

# 湍流边界层作用下薄板随机振动 声辐射的辛方法\*

潘晨鸽, 李榆银, 张亚辉

(工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(本刊编委张亚辉来稿)

**摘要:** 基于辛对偶体系,研究了湍流边界层作用下薄板随机振动的声辐射问题.首先对湍流边界层的互功率谱密度函数进行 Fourier 级数展开,从而可将随机场激励下结构随机声辐射问题转化为在空间和时间简谐压力作用下结构确定性响应的求解;然后将薄板的运动方程导入辛对偶体系,并采用分离变量法得到辛本征问题;最后采用辛本征向量对待求的响应向量和作用力向量进行展开,即可得到解耦后的方程,由此降低了方程的求解难度,并可得到问题的辛解析解.由于该文方法在辛对偶体系下进行求解,相比模态叠加法,避免了模态截断问题,在精度上具有较大优势.算例部分首先考虑空间和时间简谐压力作用的情况,通过与模态叠加法结果的对比,验证了该文方法的有效性.随后采用该文方法求解了湍流边界层作用下随机声场的声压功率谱密度函数的声压级,讨论了因 Fourier 级数截断而产生的收敛性问题,并研究了薄板随机振动辐射声场的指向性.

**关键词:** 辛对偶体系; 湍流边界层; 随机振动; 随机声辐射

**中图分类号:** O324

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.380151

## 引言

结构受湍流边界层的作用而产生振动和声辐射的现象,这在工程中十分常见.例如,在 500~2 000 Hz 频率范围内,湍流边界层引起的飞机机身振动是机舱内主要噪声源之一;湍流边界层激励船体振动向外辐射的噪声会严重影响声呐的性能.因此,在结构设计阶段对结构振动产生的噪声进行准确预测至关重要.湍流边界层通常在时间上随机变化和在空间上随机流动,是一种典型的随机激励,一般将其作为随机压力场来研究.这种随机压力场给结构分析带来了一定的困难,近年来单元离散方法和能量法被广泛地用来研究结构-声系统的行为<sup>[1-6]</sup>.

单元离散方法主要是指有限单元法和边界单元法,一般对结构采用有限元进行离散化,而对声场则可采用任意一种.Allen 和 Vlahopoulos<sup>[1]</sup>联合有限单元法和边界单元法分析了板在湍流边界层作用下的声辐射行为,对比了 3 种不同湍流边界层模型的不同结果.Montgomery<sup>[2]</sup>采用有限单元法和边界单元法,提出了一种求解湍流边界层和喷流噪声作用下机舱噪声问题的

\* 收稿日期: 2017-05-23; 修订日期: 2017-11-16

基金项目: 国家自然科学基金(11672060)

作者简介: 潘晨鸽(1990—),女,博士生(E-mail: panchenge152@163.com);

李榆银(1989—),男,博士生(E-mail: liyuyin@mail.dlut.edu.cn);

张亚辉(1972—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhangyh@dlut.edu.cn).

分析框架。刘宝山和赵国忠<sup>[3]</sup>基于有限元法、边界元法和虚拟激励法,对随机激励下结构振动声辐射灵敏度分析及优化设计问题进行了研究。凌芳芳<sup>[4]</sup>采用有限元法得到了潜艇在湍流边界层作用下的振动响应,并进一步基于边界元法,分析了潜艇的声辐射问题。然而,湍流边界层是一种随机场形式的激励,在采用单元离散方法进行分析时,需要考虑任意两个单元节点之间的相关性,因此计算时间对网格数量十分敏感;同时,湍流边界层是一种宽频激励,也决定了采用单元离散方法需要划分非常精细的网格才能得到较为精确的结果,这两个原因将会导致单元离散方法的计算效率低下。

能量方法主要包括统计能量分析和能量流分析法。此类方法基于统计性的概念,得到的是响应在时域内平均的能量。蔡承德等<sup>[5]</sup>采用统计能量分析方法分析了船舶结构噪声辐射水平,给出了计算模态数、内部损耗因子和耦合损耗因子的公式。Han等<sup>[6]</sup>采用能量流分析方法预测了湍流边界层和分离再附流动两种随机激励作用下固支板声辐射的声能量。然而,能量法需要假定结构具有很高的模态密度,故该方法仅在高频部分能得到较为准确的结果,而对于湍流边界层这种宽频激励,其局限性较大。

