_0, \xi']\}$,$\xi \leqslant \xi'$.因此,$F(\xi) = O(\mathrm{e}^{\gamma\xi})$.从而，可得 $U(\xi) = O(\mathrm{e}^{\gamma\xi})$.

3）证明 $\lim_{\xi\to-\infty} e^{-\lambda_1\xi}U(\xi)$ 存在.

对于 $0 < \operatorname{Re}\lambda < \gamma$，对 U 定义 Laplace 变换：$\mathfrak{L}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}U(\xi)e^{-\lambda\xi}d\xi$.由式(8)，可得

$$\begin{aligned}&cU'(\xi)-d[U(\xi+1)+U(\xi-1)-2U(\xi)]-\partial_1 f(0,0)U(\xi)-\\&\quad\partial_2 f(0,0)U(\xi-c\tau)+\gamma_1U(\xi)-\frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi}e^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}U(s)ds=\\&\quad f(U(\xi),U(\xi-c\tau))-\partial_1 f(0,0)U(\xi)-\partial_2 f(0,0)U(\xi-c\tau).\end{aligned}\tag{30}$$

将式(30)两边同乘 $e^{-\lambda\xi}$，并对 ξ 进行积分，得

$$\begin{aligned}&\Delta_1(c,\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)=\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda\xi}[f(U(\xi),U(\xi-c\tau))-\partial_1 f(0,0)U(\xi)-\partial_2 f(0,0)U(\xi-c\tau)]d\xi.\end{aligned}\tag{31}$$

为了利用 Ikehara 定理，引入变量代换 $u(\xi)=U(-\xi)$ 且 $\Lambda=-\lambda$.则

$$\begin{aligned}&\Delta_1(c,-\Lambda)\mathfrak{L}_1(\Lambda)=\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\Lambda\xi}[f(u(\xi),u(\xi+c\tau))-\partial_1 f(0,0)u(\xi)-\partial_2 f(0,0)u(\xi+c\tau)]d\xi,\end{aligned}\tag{32}$$

其中 $\mathfrak{L}_1(\Lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)e^{-\Lambda\xi}d\xi$.易见 $u(+\infty)=0$ 及 $u(\xi)=O(e^{-\gamma\xi})$.基于 $f(u(\xi),u(\xi-c\tau))$ 的 Taylor 展开式，可得如果 $-2\gamma<\operatorname{Re}\Lambda<0$，则式(30)的右边可由 Λ 定义.根据 Laplace 变换的性质(文献[23]中 P58)可知，存在一个实数 $-\lambda_1$ 使得 $\mathfrak{L}(\Lambda)$ 在 $-\lambda_1<\operatorname{Re}\Lambda<0$ 上解析，且在 $\Lambda=-\lambda_1$ 处有一个奇点.

将式(32)变形为

$$\begin{aligned}\bar F(\Lambda)=&\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\Lambda\xi}[f(u(\xi),u(\xi-c\tau))-\partial_1 f(0,0)u(\xi)-\partial_2 f(0,0)u(\xi+c\tau)]d\xi}{\Delta_1(c,-\Lambda)}-\\&\int_{-\infty}^{0}u(\xi)e^{-\Lambda\xi}d\xi=\int_{0}^{+\infty}u(\xi)e^{-\Lambda\xi}d\xi.\end{aligned}\tag{33}$$

显然，$\int_{-\infty}^{0}u(x)e^{-\Lambda\xi}d\xi$ 在 $\operatorname{Re}\Lambda<0$ 上解析.记

$$S(\Lambda):=\tilde Q(\Lambda)-[\Lambda+\lambda_1]^{k+1}\int_{-\infty}^{0}u(\xi)e^{-\Lambda\xi}d\xi,$$

其中

$$\tilde Q(\Lambda)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\Lambda\xi}[f(u(\xi),u(\xi-c\tau))-\partial_1 f(0,0)u(\xi)-\partial_2 f(0,0)u(\xi+c\tau)]d\xi}{\Delta_1(c,-\Lambda)/(\Lambda+\lambda_1)^{k+1}},\tag{34}$$

且当 $c>c^*$ 时，$k=0$；当 $c=c^*$ 时，$k=-1$.显然，$\bar F(\Lambda)=S(\Lambda)(\Lambda+\Lambda_0)^{-(k+1)}$.

下面证明 $S(\Lambda)$ 在 $G:=\{\Lambda\in C\mid -\lambda_1\leqslant\operatorname{Re}\Lambda<0\}$ 上解析.事实上，只需证 $\tilde Q(\Lambda)$ 在 G 上解析.由于 $\tilde Q(\Lambda)=\mathfrak{L}_1(\Lambda)(\Lambda+\lambda_1)^{k+1}$，可知 $\tilde Q(\Lambda)$ 在 $-\lambda_1<\operatorname{Re}\Lambda<0$ 上解析.接下来证明当 $\Lambda=-\lambda_1$ 时，$\tilde Q(\Lambda)$ 解析.

因此，可断言除 $\Lambda=-\lambda_1$ 以外，方程 $\Delta_1(c,-\Lambda(c))=0$ 不存在任何零实部.否则，假设 $\Lambda_0(c)=-\lambda_1+\beta\mathrm{i}$，将其代入方程 $\Delta_1(c,-\Lambda(c))=0$.注意到 $\Delta_1(c,\lambda_1)=0$.并将实部和虚部分开，整理得

$$\begin{cases} d(\mathrm{e}^{\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\lambda_1})(1-\cos\beta)+\partial_2 f(0,0)(1-\cos(\beta c\tau))+ \\ \qquad \dfrac{\gamma_1\gamma_2 c^2\beta^2}{[c(\lambda_1+\gamma_2)^2+c^2\beta^2](c\lambda_1+\gamma_2)}=0, \\ c\beta-d(\mathrm{e}^{\lambda_1}+\mathrm{e}^{-\lambda_1})\sin\beta-\partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda_1 c\tau}\sin(\beta c\tau)+ \\ \qquad \dfrac{c\gamma_1\gamma_2\beta}{(c\lambda_1+\gamma_2)^2+c^2\beta^2}=0. \end{cases} \tag{35}$$

当且仅当 $\beta=0$ 时，式(35)成立.故 $\tilde{Q}(\Lambda)$ 在 G 上解析.从而,$S(\Lambda)$ 在 G 上解析.

综上，由于 $V(\xi)$ 满足式(7)，通过 Ikehara 定理，由此完成该定理的证明.

(ii) 令 $\tilde{Z}(\xi)=K_1-U(\xi)$ 且 $\hat{F}(u,v)=f(K_1-u,K_2-v)$.类似于(i)的方法，可证得结论(ii)成立.证毕. □

基于以上讨论，通过利用双边 Laplace 变换的方法，可排除当 $0<c<c^*$ 时，系统(4)的行波解的存在性.该部分的严格证明可参考文献[17]中推论 3.4，此处从略.

3 单调性与唯一性

本节主要利用滑动平面技巧结合强比较原理的方法，证明行波解的单调性和唯一性.另外，在本节中，总是假设条件(A1)、(A2)成立.

定理 4 强比较原理 令 $U_1(\xi),U_2(\xi)$ 为系统(8)的解，其中 $U_1,U_2\in[0,K_1]$.如果对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$，有 $U_1(\xi)\geqslant U_2(\xi)$，则 $U_1>U_2$ 或 $U_1\equiv U_2$.

