

# 尖锐 V 型切口混凝土梁的应力强度因子研究\*

童谷生, 胡宗棋, 徐鹏华

(华东交通大学 土木建筑学院, 南昌 330013)

**摘要:** 对含尖锐 V 型切口构件的破坏评估通常是利用切口应力强度因子来确定, 切口应力强度因子指的是切口周围渐进线弹性应力场强度. 对于含尖锐 V 型切口构件来说, 单位切口应力强度因子的大小是由 V 型切口角度决定. 应变能量密度准则是根据一定体积内应变能的密度是否达到临界值来判断构件断裂破坏的准则, 当这个体积足够小不影响 Williams 方程的高阶次解时, 应变能量密度准则就能通过切口应力强度因子进行表示. 考虑 I 型荷载条件下, 分别采用平均应变能量密度准则和 Carpinteri 有限断裂力学方法计算 V 型切口应力强度因子, 两者的理论取值非常接近. 同时通过试验, 证明两种断裂准则给出的切口应力强度因子的理论值与实验数据吻合程度较好.

**关键词:** 应变能量密度准则; 有限断裂力学; 切口应力强度因子; V 型切口; 比例参数

中图分类号: O344

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380159

## 引言

尖锐 V 型切口是指切口底部的半径为 0 或接近 0 的 V 型切口, 含尖锐 V 型切口构件的切口尖端存在应力奇异性. 而目前还未得到一种能简单、可靠地判断含应力奇异性点的脆性或准脆性构件的失效破坏准则. 按照线弹性理论, 在构件应力奇异性点处应力大小为无限大, 传统的应力准则不再适用. 目前的方法是引入切口应力强度因子来表征尖锐 V 型切口尖端的应力场, 切口应力强度因子依赖于荷载型式、切口角度、构件形状. 切口应力强度因子经常用来评估静力条件下含尖锐 V 型切口的脆性材料破坏<sup>[1-3]</sup>, 也可用于疲劳荷载条件下含尖锐 V 型切口构件破坏研究<sup>[4-5]</sup>. 疲劳荷载条件下含 V 型切口构件的寿命主要受 V 型切口奇异性区域内的微裂缝起裂和发展决定, 因此切口应力强度因子也可以应用于评估疲劳荷载条件下构件寿命, 如构件焊接连接处<sup>[6-8]</sup>的使用寿命预测.

近年来, 有学者应用两种新型的破坏准则包括应变能量密度 (SED) 准则<sup>[9-13]</sup> 和有限断裂力学 (FFM) 准则, 对含尖锐 V 型切口的构件破坏进行研究. 平均应变能量密度 (MSED) 准则最早是由 Lazzarin 等<sup>[9]</sup> 提出, 是将围绕 V 型切口的控制体的应变能量密度平均值作为关键参数. 能量密度方法不能直接用于尖锐的 V 型切口尖端, 因为应力和能量密度都趋于无限大. 而如果考虑在尖锐的 V 型切口附近, 足够小而不为零的体积内, 它的能量密度值为有限大, 问题就转化为求材料和荷载类型的特征体积<sup>[12]</sup>. Treifi 等<sup>[14]</sup> 运用能量密度准则将裂缝两边分离的体积

\* 收稿日期: 2017-06-06; 修订日期: 2018-01-11

基金项目: 国家自然科学基金(11242006;11462005)

作者简介: 童谷生(1962—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: tonggusheng@126.com).

联合起来,计算各向异性材料或者双材料板在 I、II、III 型荷载模型下的应力强度因子或者切口应力强度因子. Davis 等<sup>[15]</sup>介绍了基于能量理论在一阶能量释放率条件下模拟了裂缝三维扩展. Carpinteri 等<sup>[16]</sup>利用 FFM 方法来解决含 V 型切口的断裂问题,关于平面复合断裂问题的研究也有相关报道<sup>[17-18]</sup>. 但是利用 MSED 准则和 FFM 准则对含尖锐 V 型切口的素混凝土类构件的强度研究还尚未见报道.

本文利用 MSED 准则和 FFM 准则的切口应力强度因子表达式,通过插值计算得到了素混凝土的切口应力强度因子计算的相关参数,建立了含尖锐 V 型切口构件在荷载作用下的广义应力强度因子表达式之间的定量联系. 为了对比 MSED 准则和 FFM 准则给出的切口应力强度因子表达式的有效性,利用相关文献的数据进行了验证,同时还通过自行设计的几组含尖锐 V 型切口素混凝土试件的三点弯曲实验进行验证.