与上述两类方法不同,另外一种思路是将随机激励作用下结构的响应用关于空间坐标的双重积分表示,其中被积函数是激励的互功率谱密度和结构的Green(格林)函数,但该双重积分的计算量巨大。为了避免直接计算积分,Newland<sup>[7]</sup>将随机场的互功率谱密度函数通过Fourier级数进行展开,进而将随机场载荷作用的问题转换为时间和空间简谐压力作用下的确定性响应的求解,显著降低了分析难度和计算量。根据此思路,将随机场载荷作用的问题转换为求解确定性响应,一些传统的方法得以应用,比如模态叠加法。Thomas等<sup>[8]</sup>联合模态叠加法和最优控制理论,研究了板在湍流边界层作用下声辐射的反馈控制问题,提出湍流边界层引起的飞机噪声问题可通过反馈控制有效衰减。Liu<sup>[9]</sup>采用模态叠加法分析了飞行器面板在湍流边界层作用下的声辐射问题,研究了横向筋、纵向筋和阻尼等因素对声强和模态辐射效率的影响。然而,对于湍流边界层这种频带较宽的激励,在高频部分模态叠加法通常需要大量模态参与叠加,模态的截断可能会导致一些精度和计算效率方面的问题。

除了模态叠加法,还有其他的一些方法也被用于求解结构随机振动声辐射问题,例如统计边界元法<sup>[10-11]</sup>、统计波叠加方法<sup>[12]</sup>。这些方法求解的直接变量是振速、声压或者能量。姚伟岸和钟万颀<sup>[13]</sup>提出的辛求解体系,将求解的直接变量转换为原变量及其对偶变量,具有高精度和高数值稳定性的特点。这种方法改变了以往弹性力学求解中大量运用半逆法的传统,是一种富有理性的求解方法。目前这种方法已经应用于各种问题,比如各种边界条件的薄板和中厚板的弯曲问题<sup>[14-16]</sup>、层合板的自由振动问题<sup>[17]</sup>及平面各向异性问题<sup>[18]</sup>。目前辛对偶体系还没有被应用于结构振动的声辐射分析中。本文基于辛求解体系,研究薄板在湍流边界层作用下随机振动的声辐射问题。具体研究思路如下:首先从时域Rayleigh积分公式出发,推导了声压的互功率谱密度与湍流边界层的互功率谱密度之间的关系,将湍流边界层作用下结构随机振动的声辐射问题转换为空间和时间简谐压力作用下简谐响应函数的求解问题;然后将薄板的运动方程导入辛状态空间,通过分离变量法得到辛本征问题;最后将待求的状态向量和外作用向量在辛本征向量上进行展开,进而求解解耦后的方程得到简谐响应函数。在算例部分,首先通过与模态叠加法的对比,验证了本文方法的有效性。随后,采用本文方法分析了湍流边界层作用下薄板随机振动的声辐射问题,并研究了薄板随机振动辐射声场的指向性。

## 1 湍流边界层作用下薄板随机振动的辐射声场

考虑如图1所示的置于无限大障板上的薄板,坐标原点取在板的几何中心点处,研究其向

$z > 0$  一侧的远场声辐射问题,  $L_x$  和  $L_y$  分别为薄板在  $x$  和  $y$  方向的长度. 根据时域 Rayleigh 积分公式<sup>[19]</sup>, 薄板振动在  $t$  时刻向空间一点  $\mathbf{r}$  辐射的声压为

$$p(\mathbf{r}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{S}} \rho_0 \ddot{w}(\mathbf{S}; \tau) g(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \tau - t) d\mathcal{S} d\tau, \quad (1)$$

其中,  $\rho_0$  为流体介质密度,  $\mathbf{S}$  为薄板上任意一点的位置矢量,  $w(\mathbf{S}; t)$  为薄板的横向位移,  $(\ddot{\phantom{x}})$  表示对时间  $t$  求二阶导,  $g(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \tau - t)$  可表示为

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \tau - t) = 2G(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \tau - t) = \frac{1}{2\pi r} \delta\left(\tau - t + \frac{r}{c_0}\right), \quad (2)$$

其中,  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{S}|$  为研究点与源点之间的距离,  $c_0$  为声速;  $G(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \tau - t)$  为时域 Green 函数, 表示波动方程对于一个位于  $\mathbf{S}$  起始于时间  $\tau$  的单位冲击点源的解.