证明 假设存在 $\xi_1\in\mathbf{R}$，使得 $U_1(\xi_1)=U_2(\xi_1)$.由 $\mathrm{T}(U)(\xi)=U(\xi)$，则

$$0=U_1(\xi_1)-U_2(\xi_1)=\frac{1}{c}\left(\int_{-\infty}^{\xi_1}\mathrm{e}^{-\mu(\xi_1-s)}[\mathrm{H}(U_1)(s)-\mathrm{H}(U_2)(s)]\mathrm{d}s\right), \quad \xi_1\in\mathbf{R}. \tag{36}$$

依据 H 的性质，可得 $\mathrm{H}(U_1)(\xi)\geqslant\mathrm{H}(U_2)(\xi)$.故当且仅当对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$，有 $\mathrm{H}(U_1)(\xi)=\mathrm{H}(U_2)(\xi)$ 时,式(36)等号两边成立.注意到条件 $\partial_1 f(u,v)\geqslant 0$,其中 $(u,v)\in[0,K_1]^2$.因此，任给 $\xi\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned} 0=&\mathrm{H}(U_1)(\xi)-\mathrm{H}(U_2)(\xi)= \\ &d[U_1(\xi+1)-U_2(\xi+1)]+d[U_1(\xi-1)-U_2(\xi-1)]+ \\ &f(U_1(\xi),U_1(\xi-c\tau))-f(U_2(\xi),U_2(\xi-c\tau))+ \\ &\frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi-s)}[U_1(s)-U_2(s)]\mathrm{d}s\geqslant 0. \end{aligned} \tag{37}$$

故对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$，有 $U_1(\xi)=U_2(\xi)$，即 $U_1\equiv U_2$.证毕. □

3.1 单调性

定理 5 假设 $(U(\xi),V(\xi))$ 是系统(4)的行波解.则对于 $\forall\xi\in\mathbf{R}$，有

$U'(\xi)>0,\ V'(\xi)>0.$

显然，如果可以证得以下结论成立，则定理 5 显然成立.

引理 6 假设 $U(\xi)$ 是系统(8)的解.则对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$，有 $U'(\cdot)>0$.

证明 首先证明 $U'(\cdot)\geqslant 0$.定义 $\bar{\xi}=\inf\{\xi>0\mid U(x+\zeta)\geqslant U(x),\forall\ x\in\mathbf{R},\zeta\geqslant\xi\}$.由引理5, 可知任给 $\xi\in\mathbf{R}$, 有 $0<U(\xi)<K_1$.故当 $\zeta\geqslant\bar{\xi}\in\mathbf{R}$ 时, 有 $U(\cdot+\zeta)\geqslant U(\cdot)$.

注意到 $U(+\infty)=K_1$.下证 $\bar{\xi}=0$.利用反证法, 假设 $\bar{\xi}>0$.注意到

$$\lim_{\xi\to-\infty}\frac{U'(\xi)}{U(\xi)}=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{V'(\xi)}{V(\xi)}=\lambda_1,\ \lim_{\xi\to-\infty}\frac{U'(\xi)}{U(\xi)-K_1}=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{V'(\xi)}{V(\xi)-K_1}=\lambda_3.\tag{38}$$

从而存在某个 $N\gg 0$,使得 $x\in\mathbf{R}\backslash[-N,N]$ 时,$U(x)$ 严格递增.由连续性,任给 $x\in\mathbf{R}\backslash[-N,N]$,有 $U'(\xi)\geqslant 0$.故存在 $\zeta\in(0,\bar{\xi}]$,使得当 $x\in\mathbf{R}\backslash[-N-\bar{\xi},N+\bar{\xi}]$ 时,有 $U(x+\zeta)\geqslant U(x)$.

依据强比较原理, 任给 $x\in\mathbf{R}$, 有 $U(x+\bar{\xi})>U(x)$.故任给 $x\in[-N-2\bar{\xi},N+2\bar{\xi}]$, 存在 $\varepsilon\in(0,\bar{\xi})$ 和 $\zeta\in[\bar{\xi}-\varepsilon,\bar{\xi}]$, 使得 $U(x+\zeta)>U(x)$.因此, 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$, 当 $\zeta>\bar{\xi}-\varepsilon$ 时, 有 $U(x+\zeta)\geqslant U(x)$.然而, 与 $\bar{\xi}$ 的定义矛盾.所以, $\bar{\xi}=0$.即对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$, 有 $U'(\xi)\geqslant 0$.进一步, 不难证明 $U'>0$.证毕. □

3.2 唯一性

定理6 假设 $(U_1(\xi),V_1(\xi)),(U_2(\xi),V_2(\xi))$ 是系统(4) 的两个行波解.则存在 $\tilde{\xi}\in\mathbf{R}$,使得 $(U_1(\cdot+\tilde{\xi}),\ V_1(\cdot+\tilde{\xi}))\equiv(U_2(\cdot),\ V_2(\cdot))$.

为了研究需要,本小节总是假设 $(U_i(\xi),V_i(\xi))$ 是系统(4) 的两个行波解,其中 $i=1,2$.

定理7 假设存在 $\tilde{\xi}\in\mathbf{R}$, 使得 $U_1(\cdot+\tilde{\xi})\equiv U_2(\cdot)$.则 $V_1(\cdot+\tilde{\xi})\equiv V_2(\cdot)$.

引理7 假设 $U(\xi)$ 是系统(8) 的解, 则存在 $\rho_0=\rho_0(c,f)\in(0,1)$ 使得 $\forall\rho\in(0,\rho_0]$, $\xi\in\{\xi\mid U(\xi)>K_1-\rho_0\}$ 时, 有

$$(1+\rho)f(U(\xi),U(\xi-c\tau))-f((1+\rho)U(\xi),(1+\rho)U(\xi-c\tau))>0.$$

令 $U(\xi)$ 是系统(8) 的解.定义一个函数 $\varpi=\varpi(U):=\sup\{(U(\xi)/U'(\xi))\mid U(\xi)\leqslant K_1-\rho_0\}$, 其中 $\rho_0=\rho_0(c,f)\in(0,1)$ 且 $0\leqslant U(\xi)\leqslant K_1$.显然, $0<\varpi<+\infty$ 且 $U(\cdot)>0$.

引理8 假设存在一个 $\rho\in(0,\rho_0]$,使得 $(1+\rho)U_1(\cdot-\varpi\rho)\geqslant U_2(\cdot)$,其中 $\varpi=\varpi(U_1)$.则 $U_1(\cdot)\geqslant U_2(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}$ 上.

证明 定义函数 $M(\rho,\xi)=(1+\rho)U_1(\xi-\varpi\rho)-U_2(\xi)$.令 $\rho^*=\inf\{\rho>0\mid M(\rho,\xi)\geqslant 0,\ \forall\xi\in\mathbf{R}\}$.由连续性, 得 $M(\rho^*,\xi)\geqslant 0$.