## 1 含尖锐 V 型切口构件破坏准则

为研究含 V 型切口构件破坏,下面先介绍 MSED 准则和 FFM 准则,然后讨论两种准则的关系.

### 1.1 MSED 准则

根据 Lazzarin 等<sup>[9]</sup>的 MSED 准则,当 V 型切口尖端半径  $R_c$  的控制体积内的 MSED 达到临界值时,材料发生脆性破坏,按这一准则给出的 V 型切口应力强度因子为

$$K_{Ic} = \left[ \left( \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \right)^{(1-\lambda_1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2e_1}} \right] \cdot K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1}, \quad (1)$$

式中,  $\nu$  为材料 Poisson(泊松)比,  $\lambda_1$  为 Williams 的 I 型荷载条件特征值,其值如图 1 所示,  $K_{Ic}$  为材料断裂韧度,  $\sigma_c$  为材料极限抗拉强度,  $e_1$  为关于 V 型切口角度的函数<sup>[12-13]</sup>.

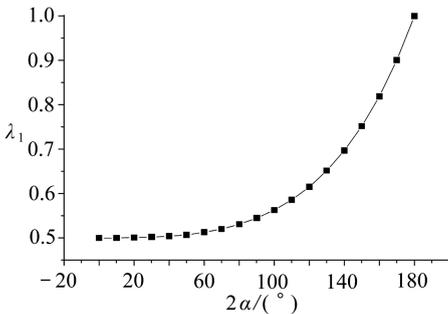


图 1 奇异指数  $\lambda_1$  随切口角度变化取值

Fig. 1 The value of singular exponent  $\lambda_1$  vs. the notch angle

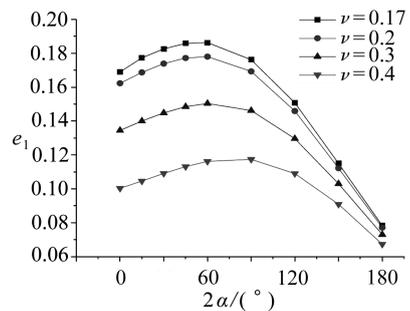


图 2 参数  $e_1$  随切口角度取值

Fig. 2 The value of  $e_1$  vs. the notch angle

在平面应变条件下的  $e_1$  取值在图 2 中给出,由于本文实验材料采用素混凝土,素混凝土 Poisson 比  $\nu = 0.16 \sim 0.18$ ,在本文中取素混凝土 Poisson 比  $\nu = 0.17$ ,故在图 2 中还给出了  $\nu = 0.17$  的值,考虑到混凝土试件不一定适用文献[13]给出的  $e_1$  计算公式,其  $e_1$  值为根据  $\nu = 0.2, 0.3, 0.4$  的取值用 MATLAB 软件进行插值计算得来.

### 1.2 Carpinteri 有限断裂力学准则

Carpinteri 等<sup>[16]</sup>基于 FFM 概念提出了含尖锐 V 型切口破坏准则:试件破坏时切口尖端裂

缝增量为  $\Delta_{SE}$ 。在 FFM 概念中,需要同时满足应力准则和能量准则。平均应力准则为,切口裂缝表面应力分量在裂缝扩展长度为  $\Delta_{SE}$  上的平均应力大于材料极限抗拉强度  $\sigma_c$  时,材料发生破坏;能量准则为,当裂缝扩展长度为  $\Delta_{SE}$  上的能量释放率达到极限值时,材料发生破坏。平面应变条件下,由 Irwin 关系可知能量释放率  $G$  为应力强度因子  $K_I$  的函数,因此可以得到能量准则的简化方程(3)。进而得到含尖锐 V 型切口构件断裂破坏的 FFM 判别准则,即同时满足式(2)、(3):

平均应力准则

$$\int_0^{\Delta_{SE}} \sigma_y(x) dx = \int_0^{\Delta_{SE}} \frac{K_I^*}{(2\pi x)^{1-\lambda_1}} dx \geq \sigma_c \cdot \Delta_{SE} \quad (2)$$

能量准则

$$\int_0^{\Delta_{SE}} K_I^2(a) da = \int_0^{\Delta_{SE}} \left[ \psi(2\alpha) \frac{K_I^*}{(2\pi)^{1-\lambda_1}} a^{\lambda_1-1/2} \right] da \geq K_{Ic}^2 \cdot \Delta_{SE} \quad (3)$$