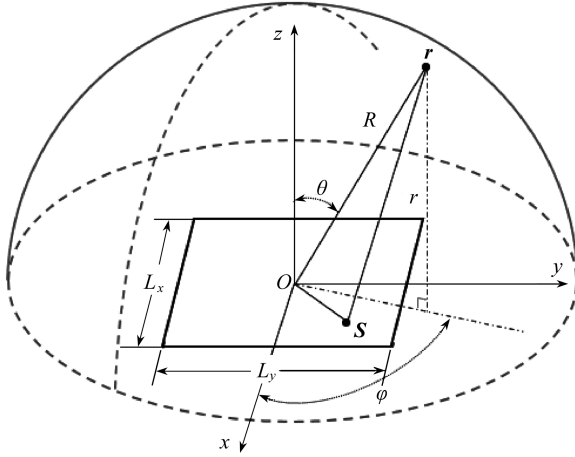


图 1 薄板及坐标系示意图

Fig. 1 Schematic of a thin plate and the associated coordinate system

假设薄板受任意外力  $f(\mathbf{s}; t)$  作用, 其中  $\mathbf{s}$  为作用点位置, 则薄板任意一点  $\mathbf{S}$  处的位移可表示为如下 Duhamel 积分的形式:

$$w(\mathbf{S}; t) = \int_{\mathcal{S}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathbf{S}, \mathbf{s}; \tau) f(\mathbf{s}; t - \tau) d\tau d\mathbf{s}, \quad (3)$$

其中,  $h(\mathbf{S}, \mathbf{s}; \tau)$  为薄板横向位移的脉冲响应函数. 假设外力  $f(\mathbf{s}; t)$  是一个平稳的随机过程, 由于系统是线性的, 则薄板的位移响应  $w(\mathbf{S}; t)$  也是平稳的, 进而由式(1)可以得出声压  $p(\mathbf{r}; t)$  也是平稳的. 结合式(1), 并根据相关函数的定义, 不同时刻空间任意两点的声压  $p(\mathbf{r}_1; t_1)$  和  $p(\mathbf{r}_2; t_2)$  的互相关函数可表示为

$$\begin{aligned} R_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t') &= E[p(\mathbf{r}_1; t_1)p(\mathbf{r}_2; t_2)] = \\ &\rho_0^2 \int_{\mathcal{S}_1} \int_{\mathcal{S}_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{r}_1, \mathbf{S}_1; \tau_1 - t_1) g(\mathbf{r}_2, \mathbf{S}_2; \tau_2 - t_2) \times \\ &E[\ddot{w}(\mathbf{S}_1, \tau_1) \ddot{w}(\mathbf{S}_2, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 d\mathcal{S}_1 d\mathcal{S}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $t' = t_2 - t_1$  为时间差,  $E[\phantom{x}]$  表示数学期望. 根据定义,  $E[\ddot{w}(\mathbf{S}_1, t_1) \ddot{w}(\mathbf{S}_2, t_2)]$  为薄板横向振动加速度的互相关函数, 可将其表示为  $R_{\ddot{w}\ddot{w}}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; t')$ .

根据 Wiener-Khinchin 关系<sup>[20]</sup>, 声压  $p(\mathbf{r}; t)$  的互功率谱密度函数可表示为

$$S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t') e^{-i\omega t'} dt' =$$

$$\rho_0^2 \omega^4 \int_{S_1} \int_{S_2} g(\mathbf{r}_1, \mathbf{S}_1; \omega) g^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{S}_2; \omega) S_{ww}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; \omega) dS_2 dS_1, \quad (5)$$

其中,  $\omega$  为圆频率,  $*$  表示复共轭,  $S_{ww}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; \omega)$  为薄板的横向位移  $w$  的功率谱密度函数,

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{r}, \mathbf{S}; t) e^{-i\omega t} dt = 2G(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \omega) = \frac{e^{-ik_0 r}}{2\pi r}, \quad (6)$$

这里  $G(\mathbf{r}, \mathbf{S}; \omega)$  为频域的 Green 函数, 表示波动方程对自由空间内  $\mathbf{S}$  处作用一个单位时间谐量的点源的解;  $k_0 = \omega/c_0$  是声波数. 式(5)表明, 声压  $p(\mathbf{r}; t)$  的互功率谱密度函数  $S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$  可以转化为求解薄板的横向位移  $w$  的功率谱密度函数  $S_{ww}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; \omega)$ .