下证 $\rho^*=0$.假定 $\rho^*\in(0,\rho_0]$.则 $M(\rho^*,\infty)=(1+\rho^*)U_1(\infty)-U_2(\infty)=K_1\rho^*>0$.由 ϖ 的定义及引理6, 有 $(\partial/\partial\rho)M(\rho,\xi)=U_1(\xi-\varpi\rho)-\varpi(1+\rho)U'(\xi-\varpi\rho)<0$.故存在 ξ_2, 使得 $M(\rho^*,\xi)$ 达到极小值, 即

$$\frac{\partial M(\rho^*,\xi_2)}{\partial\xi}=0,\ \frac{\partial^2(\rho^*,\xi_2)}{\partial\xi^2}\geqslant 0,$$

且 $M(\rho^*,\ \xi_2)=(1+\rho^*)U_1(\xi_2-\varpi\rho^*)-U_2(\xi_2)=0$.为了简便, 记 $\eta=\xi_2-\varpi\rho$.则 $U_2(\xi_2)=(1+\rho^*)U_1(\xi_2-\varpi\rho^*)=(1+\rho^*)U_1(\eta)$.将其代入式(8), 计算后整理得

$$\begin{aligned}0={}&c(1+\rho^*)U_1'(\eta)-d(1+\rho^*)[U_1(\eta+1)+U_1(\eta-1)-2U_1(\eta)]+\\&\gamma_1(1+\rho^*)U_1(\eta)-\frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\int_{-\infty}^{\xi_2}\mathrm{e}^{-(\gamma_2/c)(\xi_2-s)}U_1(\eta-s)\mathrm{d}s-\\&f((1+\rho^*U_1(\eta)),(1+\rho^*)U_1(\eta-c\tau))=\\&(1+\rho^*)f(U_1(\eta),U_1(\eta-c\tau))-\\&f((1+\rho^*)U_1(\eta),(1+\rho^*)U_1(\eta-c\tau)).\end{aligned}\tag{39}$$

记 $\tilde{S}(\eta):=(1+\rho)f(U_1(\eta),U_1(\eta-c\tau))-f((1+\rho)U_1(\eta),(1+\rho)U_1(\eta-c\tau))$.由引理8，对满足 $U(\xi)>K_1-\rho_0$ 的一切 η，均有 $\tilde{S}(\eta)>0$，矛盾.故 $\rho^*=0$.因此，$\forall\xi\in\mathbf{R}$，有 $U_1(\xi)\geqslant U_2(\xi)$. □

引理9　存在 $\xi^*\in\mathbf{R}$，使得 $U_1(\cdot+\xi^*)\equiv U_2(\cdot)$.

证明　不失一般性，假定 $U_1(0)=U_2(0)=K_1/2$.由定理3，得 $\lim_{\xi\to-\infty}(U_2(\xi)/U_1(\xi))=1$.故任给 $z>0$，有

$$\lim_{\xi\to-\infty}\frac{U_2(\xi-z)}{U_1(\xi)}=\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}<1.$$

固定 $z>0$，则存在一个足够大的常数 $M_0>0$，使得当 $\xi\leqslant-M_0$ 时，有 $U_1(\xi)\geqslant U_2(\xi-z)$.由于 $U(+\infty)=K_1$，取足够大的 $z_0>0$，使得 $(1+\rho_0)U_1(\xi-\varpi\rho_0)\geqslant U_2(\xi-z_0)$.由引理7，可得 $U_1(\xi)\geqslant U_2(\xi-z_0)$.

定义 $z^*:=\inf\{z>0\mid U_1(\xi)\geqslant U_2(\xi-z),\forall\ \xi\in\mathbf{R}\}$.下证 $z^*=0$.根据行波解的性质，将实轴分3部分讨论.

(i) 由于 $U_1(+\infty)=K_1$ 及 $U'(+\infty)=0$，则存在一个足够大的 $M_1>0$，使得对于任意的 $\rho\in(0,\rho_0]$，当 $\xi\in[M_1,+\infty)$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\{(1+\rho)U_1(\xi-2\varpi\rho)\}=$$
$$U_1(\xi-2\varpi\rho)-2\varpi(1+\rho)U_1'(\xi-2\varpi\rho)>0. \tag{40}$$

故当 $\xi\in[M_1,+\infty)$ 时，$(1+\rho)U_1(\xi-2\varpi\rho)\geqslant U_1(\xi)\geqslant U_2(\xi-z^*)$.

(ii) 由于 $\lim_{\xi\to-\infty}(U_2(\xi-z^*)/U_1(\xi-z^*/2))<1$，则存在 $M_2>0$，使得当 $\xi\in(-\infty,-M_2]$ 时，有 $U_1(\cdot-z^*/2)\geqslant U_2(\cdot-z^*)$.

(iii) 由于在 $\mathbf{R}$ 上 $U_1(\cdot)\geqslant U_2(\cdot-z^*)$.由强比较原理，得 $U_1(\cdot)>U_2(\cdot-z^*)$.注意到 U_1 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.可选择足够小的 $0<\varepsilon<\min\{z^*/(4\varpi),\rho_0\}$，使得当 $\xi\in[-M_2,M_1]$ 时，有 $U_1(\xi-2\varpi\varepsilon)\geqslant U_2(\xi-z^*)$.

综上所述，在 $\mathbf{R}$ 上 $(1+\varepsilon)U_1(\cdot-2\varpi\varepsilon)\geqslant U_2(\cdot-z^*)$.其中 $0<\varepsilon<\min\{z^*/(4\varpi),\rho_0\}$.由引理8，可得任给 $\xi\in\mathbf{R}$，则 $U_1(\xi-\varpi\varepsilon)\geqslant U_2(\xi-z^*)$.与 z^* 的定义矛盾.故 $z^*=0$.所以，$U_1(\cdot)\geqslant U_2(\cdot)$.而 $U_1(0)=U_2(0)=K_1/2$，由强比较原理，$U_1\equiv U_2$.证毕. □

基于以上结论，定理6显然成立.

4　稳 定 性

本节主要研究系统(4)的非临界行波解的渐近稳定性.假设 $(\phi(i+ct),\psi(i+ct))$ 为系统(4)的连接平衡点 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 且波速 $c>c^*$ 的波前解.

定理8　选取一个 $X_0\in\mathbf{Z}\cup\{-\infty\}$.令 $\partial\Omega_{X_0}:=\{(i,t):i+ct>X_0,t=0\}\cup\{(i,t):i+ct=X_0,t\geqslant0\}$ 且 $\Omega_{X_0}:=\{(i,t):=i+ct>X_0,t>0\}$.假设存在函数 $Q_i^{\pm}(t)$ 和 $R_i^{\pm}(t)$ 满足如下条件.

(i) $(Q_i^+(t),R_i^+(t))\geqslant(0,0)$ 且 $(Q_i^-(t),R_i^-(t))\leqslant(K_1,K_2)$，其中 $i\in\mathbf{Z}$，$t>0$.

(ii) $(Q_i^+(t),R_i^+(t))\geqslant(Q_i^-(t),R_i^-(t))$，其中 $i\in\mathbf{Z}$，$t>0$ 且 $i+ct\leqslant X_0$.

(iii) 任给 $(i,t)\in\partial\Omega_{X_0}$，有 $(Q_i^+(t),R_i^+(t))\geqslant(Q_i^-(t),R_i^-(t))$.

(iv) 任给 $(i,t)\in\Omega_{X_0}$，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Q_i^+(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant \sigma[Q_{i+1}^+(t)+Q_{i-1}^+(t)]+\beta_1Q_i^+(t)+\mu_1Q_i^+(t-\tau)+\nu R_i^+(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R_i^+(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant \beta_2Q_i^+(t)-\nu R_i^+(t),\end{cases} \tag{41}$$

且

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Q_i^-(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant \sigma[Q_{i+1}^-(t)+Q_{i-1}^-(t)]+\beta_1Q_i^-(t)+\mu_1Q_i^-(t-\tau)+\nu R_i^-(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R_i^-(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant \beta_2Q_i^-(t)-\nu R_i^-(t).\end{cases} \tag{42}$$

则对于任意的 $i\in\mathbf{Z},t\geqslant 0$，有 $Q_i^+(t)\geqslant Q_i^-(t)$ 且 $R_i^+(t)\geqslant R_i^-(t)$.