图 3 中,  $\Delta_{SE}$  为 V 型切口尖端裂缝增量,  $x$  轴方向为切口角平分线,  $a$  为切口尖端裂缝长度。参数  $K_I^*$  为 Carpinteri 等<sup>[16]</sup>定义的切口应力强度因子,与 Gross 和 Mendelson<sup>[19]</sup>给出的切口应力强度因子的关系为

$$K_I^* = \lim_{x \rightarrow 0} \sigma_y \cdot (2\pi x)^{1-\lambda_1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sigma_y \cdot \sqrt{2\pi} \cdot x^{1-\lambda_1}}{(2\pi)^{\lambda_1-1/2}} = \frac{K_I}{(2\pi)^{\lambda_1-1/2}} \quad (4)$$

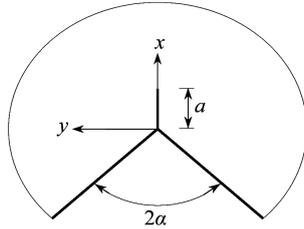


图 3 在 V 型切口尖端建立坐标系

Fig. 3 The coordinate system at the V notch tip

为了应用能量准则,即式(3),有必要知道含尖锐 V 型切口的应力强度因子  $K_I$ , 切口应力强度因子为裂缝长度  $a$  的函数。用 Tada 等<sup>[20]</sup>提出的表达式:

$$K_I(a) = \psi(2\alpha) \cdot \frac{K_I^*}{(2\pi)^{1-\lambda_1}} \cdot a^{\lambda_1-1/2} \quad (5)$$

根据 Carpinteri 准则<sup>[16]</sup>,含尖锐 V 型构件破坏发生的条件是同时满足式(2)、(3)。解出这两个方程,可以得到裂缝增量  $\Delta_{SE}$  和切口应力强度因子  $K_{Ic}^*$  :

$$\Delta_{SE} = \frac{2}{\lambda_1 \cdot \psi(2\alpha)^2} \cdot \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (6)$$

$$K_I^* \geq \left[ \lambda_1^{\lambda_1} \cdot \left( \frac{4\pi}{\psi(2\alpha)^2} \right)^{1-\lambda_1} \right] \cdot K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1} = [\xi(2\alpha)] \cdot K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1} = K_{Ic}^* \quad (7)$$

其中,  $K_{Ic}$  为断裂韧度,  $\psi(2\alpha)$  和  $\xi(2\alpha)$  为关于 V 型切口角度的函数,是纯几何量,它们随 V 型切口角度取值在文献[16]可以找到,如表 1 所列。

表 1  $\psi(2\alpha)$  和  $\xi(2\alpha)$  随 V 型切口开口角度取值<sup>[16]</sup>Table 1 The values of  $\psi(2\alpha)$  and  $\xi(2\alpha)$  changing with the V notch angle<sup>[16]</sup>

$2\alpha / (^\circ)$	$\psi(2\alpha)$	$\xi(2\alpha)$
0	2.506 8	1
15	2.519 2	0.995
30	2.530 6	0.990
45	2.538 4	0.986
60	2.540 1	0.983
90	2.512 7	0.983
120	2.423 3	0.994
150	2.251 6	1.011
180	1.986 9	1

根据 Gross 和 Mendelson<sup>[19]</sup> 定义的切口断裂韧度, 式(4)、(7)最终的结果为

$$K_{Ic} = [ (2\pi)^{\lambda_1-1/2} \cdot \xi(2\alpha) ] \cdot K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1}, \quad (8)$$

式中  $K_{Ic}$  为 I 型切口应力强度因子,  $K_{Ic}$  为断裂韧度。

### 1.3 Carpinteri 有限断裂力学准则与 MSED 准则的分析对比

考虑以上两种不同准则, 比较它们与 Gross 和 Mendelson<sup>[19]</sup> 定义的切口应力强度因子的关系, 最终得到

MSED 准则

$$K_{Ic} = k_1 \cdot K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1}; \quad (9)$$

Carpinteri 准则

$$K_{Ic} = k_2 \cdot K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1}, \quad (10)$$

其中

$$k_1 = \left( \frac{(1+\nu) \cdot (5-8\nu)}{4\pi} \right)^{1-\lambda_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2e_1}}, \quad (11)$$

$$k_2 = (2\pi)^{(\lambda_1-1/2)} \cdot \xi(2\alpha). \quad (12)$$

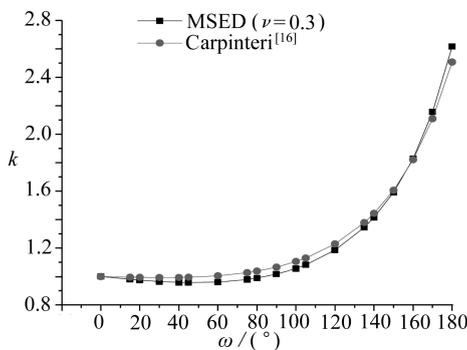


图 4 MSED 准则和 FFM 准则的比例参数随 V 型开口角度取值

Fig. 4 The proportional parameters of the MSED criterion and the FFM criterion vs. the V notch angle