根据式(3)以及相关函数的定义, 薄板的横向位移  $w$  的互相关函数可表示为

$$\begin{aligned} R_{ww}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; t') &= E[w(\mathbf{S}_1; t_1)w(\mathbf{S}_2; t_2)] = \\ & \int_{S_1} \int_{S_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathbf{S}_1, \mathbf{s}_1; \tau_1) h(\mathbf{S}_2, \mathbf{s}_2; \tau_2) \times \\ & E[f(\mathbf{s}_1, t_1 - \tau_1) f(\mathbf{s}_2, t_2 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 ds_1 ds_2, \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $E[f(\mathbf{s}_1, t_1 - \tau_1) f(\mathbf{s}_2, t_2 - \tau_2)] = R_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; t' - \tau_2 + \tau_1)$  为外力  $f(\mathbf{s}; t)$  的互相关函数.

再次由 Wiener-Khinchin 关系, 薄板横向位移  $w$  的互功率谱密度函数可表示为

$$\begin{aligned} S_{ww}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ww}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2; t') e^{-i\omega t'} dt' = \\ & \int_{S_1} \int_{S_2} H(\mathbf{S}_1, \mathbf{s}_1; \omega) H^*(\mathbf{S}_2, \mathbf{s}_2; \omega) S_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) ds_2 ds_1, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{s}; \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathbf{S}, \mathbf{s}; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (9)$$

为薄板的频率响应函数, 表示  $\mathbf{s}$  处作用的单位集中力在  $\mathbf{S}$  处产生的简谐位移响应,

$$S_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10)$$

为外力  $f(\mathbf{s}; t)$  的功率谱密度函数.

考虑薄板上作用的载荷是湍流边界层, 这是一种典型的随机激励, 其壁面压力的互功率谱密度一般采用半经验的公式<sup>[21]</sup>来表示, 即

$$S_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) = \Phi_{ff}(\omega) \exp\left(-c_x \left| \frac{\omega \xi_x}{U_c} \right| \right) \exp\left(-c_y \left| \frac{\omega \xi_y}{U_c} \right| \right) \exp\left(\frac{i\omega \xi_y}{U_c}\right), \quad (11)$$

其中,  $\xi_x = x_1 - x_2$  和  $\xi_y = y_1 - y_2$  为板上任意两点之间  $x$  和  $y$  方向的距离;  $c_x$  和  $c_y$  为常数, 分别描述  $x$  和  $y$  方向壁面压力场的空间相关性;  $U_c$  为湍流的壁面速度;  $\Phi_{ff}(\omega)$  为壁面压力场的功率谱密度函数.

根据文献[22],  $S_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega)$  也可以进一步表示为 Fourier 级数的形式, 即

$$S_{ff}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \omega) = \Phi_{ff}(\omega) \sum_M S_{ffx}(\alpha_M) e^{i\alpha_M \xi_x} \sum_N S_{ffy}(\alpha_N) e^{i\alpha_N \xi_y}, \quad (12)$$

其中,  $\alpha_M = 2\pi M/(2L_x)$ ,  $\alpha_N = 2\pi N/(2L_y)$ ,  $M$  和  $N$  为整数,  $L_x$  和  $L_y$  分别为薄板在  $x$  和  $y$  方向的长度. 由于  $\xi_x$  和  $\xi_y$  的取值范围分别为  $[-L_x, L_x]$  和  $[-L_y, L_y]$ , 因此 Fourier 级数的系数  $S_{ffx}(\alpha_M)$  和  $S_{ffy}(\alpha_N)$  可表示为

$$S_{ffx}(\alpha_M) = \frac{1}{2L_x} \int_{-L_x}^{L_x} e^{-c_x \omega |\xi_x|/U_c} e^{-i\alpha_M \xi_x} d\xi_x =$$

$$\frac{1}{2L_x} \left( \frac{1 - e^{-d_1 L_x}}{d_1} + \frac{e^{d_2 L_x} - 1}{d_2} \right),$$

$$d_1 = c_x \omega / U_c - i\alpha_M, \quad d_2 = -c_x \omega / U_c - i\alpha_M,$$

$$S_{ff_y}(\alpha_N) = \frac{1}{2L_y} \int_{-L_y}^{L_y} e^{-c_y \omega | \xi_y | / U_c} e^{i\omega \xi_y / U_c} e^{-i\alpha_N \xi_y} d\xi_y =$$

$$\frac{1}{2L_y} \left( \frac{1 - e^{-d_3 L_y}}{d_3} + \frac{e^{d_4 L_y} - 1}{d_4} \right),$$

$$d_3 = c_y \omega / U_c + i\omega / U_c - i\alpha_N, \quad d_4 = -c_y \omega / U_c + i\omega / U_c - i\alpha_N. \quad (13)$$