证明 对于任意的 $i\in\mathbf{Z},t\geqslant 0$，令 $Q_i(t)=Q_i^+(t)-Q_i^-(t)$，$R_i(t)=R_i^+(t)-R_i^-(t)$.则可得出以下结论.

(i) $Q_i(t)$ 和 $R_i(t)$ 分别存在一个下界 $-K_1$ 和 $-K_2$.

(ii) 对于任意的 $(i,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}_+$ 且 $i+ct\leqslant X_0$，有 $Q_i(t)\geqslant 0$，$R_i(t)\geqslant 0$.

(iii) 对于任意的 $i\in\mathbf{Z}$，有 $Q_i(0)\geqslant 0$，$R_i(0)\geqslant 0$.

(iv) 对于任意的 $i\in\mathbf{Z}$，$(i,t)\in\Omega_{X_0}$，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant \sigma[Q_{i+1}(t)+Q_{i-1}(t)]+\beta_1Q_i(t)+\mu_1Q_i(t-\tau)+\nu R_i(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R_i(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant \beta_2Q_i(t)-\nu R_i(t).\end{cases} \tag{43}$$

下面利用反证法证明该比较定理成立.不妨假设存在 $(j,t)\in\Omega_{X_0}$，$\omega>0$ 使得

$$-\omega\mathrm{e}^{2K_1t}<Q_j(t)\leqslant 0,\ \inf Q_j=-\omega\mathrm{e}^{2K_1t_0}, \tag{44}$$

$$-\omega\mathrm{e}^{2K_2t}<R_j(t)\leqslant 0,\ \inf R_j=-\omega\mathrm{e}^{2K_2t_0}, \tag{45}$$

其中 $j\in\mathbf{Z},t\in[0,t_0)$.故存在一个正 Lebesgue 测度的有界集 $\tilde{G}\subset\mathbf{Z}$，使得

$$Q_j(t_0)\leqslant-(7/8)\omega\mathrm{e}^{2K_1t_0},\ R_j(t_0)\leqslant-(7/8)\omega\mathrm{e}^{2K_2t_0}.$$

定义两个函数

$$z_j(t,\varrho):=-\omega\left(\frac{1}{2}+\varrho\varsigma(j)\right)\mathrm{e}^{2K_1t},\ w_j(t,\varrho):=-\omega\left(\frac{1}{2}+\varrho\varsigma(j)\right)\mathrm{e}^{2K_2t}, \tag{46}$$

其中 $\varrho\in[0,1]$，且 $j\in\mathbf{Z}$，$t\in[0,t_0]$.

假设 $\varsigma(j)$ 是一个光滑函数，且满足

$$\begin{cases}\min\limits_{j\in\mathbf{Z}}\varsigma(j)=1, \qquad \varsigma(k)=1,\ k\in\mathbf{Z},\\ \sup\limits_{j\in\mathbf{Z}}\varsigma(j)=\varsigma(\pm\infty)=3.\end{cases} \tag{47}$$

则对于任意的 $\varrho\in[0,1]$，且 $j\in\mathbf{Z}$，$t\in[0,t_0]$，有

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}z_j(t,\varrho)=-\omega\varsigma(j)\mathrm{e}^{2K_1t},\ \frac{\partial}{\partial\varrho}w_j(t,\varrho)=-\omega\varsigma(j)\mathrm{e}^{2K_2t}, \qquad j\in\mathbf{Z},\ t\in[t,t_0]. \tag{48}$$

同时根据式(46)，通过计算还可得到

$$z_j\left(t,\frac{1}{2}\right)=-\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varsigma(j)\right)\mathrm{e}^{2K_1t}=-\omega\mathrm{e}^{2K_1t}\leqslant Q_j(t), \tag{49}$$

$$w_j\left(t,\frac{1}{2}\right)=-\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varsigma(j)\right)e^{2K_2t}=-\omega e^{2K_2t}\leqslant R_j(t),\tag{50}$$

其中$j\in\mathbf{Z},t\in[0,t_0]$，且对于任意的$j\in\tilde{G}$：

$$z_j\left(t_0,\frac{1}{4}\right)=-\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\varsigma(j)\right)e^{2K_1t_0}=-\frac{3}{4}\omega e^{2K_1t_0}>Q_j(t_0),\tag{51}$$

$$w_j\left(t_0,\frac{1}{4}\right)=-\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\varsigma(j)\right)e^{2K_2t_0}=-\frac{3}{4}\omega e^{2K_2t_0}>R_j(t_0).\tag{52}$$

定义

$$\varrho^*:=\inf\left\{\varrho\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\,\middle|\,Q_j(t)\geqslant z_j(t,\varrho),\ R_j(t)\geqslant w_j(t,\varrho),\ j\in\tilde{G},t\in[0,t_0]\right\}.\tag{53}$$

显然，对于任意的$j\in\tilde{G}$，$t\in[0,t_0]$，有$Q_j(t)\geqslant z_j(t;\varrho^*)$且$R_j(t)\geqslant w_j(t;\varrho^*)$.

由于$Q_j(0)\geqslant 0>z_j(0;\varrho^*)$且$R_j(0)\geqslant 0>w_j(0;\varrho^*)$，则

$$\lim_{j\to\pm\infty}z_j(t;\varrho^*)\leqslant-\frac{5}{4}\omega e^{2K_1t}<Q_j(t),\ \lim_{j\to\pm\infty}w_j(t;\varrho^*)\leqslant-\frac{5}{4}\omega e^{2K_2t}<R_j(t),\tag{54}$$

其中，$j\in\mathbf{Z},t\in[0,t_0]$.另外，如果$j+ct\leqslant X_0$，可得

$$Q_j(t)\geqslant 0>z_j(t;\varrho^*),\ R_j(t)\geqslant 0>w_j(t;\varrho^*),\qquad (j,t)\in\mathbf{Z}\times[0,t_0].\tag{55}$$

为方便起见，记$\chi_j(t):=Q_j(t)-z_j(t,\varrho^*)$, $\varphi_j(t):=R_j(t)-w_j(t,\varrho^*)$.不难推断出，当$i+ct>X_0$时，$\chi_j(t)$或$\varphi_j(t)$可在$(k,t_1)\in\mathbf{Z}\times(0,t_0]$处达到其下确界0.因此

$$\chi_k(t_1)=0,\ \frac{d\chi}{dt}(k,t_1)\leqslant 0,\ \chi_{k\pm1}(t_1)\geqslant\chi_k(t_1),\tag{56}$$

$$\varphi_k(t_1)=0,\ \frac{d\varphi}{dt}(k,t_1)\leqslant 0,\ \varphi_{k\pm1}(t_1)\geqslant\varphi_k(t_1).\tag{57}$$

从而有以下不等式成立：

$$Q_{k\pm1}(t_1)\geqslant z_{k\pm1}(t_1;\varrho^*)+Q_k(t_1)-z_k(t_1;\varrho^*)\geqslant z_{k\pm1}(t_1;\varrho^*)+Q_k(t_1),\tag{58}$$

$$R_{k\pm1}(t_1)\geqslant w_{k\pm1}(t_1;\varrho^*)+R_k(t_1)-w_k(t_1;\varrho^*)\geqslant w_{k\pm1}(t_1;\varrho^*)+R_k(t_1).\tag{59}$$