可以看出两者均正比于  $K_{Ic}^{2(1-\lambda_1)} \cdot \sigma_c^{2\lambda_1-1}$ , 但是两者的系数不同, Carpinteri 准则中系数取决于 V 型切口角度  $2\alpha$ , 而 MSED 准则中的系数取决于 V 型切口角度  $2\alpha$  和材料 Poisson 比  $\nu$ . 将材料 Poisson 比  $\nu$ 、奇异指数  $\lambda_1$  代入式(11), 将关于角度的函数  $\xi(\omega)$  (取  $\omega = 2\alpha$ )、奇异指数

$\lambda_1$  代入式(12),分别得到两者的系数,其关系见图 4。

MSED 准则是考虑在 V 型切口有限体积范围内的应变能达到临界值时,材料发生破坏; FFM 是考虑距离 V 型切口尖端某个距离范围上的点,同时满足应力条件和能量条件时,材料发生破坏。MSED<sup>[9]</sup>  $W_c = \sigma_c^2 / (2E)$ ,是与材料极限抗拉应力和应变能有关的参数,FFM 也是要求应力准则和能量准则同时满足,尽管两者从两个不同角度评估材料断裂问题,但它们均是基于应力与能量平衡的原理进行断裂分析,所以最终得到的应力强度因子应该是接近的,应力强度因子的系数相差也不大。从下文介绍的脆性材料如有机玻璃,准脆性材料如混凝土等的实验结果也证明了这一点。

## 2 广义应力强度因子

为了利用第 1 节讨论的破坏准则来对三点弯曲梁进行理论计算,下面给出了三点弯曲梁的广义应力强度因子的计算方法。除 V 型切口的广义应力强度因子外,还给出了含直裂缝混凝土梁的断裂韧度计算方法。

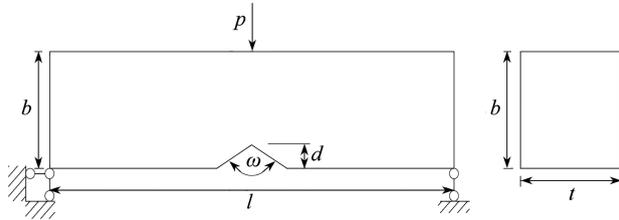


图 5 含 V 型切口的试件三点弯曲试验示意图

Fig. 5 The 3-point bending test setup of specimens containing V-shaped notches

### 2.1 V 型切口的形状函数

对于三点弯曲试验,V 型切口尖端广义应力强度因子<sup>[21]</sup>可以表示为

$$K_1^* = \frac{pl}{tb^{1+\lambda_1}} f^* \left( \frac{d}{b}, \omega \right), \quad (13)$$

其中,  $\omega = 2\alpha$ 。与式(8)类似,它们最终得到的 Gross 等<sup>[19]</sup>定义的切口应力强度因子为

$$K_1 = (2\pi)^{1/2-\lambda_1} \frac{pl}{tb^{1+\lambda_1}} f^* \left( \frac{d}{b}, \omega \right), \quad (14)$$

其中

$$f^* \left( \frac{d}{b}, \omega \right) = f \left( \frac{d}{b} \right) + \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^\beta \left[ g \left( \frac{d}{b} \right) - f \left( \frac{d}{b} \right) \right], \quad (15)$$

$$f \left( \frac{d}{b} \right) = 2.9 \left( \frac{d}{b} \right)^{1/2} - 4.6 \left( \frac{d}{b} \right)^{3/2} + 21.8 \left( \frac{d}{b} \right)^{5/2} - 37.6 \left( \frac{d}{b} \right)^{7/2} + 38.7 \left( \frac{d}{b} \right)^{9/2}, \quad (16)$$

$$g \left( \frac{d}{b} \right) = \frac{1.5}{(1 - d/b)^2}, \quad (17)$$

式中  $\beta$  为关于缝高比的未知参数。为了确定  $\beta$  值,本文按文献[19,21] 的值拟合度最高时所得的  $\beta$  取用, $\beta$  随缝高比  $d/b$  取值由图 6 给出。

在缝高比 0.2~0.7 范围内,形状参数  $f^* (d/b, \omega)$  随缝高比和 V 型切口角度的变化关系由图 7 给出。

文献[19,21]在V型切口角度 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内的形状参数大小相对误差在3.5%以内。