将式(12)和(8)代入式(5)中,得到

$$S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \sum_M \sum_N \Phi_{ff}(\omega) S_{ff_x}(\alpha_M) S_{ff_y}(\alpha_N) \bar{p}_{MN}(\mathbf{r}_1; \omega) \bar{p}_{MN}^*(\mathbf{r}_2; \omega), \quad (14)$$

其中

$$\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega) = - \int_S \frac{\omega^2 \rho_0 e^{-ik_0 r}}{2\pi r} G_{MN}(\mathbf{S}; \omega) d\mathbf{S} \quad (15)$$

表示当薄板具有确定性位移  $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$  时在声场中  $\mathbf{r}$  处产生的声压,这里

$$G_{MN}(\mathbf{S}; \omega) = e^{i\omega t} \int_s H(\mathbf{S}, \mathbf{s}; \omega) e^{i\alpha_M x} e^{i\alpha_N y} d\mathbf{s} \quad (16)$$

为简谐响应函数,表示空间和时间简谐压力  $q = e^{i\alpha_M x} e^{i\alpha_N y} e^{i\omega t}$  作用下薄板的位移响应。

考虑远场辐射的情况,即  $r \gg |\mathbf{S}|$ , 则空间一点与薄板上一点之间的距离可近似为

$$r \approx R - x \sin \theta \cos \varphi - y \sin \theta \sin \varphi, \quad (17)$$

其中,  $R$  为研究点与坐标原点之间的距离,将式(17)代入式(15),声压振幅中的距离  $r$  可采用  $R$  近似,而相位部分则需保留,因此声压  $\bar{p}(\mathbf{r}; \omega)$  可进一步表示为

$$\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega) = - \frac{\omega^2 \rho_0 e^{-ik_0 R}}{2\pi R} \int_S G_{MN}(\mathbf{S}; \omega) e^{i(xk_{rx} + yk_{ry})} d\mathbf{S}, \quad (18)$$

$$k_{rx} = k_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad k_{ry} = k_0 \sin \theta \sin \varphi,$$

其中,  $\theta$  为研究点的位置矢量  $\mathbf{r}$  与  $z$  轴正向的夹角,  $\varphi$  为研究点在  $xOy$  面上投影的位置矢量与  $x$  轴正向的夹角。

从式(14)可以看出,通过将湍流边界层的互功率谱密度函数进行 Fourier 级数展开,则随机激励下薄板辐射声压的互功率谱密度函数  $S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$  可转换为求解  $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$ 。进一步根据式(15),  $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$  可以转换为求解  $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$ 。同时,式(16)表明,  $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$  具有明确的物理意义,表示空间和时间简谐压力  $q = e^{i\alpha_M x} e^{i\alpha_N y} e^{i\omega t}$  作用下薄板的确定性简谐响应。因此,通过本节的推导,湍流边界层作用下薄板的随机声辐射问题最终可以转换为求解薄板的确定性位移简谐响应。

## 2 辛体系下简谐响应函数的求解

对于稳态振动问题,薄板运动方程中变量都具有  $e^{i\omega t}$  的形式,简便起见,以下推导过程中忽略了方程中的  $e^{i\omega t}$ 。在空间和时间简谐压力  $q = Qe^{i\omega t}$  作用下,薄板的稳态运动方程<sup>[23]</sup>为

$$D \nabla^4 w - \rho h \omega^2 w = Q, \quad (19)$$

其中,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  是 Laplace 算子,  $\rho$  为材料密度,  $h$  为板的厚度,  $D = (1 + i\eta) E h^3 / (12(1 - \nu^2))$  为弯曲刚度,  $E$  为弹性模量,  $\eta$  为阻尼损耗因子,  $\nu$  为 Poisson (泊松) 比。

根据文献[24],将方程(19)导入辛对偶体系,选取位移  $w$ 、转角  $\vartheta$ 、等效剪力  $F_y$  和弯矩  $M_y$  为对偶向量,同时结合力(矩)平衡方程可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{D} \\ -D(1-\nu^2) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho h \omega^2 & 0 & 0 & \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 2D(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \vartheta \\ F_y \\ M_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

将方程(20)表示为矩阵的形式

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} = \mathbf{H} \mathbf{Z} + \mathbf{Q}, \quad (21)$$

其中,  $\mathbf{Z} = \{w \ \vartheta \ F_y \ M_y\}^T$  为状态向量,  $T$  表示转置,  $\mathbf{H}$  为 Hamilton 算子矩阵,  $\mathbf{Q} = \{0 \ 0 \ Q \ 0\}^T$  为外作用向量.