选择$4\sigma+\beta_1+\mu_1+\nu<K_1<1/2t_1[\ln(2K_2/\beta_2)+2K_2t_1]$.则可得

$$\begin{aligned}
0\geqslant{}&\frac{d\chi}{dt}(k,t_1)=\frac{dQ}{dt}(k,t_1)-z_t(k,t_1;\varrho^*)\geqslant\\
&\sigma[Q_{k+1}(t_1)+Q_{k-1}(t_1)]+\beta_1Q_k(t_1)+\mu_1Q_k(t_1-\tau)+\nu R_k(t_1)-z_t(k,t_1;\varrho^*)\geqslant\\
&\sigma[z_{k+1}(t_1)+z_{k-1}(t_1)]+(2\sigma+\beta_1+\mu_1)Q_k(t_1)+\nu R_k(t_1)+\\
&2K_1\omega\left(\frac{1}{2}+\varrho^*\varsigma_k\right)e^{2K_1t_1}\geqslant\\
&\sigma\left[-\omega\left(\frac{1}{2}+\varrho^*\varsigma_{k+1}\right)e^{2K_1t_1}-\omega\left(\frac{1}{2}+\varrho^*\varsigma_{k-1}\right)e^{2K_1t_1}\right]+\\
&(2\sigma+\beta_1+\mu_1)z_k(t_1;\varrho^*)+\\
&\nu w_k(t_1;\varrho^*)+2K_1\omega\left(\frac{1}{2}+\varrho^*\varsigma_k\right)e^{2K_1t_1}\geqslant\\
&[K_1-4\sigma-\beta_1-\mu_1-\nu]\omega e^{2K_1t_1}>0,
\end{aligned}\tag{60}$$

或

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(k_1,t_1) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(k,t_1) - w_t(k,t_1;\varrho^*) \geqslant \\
\beta_2 Q_k(t_1) - \nu R_k(t_1) + 2K_2\omega\left(\frac{1}{2} + \varrho^* \varsigma(k)\right)\mathrm{e}^{2K_2t_1} = \\
\beta_2 z(k,t_1;\varrho^*) - \nu w(k,t_1;\varrho^*) + 2K_2\omega\mathrm{e}^{2K_2t_1} = \\
[2K_2 - \beta_2\mathrm{e}^{2(K_1-K_2)t_1}]\omega\mathrm{e}^{2K_2t_1} > 0,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

矛盾.因此，对于任意的 $(i,t) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{R}_+$，可得 $Q_i^+ \geqslant Q_i^-$ 且 $R_i^+ \geqslant R_i^-$.证毕. □

接下来，给出另一种定义 c^* 的方式.考虑系统(4)在(0,0)处的线性化系统：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = (\Delta u)_i(t) + \partial_1 f(0,0)u_i(t) + \partial_2 f(0,0)\,u_i(t-\tau) - \\
\qquad \gamma_1 u_i(t) + \gamma_2 v_i(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma_1 u_i(t) - \gamma_2 v_i(t).
\end{cases}
\tag{62}
$$

将 $(u_i(t),v_i(t)) = \mathrm{e}^{\lambda i}(u_1(t),u_2(t))$，$\lambda > 0$，代入到式(62)中得

$$
\begin{cases}
u_1'(t) = d[\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} - 2]u_1(t) + \partial_1 f(0,0)u_1(t) + \partial_2 f(0,0)u_1(t-\tau) - \\
\qquad \gamma_1 u_1(t) + \gamma_2 u_2(t), \\
u_2'(t) = \gamma_1 u_1(t) - \gamma_2 u_2(t).
\end{cases}
\tag{63}
$$

因为式(63)是合作且不可约的，从而其特征值问题

$$
\begin{cases}
M(\lambda)v_1 = d[\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} - 2]v_1 + \partial_1 f(0,0)v_1 + \partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-M(\lambda)\tau}v_1 - \\
\qquad \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2, \\
M(\lambda)v_2 = \gamma_1 v_1 - \gamma_2 v_2
\end{cases}
\tag{64}
$$

存在实根 $M(\lambda)$，且 $M(\lambda)$ 大于其他实根的实部(文献[24]中定理 5.5.1).进一步，对应到 $M(\lambda)$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}(\lambda) = (v_1(\lambda), v_2(\lambda))$ 是强正的.定义 $\Phi(\lambda) = M(\lambda)/\lambda$.由式(64)的第一个方程，有

$$
\frac{M(\lambda)}{\lambda} \geqslant \frac{d[\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} - 2]}{\lambda} + \frac{\partial_1 f(0,0) - \gamma_1}{\lambda} \to \infty, \qquad \forall \lambda > 0,
\tag{65}
$$

从而 $\lim_{\lambda\to\infty}\Phi(\lambda) = \infty$.由文献[25]中引理 3.8，进一步有以下结论.

命题 1

(i) 存在 $\lambda^* \in (0,\infty)$ 使得 $c_* := \Phi(\lambda^*) = \inf_{\lambda>0}\Phi(\lambda)$.

(ii) $\lim_{\lambda\to0+}\Phi(\lambda) \to \infty$ 且 $\lim_{\lambda\to\infty}\Phi(\lambda) = \infty$.

(iii) $\Phi(\lambda)$ 递减趋于 0.

(iv) $\Phi'(\lambda)$ 在 $(0,\infty)$ 至多改变一次符号.

由以上结论，不难证明：

引理 10 $c_* = c^*$.

由命题 1 及引理 10，可得对 $\forall c > c_*$，存在 $0 < \lambda_1 = \lambda_1(c) < \lambda_* < \lambda_2 = \lambda_2(c) < \infty$ 使得 $c = \Phi(\lambda_1)$ 且 $c > \Phi(\lambda)$，其中 $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)$.令 $\boldsymbol{v}(\lambda_1) = (v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_1))$ 为 $M(\lambda_1)$ 的特征向量.

现在考虑系统(4)的空间齐次系统在 (K_1,K_2) 处的线性系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\partial_1 f(K_1,K_1)u(t)+\partial_2 f(K_1,K_1)u(t-\tau)-\gamma_1 u(t)+\gamma_2 v(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma_1 u(t)-\gamma_2 v(t).\end{cases}\tag{66}$$

由于式(66)是合作不可约的，故其特征问题

$$\begin{cases}\tilde\lambda w_1=\partial_1 f(K_1,K_1)w_1+\partial_2 f(K_1,K_1))\mathrm{e}^{-\tilde\lambda\tau}w_1-\gamma_1 w_1+\gamma_2 w_2,\\ \tilde\lambda w_2=\gamma_1 w_1-\gamma_2 w_2\end{cases}\tag{67}$$

存在实根 $\tilde\lambda$ 及相应的正特征向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)$（文献[24]中定理 5.5.1）.

引理 11 $\tilde\lambda<0$.