## 2.2 含直裂缝梁的断裂韧度的确定

本文采用 Legget<sup>[22]</sup>给出的三点弯曲实验中,含直裂缝梁的断裂韧度公式:

$$K_{Ic} = \frac{p_{cr}^0 l}{t b^{1.5}} f\left(\frac{d}{b}\right), \quad (18)$$

其中,  $f(d/b)$  可见式(16),  $p_{cr}^0$  为V型开口角度为 $0^\circ$ 时的破坏荷载。

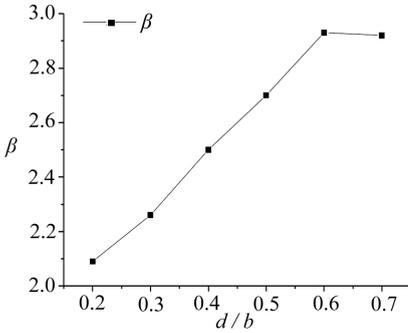


图6  $\beta$  随缝高比变化的关系

Fig. 6 The value of  $\beta$  vs. the crack height ratio

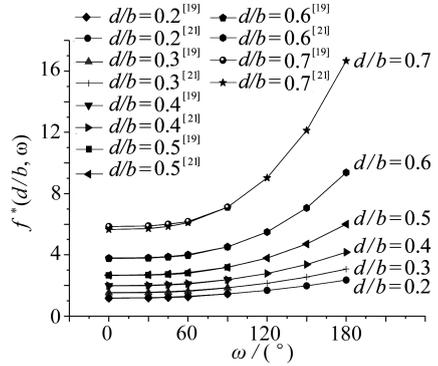


图7 文献[19,21]给出的形状参数随V型开口角度变化关系

Fig. 7 The shape parameter vs. the V notch angle given by ref. [19,21]

## 3 聚甲基丙烯酸甲脂材料的实验验证

根据前文介绍的理论预测公式,下面根据已有文献的数据来验证前文介绍的理论公式的预测效果.文献中提到的含V型切口构件为聚甲基丙烯酸甲脂材料制作.实验数据和理论预测的对比根据式(9)~(17)来确定。

第一组实验数据是Gómez等<sup>[23]</sup>对含V型切口的PMMA试件的三点弯曲实验所得.试件尺寸为:长 $l = 112$  mm,高 $b = 28$  mm,切口深 $d = 14$  mm,厚度 $t = 14$  mm;切口开口角度分别为 $2\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ .材料的性能为:弹性模量 $E = 3\ 000$  MPa, Poisson比 $\nu = 0.4$ , 断裂韧度 $K_{Ic} = 1$  MPa·m<sup>0.5</sup>,  $\sigma_c = 130$  MPa.实验测得破坏时切口应力强度因子随切口角度变化值由表2给出,在同一表中同时给出了 $K_{Ic}$ 的MSED准则和两种FFM准则预测的理论值进行对比。

第二组实验数据为Carpinteri<sup>[21]</sup>的PMMA含V型切口试件的三点弯曲实验测得,文献给出材料的力学性能为:弹性模量 $E = 3\ 000$  MPa, Poisson比 $\nu = 0.3$ , 断裂韧度 $K_{Ic} = 1.89$  MPa·m<sup>0.5</sup>, 极限抗拉强度 $\sigma_c = 130.3$  MPa.试件尺寸为:长 $l = 190$  mm,高 $b = 50$  mm,试件厚度 $t = 50$  mm.两种切口深度分别为10, 20 mm;考虑了6种切口角度分别为 $2\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ .实验试件总计为36个,每种尺寸试件制作3个.其中 $180^\circ$ 试件高度比其他试件高度均小,差值为切口深度。

实验测得破坏时切口应力强度因子随切口开口角度变化值由表3给出,在同一表中同时给出了 $K_{Ic}$ 的MSED准则和FFM准则预测的理论值进行对比。

表 2 两种断裂准则得到的切口应力强度因子与实验结果<sup>[23]</sup>对比  
 Table 2 Comparison of the notch stress intensity factors obtained from 2 fracture criteria with experimental results<sup>[23]</sup>

$2\alpha / (^\circ)$	$K_{Ic}(\text{Carpinteri}) /$ ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ )	$K_{Ic}(\text{MSED}) /$ ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ )	ref. [23] result $K_{Ic} / (\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$\delta_{\text{Carpinteri}} / (\%)$	$\delta_{\text{MSED}} / (\%)$
15	1.00	0.98	0.83	17.00	15.31
30	1.01	0.97	1.02	0.99	5.15
60	1.13	1.07	1.03	8.85	3.74
90	1.64	1.53	1.51	7.93	1.31
120	3.79	3.56	4.5	18.73	26.40
150	18.67	18.31	21.96	17.62	19.93