首先不考虑外作用向量,则方程(21)为齐次微分方程,根据分离变量法,状态向量  $\mathbf{Z}$  可表示为

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\eta}(x) e^{\mu y}. \quad (22)$$

将式(22)代入方程(21)可得到

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\eta}(x) = \mu \boldsymbol{\eta}(x). \quad (23)$$

根据文献[24],方程(23)的解可表示为

$$\boldsymbol{\eta}(x) = \sum_{i=1}^4 s_i \boldsymbol{\Phi}_i e^{\lambda_i x}, \quad (24)$$

其中,  $s_i$  为待定系数,

$$\lambda_1 = -ik_1, \lambda_2 = ik_1, \lambda_3 = -ik_2, \lambda_4 = ik_2, \quad (25)$$

这里

$$k_1 = \sqrt{\mu^2 - k_b^2}, k_2 = \sqrt{\mu^2 + k_b^2}, \quad (26)$$

其中,  $k_b = (\rho h \omega^2 / D)^{1/4}$  为薄板的弯曲波数,以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_{1,2} = [1 \ \mu \ \chi_1 \ \chi_2]^T, \\ \boldsymbol{\Phi}_{3,4} = [1 \ \mu \ \chi_3 \ \chi_4]^T, \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} \chi_1 = \mu D(2k_b^2 + \nu \mu^2 - \nu k_b^2 - \mu^2), \chi_2 = D(\nu \mu^2 - \nu k_b^2 - \mu^2), \\ \chi_3 = \mu D(-2k_b^2 + \nu \mu^2 + \nu k_b^2 - \mu^2), \chi_4 = D(\nu \mu^2 + \nu k_b^2 - \mu^2), \end{cases} \quad (28)$$

式中,本征值  $\mu$  和待定系数  $s_i$  通过对边界条件确定,这里以对边简支为例进行说明,为

$$\mu_m = \pm \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \pm k_b^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

待定系数  $s_i$  为

$$\begin{cases} s_1 = \sin(k_2 L_x) e^{-ik_1 L_x/2}, & s_2 = -\sin(k_2 L_x) e^{ik_1 L_x/2}, \\ s_3 = -\sin(k_1 L_x) e^{-ik_2 L_x/2}, & s_4 = \sin(k_1 L_x) e^{ik_2 L_x/2}. \end{cases} \quad (30)$$

从式(29)可以看出,每给一个  $m$  对应 4 个本征值,将各本征值按照共轭辛正交关系<sup>[13]</sup>进行排序,即  $\mu_{m,1}, \mu_{m,2}, -\mu_{m,1}$  和  $-\mu_{m,2}$ . 具体是按照虚部从小到大的顺序,将实部为零的本征值排列在前面,然后按照实部从大到小的顺序排列实部小于零的本征值.将对应的本征函数向量也采用此规则排序并组成本征向量矩阵  $\boldsymbol{\psi}_m$ , 经过归一化处理,本征向量矩阵  $\boldsymbol{\psi}_m$  满足辛正交关系:

$$\int_{-L_x/2}^{L_x/2} \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{J}_4 \boldsymbol{\psi}_n dx = \begin{cases} \mathbf{J}_4 & (m = n), \\ \mathbf{0}_4 & (m \neq n), \end{cases} \quad (31)$$

其中,  $\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  为 4 阶辛矩阵,  $\mathbf{I}_2$  为 2 阶单位阵,  $\mathbf{0}_4$  为 4 阶零矩阵. 式(31)表明,特征向量矩阵  $\boldsymbol{\psi}_m$  构成了一组共轭辛正交基底,将状态向量  $\mathbf{Z}$  在该基底上进行展开:

$$\mathbf{Z} = \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_m \mathbf{c}_m(y), \quad (32)$$

其中,  $\mathbf{c}_m(y)$  为状态向量  $\mathbf{Z}$  在  $\boldsymbol{\psi}_m$  上展开得到的分量.