证明 采用反证法，假设 $\tilde\lambda\geqslant 0$.则由式(67)，有

$$\begin{cases}\gamma_1 w_1-\gamma_2 w_2\geqslant 0,\\ \partial_1 f(K_1,K_1)w_1+\partial_2 f(K_1,K_1)\mathrm{e}^{-\tilde\lambda\tau}w_1-\gamma_1 w_1+\gamma_2 w_2\geqslant 0.\end{cases}\tag{68}$$

因此，可得

$$\begin{aligned}&\partial_1 f(K_1,K_1)w_1+\partial_2 f(K_1,K_1)w_1\geqslant\\&\qquad\partial_1 f(K_1,K_1)w_1+\partial_2 f(K_1,K_1)\mathrm{e}^{-\tilde\lambda\tau}w_1-\gamma_1 w_1+\gamma_2 w_2\geqslant 0,\end{aligned}\tag{69}$$

故 $\partial_1 f(K_1,K_1)+\partial_2 f(K_1,K_1)\geqslant 0$.与假设条件 $\partial_1 f(K_1,K_1)+\partial_2 f(K_1,K_1)<0$ 矛盾.所以，$\tilde\lambda<0$.证毕. □

假设条件(A1)、(A2)成立，且 $(\phi(i+ct),\psi(i+ct))$ 为系统(4) 连接平衡点 $\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的行波解.取 $\bar\mu\in(0,-\tilde\lambda)$.由式(67)，则存在 $\epsilon_1>0$，使得

$$\bar\mu w_1\geqslant\epsilon_1 w_1+\epsilon_1\mathrm{e}^{-\bar\mu\tau}w_1.\tag{70}$$

注意到 $(\phi(-\infty),\phi(+\infty))=(0,K_1)$.因此，可取足够大的 $L_0>0$，使得以下结论成立：

$$(\partial_1 f(\eta_1,\eta_2),\partial_2 f(\eta_1,\eta_2))\leqslant(\partial_1 f(K_1,K_1)+\epsilon_1,\partial_2 f(K_1,K_1)+\epsilon_1),\quad i+ct>L_0,\tag{71}$$

$$(\partial_1 f(\eta_1,\eta_2),\partial_2 f(\eta_1,\eta_2))\leqslant(\partial_1 f(0,0),\partial_2 f(0,0)),\qquad i+ct\leqslant L_0,\tag{72}$$

其中 $\quad(\phi(i+ct),\phi(i+c(t-\tau)))\leqslant(\eta_1,\eta_2)\leqslant(K_1,K_1)$.

以下通过定义合适的权函数，结合比较定理，讨论当初值函数无限趋近于系统(4)的某一波前解时，满足其初值条件的解与该波前解的关系.

定理 9 给定一个充分小的 $\epsilon>0$.定义如下权函数：

$$\omega^\epsilon(i):=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\lambda_\epsilon(i-L_0)}, & i\leqslant L_0,\\ 1, & i>L_0,\end{cases}\tag{73}$$

其中 $\lambda_\epsilon=\lambda_1+\epsilon$.如果初值 (u_i^0,v_i^0) 满足 $(0,0)\leqslant(u_i^0,v_i^0)\leqslant(K_1,K_2)$，且对于任意的 $i\in\mathbf{Z}$，有 $[u^0(\cdot)-\phi(\cdot)]\omega^\epsilon(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{Z})$，$[v^0(\cdot)-\psi(\cdot)]\omega^\epsilon(\cdot)\in L^\infty(\mathbf{Z})$.则可得到以下结论.

(i) 系统(4)存在唯一解 $(u_i(t;u^0),v_i(t;v^0))$ 且满足 $0\leqslant u_i(t;u^0)\leqslant K_1,0\leqslant v_i(t;v^0)\leqslant K_2$，$i\in\mathbf{Z}$，$t>0$.

(ii) 存在 $\mu_0>0$，使得

$$\begin{cases}\sup\limits_{i\in\mathbf{Z}}|u_i(t;u^0)-\phi(i+ct)|\leqslant M^*\mathrm{e}^{-\mu_0 t},\\ \sup\limits_{i\in\mathbf{Z}}|v_i(t;u^0)-\psi(i+ct)|\leqslant M^*\mathrm{e}^{-\mu_0 t},\end{cases}\quad t>0,\tag{74}$$

其中 M^* 为正常数.

证明 以下证明分 3 步.

1) 将所证问题转化为研究 $(U_i^{\pm}(t), V_i^{\pm}(t))$ 可指数收敛于 $(\phi(i+ct), \psi(i+ct))$.

对任意的 $i \in \mathbf{Z}$, 令

$$\begin{cases} U_i^+ := \max\{u_i^0, \phi_i\},\ U_i^- := \min\{u_i^0, \phi_i\}, \\ V_i^+ := \max\{v_i, \psi_i\},\ V_i^- := \min\{v_i^0, \psi_i\}. \end{cases} \tag{75}$$

假设 $(U_i^{\pm}(t), V_i^{\pm}(t))$ 是系统(4) 满足初值条件 $(U_i^{\pm}, V_i^{\pm})$ 的解.则由比较原理, 可得

$$0 \leqslant U_i^-(t) \leqslant u_i(t), \phi(i+ct) \leqslant U_i^+(t) \leqslant K_1, \tag{76}$$

$$0 \leqslant V_i^-(t) \leqslant v_i(t), \psi(i+ct) \leqslant V_i^+(t) \leqslant K_2, \tag{77}$$

其中 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$.故以下不等式成立:

$$\| u_i(t;u^0) - \phi(i+ct) \| \leqslant \max\{ \| U_i^+(t) - \phi(i+ct) \|, \| U_i^-(t) - \phi(i+ct) \| \}, \tag{78}$$

$$\| v_i(t;v^0) - \psi(i+ct) \| \leqslant \max\{ \| V_i^+(t) - \psi(i+ct) \|, \| V_i^-(t) - \psi(i+ct) \| \}, \tag{79}$$

其中 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$.

因此, 要证结论成立, 只需证 $(U_i^{\pm}(t), V_i^{\pm}(t))$ 可以指数形式收敛于 $(\phi(i+ct), \psi(i+ct))$.显然, 仅证 $(U_i^+(t), V_i^+(t))$ 收敛于 $(\phi(i+ct), \psi(i+ct))$ 即可.

2) 证明 $(U_i^+(t), V_i^+(t))$ 收敛于 $(\phi(i+ct), \psi(i+ct))$.

记

$$W_i(t) := U_i^+(t) - \phi(i+ct), Z_i(t) := V_i^+(t) - \psi(i+ct),$$

其中 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$.容易看出,任给 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$,有 $W_i(t) \geqslant 0, Z_i(t) \geqslant 0$ 且 $0 \leqslant W_i(0) \leqslant | u_i^0 - \phi_i |$, $0 \leqslant Z_i(0) \leqslant | v_i^0 - \psi_i |$.故 $W_i(0)w^{\epsilon}(i)$ 和 $Z_i(0)w^{\epsilon}(i)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上是一致有界的.

下面分两种情况讨论.

① $i + ct \leqslant L_0$.由于任给 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$, 均有 $W_i(t) \geqslant 0$, $Z_i(t) \geqslant 0$.由式(72), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U_i^+(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\phi(i+ct)}{\mathrm{d}t} = \\ & d[W_{i+1}(t) + W_{i-1}(t) - 2W_i(t)] - \gamma_1 W_i(t) + \gamma_2 Z_i(t) + \\ & f(U_i^+(t), U_i^+(t-\tau)) - f(\phi(i+ct), \phi(i+c(t-\tau))) \leqslant \\ & d[W_{i+1}(t) + W_{i-1}(t)] + (\partial_1 f(0,0) - 2d - \gamma_1) W_i(t) + \\ & \partial_2 f(0,0) W_i(t-\tau) + \gamma_2 Z_i(t), \end{aligned} \tag{80}$$

其中 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$.当然, 还有

$$\frac{\mathrm{d}Z_i(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma_1 W_i(t) - \gamma_2 Z_i(t). \tag{81}$$

令 $\boldsymbol{v}(\lambda_\epsilon) = (v_1(\lambda_\epsilon), v_2(\lambda_\epsilon))$ 为 $M(\lambda_\epsilon)$ 的特征向量.记 $M(\lambda_\epsilon) := M_\epsilon$.基于 $W_i(0)w^{\epsilon}(i)$ 和 $Z_i(0)w^{\epsilon}(i)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的有界性, 任给 $i \in \mathbf{Z}$, $t > 0$, 总可以找到一个充分大的 $C_1 > 0$ 使得

$$C_1 v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon (i - L_0)} \geqslant W_i(0),\ C_1 v_2(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon (i - L_0)} \geqslant Z_i(0), \qquad i \in \mathbf{Z}. \tag{82}$$