表 3 两种断裂准则得到的切口应力强度因子与实验结果<sup>[21]</sup>对比 ( $d/b = 0.4$ )

Table 3 Comparison of the notch stress intensity factors obtained from 2 fracture criteria with experimental results ( $d/b = 0.4$ )

$2\alpha / (^\circ)$	$K_{Ic}(\text{Carpinteri}) /$ ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ )	$K_{Ic}(\text{MSED}) /$ ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ )	ref. [21] result $K_{Ic} / (\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$\delta_{\text{Carpinteri}} / (\%)$	$\delta_{\text{MSED}} / (\%)$
0	1.89	1.89	1.97	4.23	4.23
45	1.96	1.89	1.84	6.12	2.65
90	2.94	2.80	3.25	10.54	16.07
120	6.19	5.97	6.65	7.43	11.39
150	25.63	25.39	24.60	4.02	3.11
180	326.66	340.86	325.44	0.37	4.52

表 2 和表 3 表明各种情况下试件破坏时理论预测的切口应力强度因子与实验测定的切口应力强度因子基本一致。虽然 MSED 准则和 Carpinteri 准则基于不同假设,当 V 型切口角度大于  $120^\circ$  时,两种准则的理论值是基本重合的,并且可以观察到两种准则所得到的破坏时切口应力参数比较接近。

## 4 含 V 型切口混凝土梁的应力强度因子实验验证

为了验证前面介绍理论在素混凝土梁中的预测效果,下面给出笔者自行设计的实验方案,并给出了验证结果。

### 4.1 实验设计

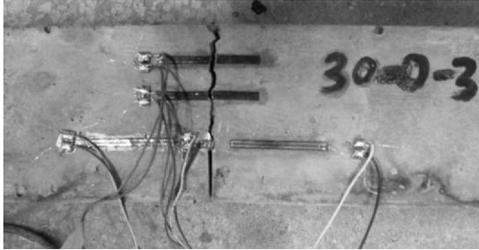
混凝土设计强度等级为 C30,其中拌合材料分别为:P.032.5 级普通硅酸盐水泥,粗骨料为级配 5~16 的卵石,细骨料为粗砂,水为自来水,配合比为:水泥 400 kg,水 190 kg,沙子 610 kg,石子 1 235 kg。

本实验总共 7 组 21 个试件,试块尺寸  $100\text{ mm}\times 100\text{ mm}\times 440\text{ mm}$ ,在梁的跨中部预制 V 型切口角度分为  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  共 7 种,缝高比均为 0.2, V 型切口深度均为 2 cm,其中切口角度为  $180^\circ$  的试件高度为 8 cm。V 型切口用电锯制作完成后用模板订好并固定。用木模浇筑一次成型,试件成型后测得 V 型切口设计角度与实际测量角度偏差在  $1^\circ$  以内。试件编号采取型式为“缝长-角度-组号”。试件成型后如图 8 所示。

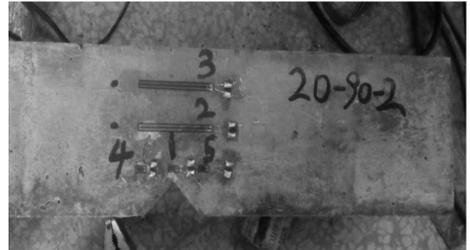
### 4.2 试验加载及采集设备

采用华东交大材料试验室自制手动加载机,其原理是通过手动转轮带动内部机械齿轮使

得加载压头下降对试件加载,使用最大量程 1 t 的荷载传感器.跨中挠度测量采用 1 cm 量程的百分表,测量过程中人工读数.应变和荷载采用华东交大自制应变仪采集,并连接电脑进行采集.支座间距为 40 cm,试件跨高比为 4 : 1.加载压头横竖两个方向都处于试件中心位置,以免造成偏压.加载采用分级加载,前 2 kN 为 200 N 每级加载,2 kN 后为 100 N 每级加载.实验过程实景如图 9 所示.