将式(32)代入式(21),方程两边左乘  $\boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{J}_4$  并在  $[-L_x/2, L_x/2]$  上积分,根据本征向量矩阵的正交性,方程可化简为

$$\frac{d\mathbf{c}_m(y)}{dy} = \boldsymbol{\Omega}_m \mathbf{c}_m(y) + \mathbf{b}_m, \quad (33)$$

其中,  $\boldsymbol{\Omega}_m = \text{diag}(\mu_{m,1}, \mu_{m,2}, -\mu_{m,1}, -\mu_{m,2})$ ,  $\mathbf{b}_m = -\mathbf{J}_4 \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{J}_4 \mathbf{Q} dx$ . 由于  $\mathbf{Q}$  在  $x$  方向具有  $e^{i\alpha x}$  的简谐分布形式,容易证明当且仅当  $M = m$  或  $M - m$  为奇数时,  $\mathbf{b}_m$  才不为  $\mathbf{0}$ , 这个性质将极大地简化了本文方法的计算. 同时考虑到  $\mathbf{Q}$  在  $y$  方向具有  $e^{i\alpha y}$  的简谐分布形式,因此方程(33)的解可表示为如下齐次通解与特解之和的形式:

$$\mathbf{c}_m(y) = \mathbf{T}_m \mathbf{B}_m + (i\alpha_N \mathbf{I}_4 - \boldsymbol{\Omega}_m)^{-1} \mathbf{b}_m, \quad (34)$$

其中,  $\mathbf{B}_m$  为待定系数向量,  $\mathbf{T}_m = \text{diag}(e^{\mu_{m,1} y}, e^{\mu_{m,2} y}, e^{-\mu_{m,1} y}, e^{-\mu_{m,2} y})$ .

待定系数向量  $\mathbf{B}_m$  可由另两边的边界条件确定. 这里以对边简支为例进行说明,即

$$w|_{y=-L_y/2, L_y/2} = 0, \quad M_y|_{y=-L_y/2, L_y/2} = 0. \quad (35)$$

将式(32)代入方程(35),并将其表示为矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{4 \times 4} \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_m(x) \mathbf{c}_m \left( -\frac{L_y}{2} \right) = \mathbf{0}_{4 \times 1}, \\ \mathbf{E}_{4 \times 4} \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_m(x) \mathbf{c}_m \left( \frac{L_y}{2} \right) = \mathbf{0}_{4 \times 1}, \end{cases} \quad (36)$$

其中,  $\mathbf{E}$  为边界指示矩阵,对于对边简支的情况,  $\mathbf{E} = \text{diag}(1, 0, 0, 1)$ .

方程(36)两边同时乘以  $\boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{J}_4$  并在  $[-L_x/2, L_x/2]$  上积分,根据本征向量矩阵的辛正交性可得

$$\begin{cases} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{J}_4 \mathbf{E}_{4 \times 4} \boldsymbol{\psi}_m \mathbf{c}_m \left( -\frac{L_y}{2} \right) dx = \mathbf{0}_{4 \times 1}, \\ \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \boldsymbol{\psi}_m^T \mathbf{J}_4 \mathbf{E}_{4 \times 4} \boldsymbol{\psi}_m \mathbf{c}_m \left( \frac{L_y}{2} \right) dx = \mathbf{0}_{4 \times 1}. \end{cases} \quad (37)$$

式(37)确定了4个独立的方程,将式(34)代入其中即可求解出待定系数向量 $\mathbf{B}_m$ ,进而确定 $\mathbf{c}_m(y)$ ,最后将 $\mathbf{c}_m(y)$ 代入式(32)即可求得状态向量 $\mathbf{Z}$ .

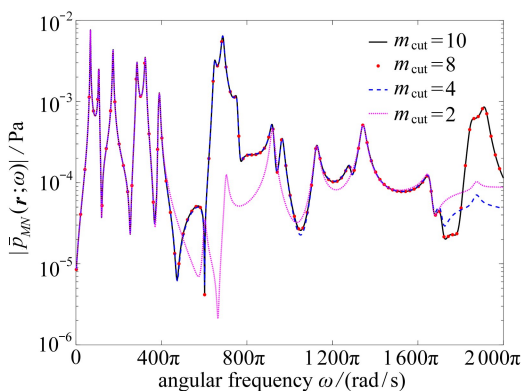
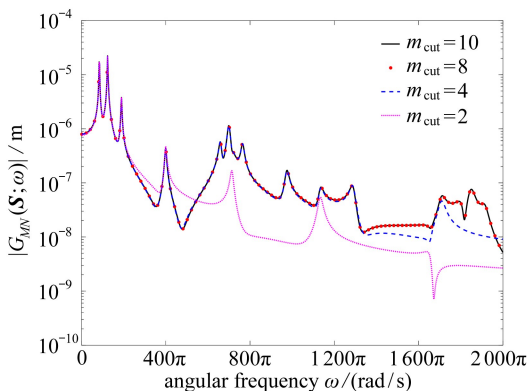
### 3 数值算例