定义一个函数矩阵

$$\begin{pmatrix} \bar{W}_i(t) \\ \bar{Z}_i(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C_1 v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon (i - L_0) + M_\epsilon t} \\ C_1 v_2(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon (i - L_0) + M_\epsilon t} \end{pmatrix}, \tag{83}$$

其中 $i \in \mathbf{Z}$, $t \geqslant 0$.则任给 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$, 有

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\bar{W}_i(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{Z}_i(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 M_\epsilon v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon t} \\ C_1 M_\epsilon v_2(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon t} \end{pmatrix}. \tag{84}$$

注意到 $M_\epsilon \boldsymbol{v}(\lambda_\epsilon) = c\lambda_\epsilon \boldsymbol{v}(\lambda_\epsilon)$, 结合式(64)可得

$$\begin{aligned}
&C_1 M_\epsilon v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon t} = \\
&\quad d[C_1 \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i+1-L_0)+M_\epsilon t} + C_1 \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-1-L_0)+M_\epsilon t}] + (\partial_1 f(0,0) - 2d - \gamma_1)\bar{W}_i(t) + \\
&\quad \partial_2 f(0,0) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0-c\tau)+M_\epsilon t} + \gamma_2 \bar{Z}_i(t) = \\
&\quad d[\bar{W}_{i+1}(t) + \bar{W}_{i-1}(t)] + (\partial_1 f(0,0) - 2d - \gamma_1)\bar{W}_i(t) + \\
&\quad \partial_2 f(0,0) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon(t-\tau)} + \gamma_2 \bar{Z}_i(t) = \\
&\quad d[\bar{W}_{i+1}(t) + \bar{W}_{i-1}(t)] + (\partial_1 f(0,0) - 2d - \gamma_1)\bar{W}_i(t) + \\
&\quad \partial_2 f(0,0) \bar{W}_i(t-\tau) + \gamma_2 \bar{Z}_i(t).
\end{aligned} \tag{85}$$

且 $C_1 M_\epsilon v_2(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon t} = \gamma_1 \bar{W}_i(t) - \gamma_2 \bar{Z}_i(t)$.故 $X_0 = -\infty$, $\sigma = d$, $\beta_1 = \partial_1 f(0,0) - 2d - \gamma_1$, $\mu_1 = \partial_2 f(0,0)$ 及 $\nu = \gamma_2$.依据定理 8, 得任给 $i \in \mathbf{Z}$, $t \geqslant 0$, 有

$$W_i(t) \leqslant \bar{W}_i(t),\ Z_i(t) \geqslant \bar{Z}_i(t). \tag{86}$$

因此, 对于任意的 $i \in \mathbf{Z}, t \geqslant 0$, 当 $i + ct \leqslant L_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&W_i(t) \leqslant C_1 M_\epsilon v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon t} \leqslant \\
&\quad C_1 M_\epsilon v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i+ct-L_0)} \mathrm{e}^{-(c\lambda_\epsilon - M_\epsilon)t} \leqslant C_1 v_1(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{-(c\lambda_\epsilon - M_\epsilon)t},
\end{aligned} \tag{87}$$

$$Z_i(t) = C_1 M_\epsilon v_2(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{\lambda_\epsilon(i-L_0)+M_\epsilon t} \leqslant C_1 v_2(\lambda_\epsilon) \mathrm{e}^{-(c\lambda_\epsilon - M_\epsilon)t}. \tag{88}$$

② $i + ct > L_0$.回顾式(72), 则对于任意的 $(i,t) \in \Omega_{L_0}$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}W_i(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant d[W_{i+1}(t) + W_{i-1}(t) - 2W_i(t)] - \gamma_1 W_i(t) + \gamma_2 Z_i(t) + \\
&\quad (\partial_1 f(K_1,K_1) + \epsilon_1) W_i(t) + (\partial_2 f(K_1,K_1) + \epsilon_1) W_i(t-\tau) = \\
&\quad d[W_{i+1}(t) + W_{i-1}(t)] + [\partial_1 f(K_1,K_1) + \epsilon_1 - \gamma_1 - 2d] W_i(t) + \\
&\quad (\partial_2 f(K_1,K_1) + \epsilon_1) W_i(t-\tau) + \gamma_2 Z_i(t).
\end{aligned} \tag{89}$$

令 $\mu_0 = \min\{c\lambda_\epsilon - M_\epsilon, -\tilde{\lambda} - \bar{\mu}\}$.选择一个足够大的 $C_2 > 0$, 使得 $C_2 \boldsymbol{w} \geqslant \max\{C_1 \boldsymbol{v}(\lambda_\epsilon), K_1\}$, 其中 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$.定义

$$\begin{pmatrix} \hat{W}_i(t) \\ \hat{Z}_i(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C_2 w_1 \mathrm{e}^{-\mu_0 t} \\ C_2 w_2 \mathrm{e}^{-\mu_0 t} \end{pmatrix}, \tag{90}$$

其中 $i \in \mathbf{Z}, t \geqslant 0$.显然,当 $(i,t) \in \partial\Omega_{L_0}$ 且 $i + ct \leqslant L_0$ 时,有 $W_i(t) \leqslant \hat{W}_i(t)$, $Z_i(t) \leqslant \hat{Z}_i(t)$.由于 $\mu_0 \leqslant -\tilde{\lambda} - \bar{\mu} \leqslant -\tilde{\lambda}$, 进一步, 计算可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\hat{W}_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 \hat{W}_i(t) \geqslant (\tilde{\lambda} + \bar{\mu}) \hat{W}_i(t) = \\
&\quad \partial_1 f(K_1,K_1) \hat{W}_i(t) + (\bar{\mu} - \gamma_1) \hat{W}_i(t) + \gamma_2 \hat{Z}_i(t) + C_2 w_1 \mathrm{e}^{-\mu_0 t} \partial_2 f(K_1,K_1) \mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}\tau} \geqslant
\end{aligned}$$

$$\partial_1 f(K_1,K_1)\hat{W}_i(t) + (\bar{\mu} - \gamma_1)\hat{W}_i(t) + \gamma_2\hat{Z}_i(t) + \partial_2 f(K_1,K_1)\hat{W}_i(t-\tau) + d[\hat{W}_{i+1}(t) + \hat{W}_{i-1}(t) - 2\hat{W}_i(t)]. \tag{91}$$

注意到式(70)成立.因此

$$\frac{\mathrm{d}\hat{W}_i(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant d[\hat{W}_{i+1}(t) + \hat{W}_{i-1}(t)] + [\partial_1 f(K_1,K_1) + \epsilon_1 - \gamma_1 - 2d]\hat{W}_i(t) + (\partial_2 f(K_1,K_1) + \epsilon_1)\hat{W}_i(t-\tau) + \gamma_2\hat{Z}_i(t), \tag{92}$$

其中 $i \in \mathbf{Z}, t > 0$, 且由式(67)有

$$\frac{\mathrm{d}\hat{Z}_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu_0\hat{Z}_i(t) \geqslant (\tilde{\lambda} + \bar{\mu})\hat{Z}_i(t) \geqslant \gamma_1\hat{W}_i(t) - \gamma_2\hat{Z}_i(t). \tag{93}$$