(a) 含 0°切口(直裂缝)的混凝土梁破坏后照片  
(a) Fracture of concrete beams with 0-degree-angle notches (straight cracks)



(b) 含 V 型切口的混凝土梁  
(b) Concrete beams with V notches

图 8 实验梁

Fig. 8 The experimental beam

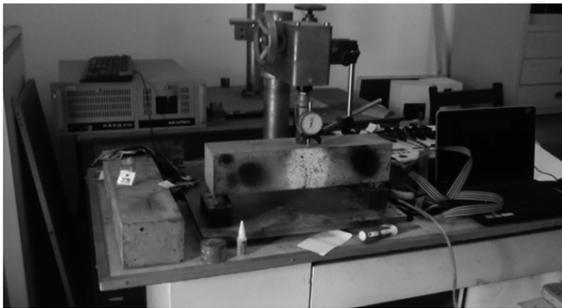


图 9 实验过程实景

Fig. 9 The photo of the experimental setup

### 4.3 混凝土的力学性能

混凝土材料的 Poisson 比本文取 0.17,极限抗拉强度根据混凝土强度测试规范标准测得为  $\sigma_c = 5.72 \text{ MPa}$ .根据破坏荷载和试件相关参数可以计算出本组试件  $K_{lc} = 0.645 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ .

### 4.4 混凝土的切口应力强度因子理论预测与实验结果对比

将 3 种准则预测的切口应力强度因子与实验测得的切口应力强度因子列入表 4,每组试件含 3 个,每组试件的破坏荷载相差不大,表中的数据均为平均值.

表 2~4 给出了不同材料、不同切口角度、不同缝高比条件下,两种准则预测的切口应力强度因子与实验结果进行的对比,由于实验的材料不同,实验条件不同,可以看出两种准则预测的理论值与实验结果有一定误差,但尚在工程可接受的范围内,两种准则运用也比较简便,可以为实际工程结构设计提供参考.在本文设计的混凝土材料实验中,容易看出两者破坏准则所得到的切口应力强度因子与实验测得结果比较接近,证明了 MSSED 准则和 FFM 准则一样非常有效,而且应用方便.

表 4 两种断裂准则得到的切口应力强度因子与实验结果对比  
 Table 4 Comparison of the notch stress intensity factors obtained from  
 2 fracture criteria with experimental results

specimen number	$2\alpha / (^{\circ})$	$K_{Ic}(\text{Carpinteri}) /$ ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ )	$K_{Ic}(\text{MSED}) /$ ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ )	experimental result $K_{Ic} / (\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5})$	$\delta_{\text{Carpinteri}} / (\%)$	$\delta_{\text{MSED}} / (\%)$
20-0	0	0.65	0.65	0.65	0.00	0.00
20-30	30	0.64	0.63	0.73	14.06	15.87
20-60	60	0.68	0.66	0.70	2.94	6.06
20-90	90	0.83	0.81	0.89	7.23	9.88
20-120	120	1.31	1.28	1.41	7.63	10.16
20-150	150	3.11	3.09	3.17	1.93	2.59
20-180	180	14.34	14.45	14.34	0.00	0.76

## 5 结 论

本文考虑 I 型荷载条件下,对 MSED 准则和 FFM 准则给出的 V 型切口应力强度因子进行对比.两种判别准则给出的应力强度因子均与极限抗拉强度  $\sigma_c$  成正比,但比例参数不同,FFM 准则的比例参数取决于切口角度,而 MSED 准则的比例参数取决于切口角度和 Poisson 比.然后,对于两种准则在 I 型荷载条件下对所给出的应力强度因子的预测能力进行了研究,将它们与 Gómez 和 Carpinteri 测得 PMMA 的实验数据进行对比,并且和本文所设计的缝高比为 0.2,开口角度为  $0^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}, 120^{\circ}, 150^{\circ}, 180^{\circ}$  的混凝土试件所测得的实验结果进行了对比.经验证两种准则计算精度除个别情况外总体可以接受且两者预测结果相差不大,在 PMMA 材料中的最大误差为 26.4%,而在本文设计的混凝土试件中的最大误差为 15.87%,两种材料是在不同的实验条件下得到的结果,但误差仍在工程可接受的范围,更详细的分析需要更多的实验数据的支持.综上所述,MSED 准则和 FFM 准则给出的应力强度因子,能较准确地表达有机玻璃和混凝土材料的 V 型切口梁的应力强度因子.