故 $\sigma = d$, $\beta_1 = \partial_1 f(K_1,K_1) + \epsilon_1 - 2d - \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_1$, $\mu_1 = \partial_2 f(K_1,K_1) + \epsilon_1$ 及 $\nu = \gamma_2$.依据定理 8, 可得 $W_i(t) \leqslant \hat{W}_i(t)$, $Z_i(t) \leqslant \hat{Z}_i(t)$.因此, 对于任意的$(i,t) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{R}_+$, 当 $i + ct > L_0$ 时,有

$$W_i(t) \leqslant C_2 w_1 \mathrm{e}^{-\mu_0 t}, \ Z_i(t) \leqslant C_2 w_2 \mathrm{e}^{-\mu_0 t}. \tag{94}$$

③ 综上, 令 $M^* := \max\{C_1\boldsymbol{\nu}(\lambda_\epsilon), C_2\boldsymbol{w}\}$ 则有

$$0 \leqslant \| W_i(t) \| = \| U_i^+(t) - \phi(i+ct) \| \leqslant M^*\mathrm{e}^{-\mu_0 t}, \tag{95}$$

$$0 \leqslant \| Z_i(t) \| = \| V_i^+(t) - \psi(i+ct) \| \leqslant M^*\mathrm{e}^{-\mu_0 t}. \tag{96}$$

因此, $(W_i^+(t), Z_i^+(t))$ 指数收敛于$(\phi(i+ct), \psi(i+ct))$.证毕. □

5 结　论

近年来, 大量的数学工作者致力于研究反应扩散系统的行波解, 同时也取得了许多有意义的结果, 例如文献[1-2,4-6,8-19,22]等.本文研究了一维空间格上具有静止阶段的时滞反应扩散系统的行波解的定性性质.

在单稳的假设下, 首先建立了 $c \geqslant c^*$ 时, 系统(4)的行波解的存在性.其次, 利用 Ikehara 定理和滑动技巧证明了行波解的渐近行为、单调性和唯一性.关于系统(4)的非临界波前解的指数渐近稳定性是本文的一大难点.由于单稳型系统(4)存在一个不稳定的平衡点.因此, 稳定性的研究较双稳型系统更为困难.考虑到系统(4)为合作系统, 受 Wu 等[9]的启发,通过建立与系统(4)相关的线性系统的比较定理并构造合适的权函数, 证明了所有非临界波前解的指数收敛性.相比经典的加权能量法而言, 该方法避免了构造先验估计式, 更为简洁.

在实际问题中,繁殖函数$f(u,v)$关于第二个变量不一定是单调的,例如函数$f(u,v) = -d(u) + b(v)\mathrm{e}^{-\mu^0\tau}$.在这种情形下,系统(4)是非拟单调的, 对其行波解的定性性质研究,特别是稳定性的研究是一个有意义的问题.

参考文献(References):

[1] CHEN Xinfu, GUO Jongshenq. Existence and asymptotic stability of traveling waves of discrete quasilinear monostable equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2002, **184**(2): 549-569.

[2] HADELER K P, LEWIS M A. Spatial dynamics of the diffusive logistic equation with a sedentary compartment[J]. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 2002, **10**(4): 473-499.

[3] HSU Szebi, ZHAO Xiaoqiang. Spreading speeds and traveling waves for nonmonotone integrodifference equations[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2008, **40**(2): 776-789.

[4] LEWIS M A, SCHMITZ G. Biological invasion of an organism with separate mobile and stationary states: modeling and analysis[J]. *Forma*, 1996, **11**(1): 1-25.

[5] LI Wanyong, LIN Guo, RUAN Shigui. Existence of travelling wave solutions in delayed reaction diffusion systems with applications to diffusion competition systems[J]. *Nonlinearity*, 2006, **19**(6): 1253-1273.

[6] MA Shiwang. Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem[J]. *Journal of Differential Equations*, 2001, **171**(2): 294-314.

[7] MEI Ming, OU Chunhua, ZHAO Xiaoqiang. Global stability of monostable traveling waves for nonlocal time-delayed reaction-diffusion equations[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, **42**(6): 2762-2790.

[8] WU Shiliang, LIU Sanyang. Uniqueness of non-monotone traveling waves for delayed reaction-diffusion equations[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2009, **22**(7): 1056-1061.

[9] WU Shiliang, CHEN Guangsheng. Uniqueness and exponential stability of traveling wave fronts for a multi-type SIS nonlocal epidemic model[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2017, **36**: 267-277.

[10] WU Shiliang, HSU Chenghsiung, XIAO Yanyu. Global attractivity, spreading speeds and traveling waves of delayed nonlocal reaction-diffusion systems[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **258**(4): 1058-1105.

[11] WANG Zhicheng, LI Wantong, RUAN Shigui. Travelling fronts in monostable equations with nonlocal delayed effects[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2008, **20**(3): 573-607.

[12] WU Jianhong, ZOU Xingfu. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2001, **13**(3): 651-687.

[13] ZHAO Xiaoqiang, WANG Wendi. Fisher waves in an epidemic model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series B*), 2004, **4**(4): 1117-1128.

[14] ZHAO Haiqin, WU Shiliang. Wave propagation for a reaction-diffusion model with a quiescent stage on a 2D spatial lattice[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, **12**(2): 1178-1191.

[15] ZHAO Haiqin, WU Shiliang, LIU Sanyang. Pulsating traveling fronts and entire solutions in a discrete periodic system with a quiescent stage[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(8): 2164-2176.

[16] HADELER K P, HILLEN T, LEWIS M A. Biological modeling with quiescent phases[M]//COSNER C, CANTRELL S, RUAN S, ed. *Spatial Ecology*. Taylor and Francis. 2009.

[17] WU Shiliang, ZHAO Haiqin. Traveling fronts for a delayed reaction-diffusion system with a quiescent stage[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(9): 3610-3621.

[18] CHEN Xinfu, GUO Jongshenq. Uniqueness and existence of traveling waves for discrete quasilinear monostable dynamics[J]. *Mathematische Annalen*, 2003, **326**(1): 123-146.

[19] GUO Jongshenq, WU Changhong. Wave propagation for a two-component lattice dynamical system arising in strong competition models[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **250**(8): 3504-3533.

[20] GUO Jongshenq, WU Changhong. Existence and uniqueness of traveling waves for a monostable 2-D lattice dynamical system[J]. *Osaka Journal of Mathematics*, 2008, **45**(2): 327-346.

[21] GUO Jongshenq, WU Chinchin. Uniqueness and stability of traveling waves for periodic monostable lattice dynamical system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2009, **246**(10): 3818-3833.

[22] CARR J, CHMAJ A. Uniqueness of travelling waves for nonlocal monostable equations[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, **132**(8): 2433-2439.

[23] WIDDER D V. *The Laplace Transform*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1941.

[24] SMITH H L. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*[M]. *Mathematical Surveys and Monographs*. Vol **41**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1995.

[25] LIANG Xing, ZHAO Xiaoqiang. Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2007, **60**(1): 1-40.

Traveling Waves of a Delayed Differential System in a Lattice

CAO Huarong, WU Shiliang

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *P.R.China*)

Abstract: The qualitative properties of traveling waves of a delayed differential system in a lattice with a quiescent stage were addressed. Under monostable and quasi-monotone assumptions, the existence of the traveling wave solutions were first established. Then, the asymptotic behavior, monotonicity and uniqueness of all wave profiles were proved. The exponential asymptotic stability of all non-critical traveling fronts was finally proved.

Key words: traveling wave solution; lattice differential system; quiescent stage; delay

引用本文/Cite this paper:

曹华荣, 吴事良. 一维格上时滞微分系统的行波解[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(5): 592-610.

CAO Huarong, WU Shiliang. Traveling waves of a delayed differential system in a lattice[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 592-610.