## 参考文献 (References):

- [1] DUNN M L, SUWITO W, CUNNINGHAM S. Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, **34** (29): 3873-3883.
- [2] DUNN M L, SUWITO W, CUNNINGHAM S, et al. Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading[J]. *International Journal of Fracture*, 1997, **84**(4): 367-381.
- [3] LEGUILLON D, YOSIBASH Z. Crack onset at a V-notch, influence of the notch tip radius[J]. *International Journal of Fracture*, 2003, **122**(1/2): 1-21.
- [4] VERREMAN Y, NIE B. Early development of fatigue cracking at manual fillet welds[J]. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2010, **19**(6): 669-681.
- [5] PLUVINAGE G. Rupture and fatigue initiated from notches, application of the notch intensity factor[J]. *Revista Fracture Mecanique*, 1997, **3**(4): 53-61.
- [6] LAZZARIN P, TOVO R. A notch intensity factor approach to the stress analysis of welds[J]. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1998, **21**(9): 1089-1103.

- [7] ATZORI B, LAZZARIN P, TOVO R. From a local stress approach to fracture mechanics: a comprehensive evaluation of the fatigue strength of welded joints[J]. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1999, **22**(5): 369-381.
- [8] ATZORI B, LAZZARIN P, TOVO R. Stress field parameters to predict the fatigue strength of notched components[J]. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1999, **34**(6): 437-453.
- [9] LAZZARIN P, ZAMBARDI R. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches[J]. *International Journal of Fracture*, 2001, **112**(3): 275-298.
- [10] YOSIBASH Z, BUSSIBA A, GILAD I. Failure criteria for brittle elastic materials[J]. *International Journal of Fracture*, 2004, **125**(3/4): 307-333.
- [11] LAZZARIN P, BERTO F, ELICES M, et al. Brittle failures from U- and V-notches in mode I and mixed, I+II, mode: a synthesis based on the strain energy density averaged on finite-size volumes[J]. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2009, **32**(8): 671-684.
- [12] BERTO F, LAZZARIN P. A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, **52**(3): 183-194.
- [13] BERTO F, LAZZARIN P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches[J]. *Materials Science and Engineering: R*, 2014, **75**(1): 1-48.
- [14] TREIFI M, OYADLI S O. Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, **50**(14/15): 2196-2212.
- [15] DAVIS B R, WAWRZYNEK P A, INGRAFFEA A R. 3-D simulation of arbitrary crack growth using an energy-based formulation—part I: planar growth[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, **115**(1): 204-220.
- [16] CARPINTERI A, CORNETTI P, PUGNO N, et al. A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, **75**(7): 1736-1752.
- [17] CORNETTI P, PUGNO N, CARPINTERI A, et al. Finite fracture mechanics: a coupled stress and energy failure criterion[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, **73**(14): 2021-2033.
- [18] YOSIBASH Z, PRIEL E, LEGUILLON D. A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading[J]. *International Journal of Fracture*, 2006, **141**(1/2): 291-312.
- [19] GROSS B, MENDELSON A. Plane elastostatic analysis of V-notched plates[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1972, **8**(3): 267-276.
- [20] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*[M]. New York: ASME Press, 2000.
- [21] CARPINTERI A. Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, **26**(1): 143-155.
- [22] LEGGET D R F. American society for testing and materials[J]. *Nature*, 1964, **203**(4945): 565-568.
- [23] GÓMEZ F J, ELICES M. Fracture of components with V-shaped notches[J]. *Engineering Frac-*

*ture Mechanics*, 2003, **70**(14): 1913-1927.

## Study on Stress Intensity Factors of Concrete Beams With Sharp V Notches

TONG Gusheng, HU Zongqi, XU Penghua

(*School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, P.R.China*)

**Abstract:** The failure behavior of the concrete beams with V notches is usually predicted by the notch stress intensity factor (NSIF), which quantify the intensities of the asymptotic linear elastic stress distributions around the notches. For a V-notched beam, the NSIF is determined by the notch angle. The strain energy density fracture criterion is used to judge the fracture failure of a member according to whether the strain energy density in a certain volume reaches the critical value. If the volume is small enough to neglect the higher-order solutions of the Williams equation, the strain energy density criterion can be used to calculate the NSIF. In view of the type- I load condition, the theoretical NSIFs of the V notches obtained with the mean strain energy density fracture criterion and Carpinteri's finite fracture mechanics method respectively, agree well with each other. Moreover, both the theoretical NSIFs given by the 2 criteria are fairly consistent with the experimental results from various V-notched concrete beam specimens.

**Key words:** strain energy density criterion; finite fracture mechanics; notch stress intensity factor; V notch; proportional parameter

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11242006;11462005)

---

引用本文/Cite this paper:

童谷生, 胡宗棋, 徐鹏华. 尖锐 V 型切口混凝土梁的应力强度因子研究[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 300-310.

TONG Gusheng, HU Zongqi, XU Penghua. Study on stress intensity factors of concrete beams with sharp V notches[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 300-310.