式(14)给出了薄板辐射声压的互功率谱密度函数 $S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$ 的表达式,其中 $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$ 与频率、结构的参数和边界条件相关, $S_{ffx}(\alpha_M), S_{ffy}(\alpha_N)$ 和 $\Phi_{ff}(\omega)$ 仅与湍流边界层载荷模型相关.由此可见,影响本文方法有效性的因素主要有两个方面:一是对 $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$ 的求解,二是将湍流边界层载荷进行了Fourier级数展开,其收敛性将会直接影响到本文方法的精度与效率.因此,针对本文方法的验证也主要从这两个方面来进行.

计算模型采用文献[22]中四边简支板,其中 $L_x = 0.328$  m,  $L_y = 0.768$  m, 厚度 $h = 0.0016$  m, 弹性模量 $E = 7.1 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, 密度 $\rho = 2750$  kg/m<sup>3</sup>, Poisson比 $\nu = 0.3$ , 结构阻尼 $\eta = 0.02$ , 激励的频率范围为1~1000 Hz. 在声场中,空间点选取在一包围板的半径 $R = 5$  m的半球面上,如图1所示,其在球坐标系下的 $\theta$ 和 $\varphi$ 分别为 $\pi/2$ 和 $\pi/4$ ,即 $\mathbf{r} = (R, \theta, \varphi) = (5, \pi/2, \pi/4)$ . 流体介质选取为空气,各项参数为:密度 $\rho_0 = 1.29$  kg/m<sup>3</sup>, 声速 $c_0 = 340$  m/s.

#### 3.1 简谐响应函数的结果比较

在求解 $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$ 和 $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$ 时,本文方法仅在 $x$ 方向需要对本征向量进行截断,因此首先对该方向的收敛性进行了研究.这里取 $M = 2$ 和 $N = 2$ ,定义截断的阶次为 $m_{\text{cut}}$ ,则本文方法参与计算的本征向量总数为 $4m_{\text{cut}}$ .考虑 $m_{\text{cut}}$ 分别取2,4,8和10的情况,计算得到的 $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$ 和 $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$ 如图2所示.可以看出, $m_{\text{cut}} = 8$ 和 $m_{\text{cut}} = 10$ 两种情况下的结果几乎完全吻合,因此在1~1000 Hz频率范围内,本文方法在取 $m_{\text{cut}} = 10$ 时已经能够得到收敛的结果.



(a) 薄板上 $\mathbf{S} = (0, 0.1)$ 处位移 $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$ 的幅值

(b) 声场中 $\mathbf{r} = (5, \pi/2, \pi/4)$ 处声压 $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$ 的幅值

(a) Magnitudes of the harmonic response function corresponding to displacement  $G_{MN}(\mathbf{S}; \omega)$  at  $\mathbf{S} = (0, 0.1)$

(b) Magnitudes of sound pressure response  $\bar{p}_{MN}(\mathbf{r}; \omega)$  at  $\mathbf{r} = (5, \pi/2, \pi/4)$

图2 本文方法 $m_{\text{cut}}$ 取不同值时简谐响应函数的结果比较

Fig. 2 Comparison of the results of the harmonic response function calculated with the presented method for different  $m_{\text{cut}}$  values

进一步将本文方法与模态叠加法的结果进行了比较.由于本文方法仅需对 $x$ 方向的本征值进行截断,而模态叠加法需要同时对 $x$ 和 $y$ 方向进行模态截断,因此在计算过程中,本文方法的本征值截断阶数和模态叠加法 $x$ 方向的模态截断阶数保持一致,即均取为10.模态叠加法在 $y$ 方向的模态截断阶数定义为 $n_{\text{cut}}$ ,考虑 $n_{\text{cut}}$ 分别为5,8,10和20的情况,并将结果与本文



方法进行了比较,如图3所示.可以看出,随着 $n_{\text{cut}}$ 的增大,模态叠加法的结果逐渐趋近于本文方法的结果.当 $n_{\text{cut}} = 20$ 时,两种方法的计算结果完全一致.同时可以看出,随着激励频率的增大,模态叠加法需要更多的模态参与叠加才能得到收敛的结果.通过与模态叠加法的对比,验证了本文方法的精度.

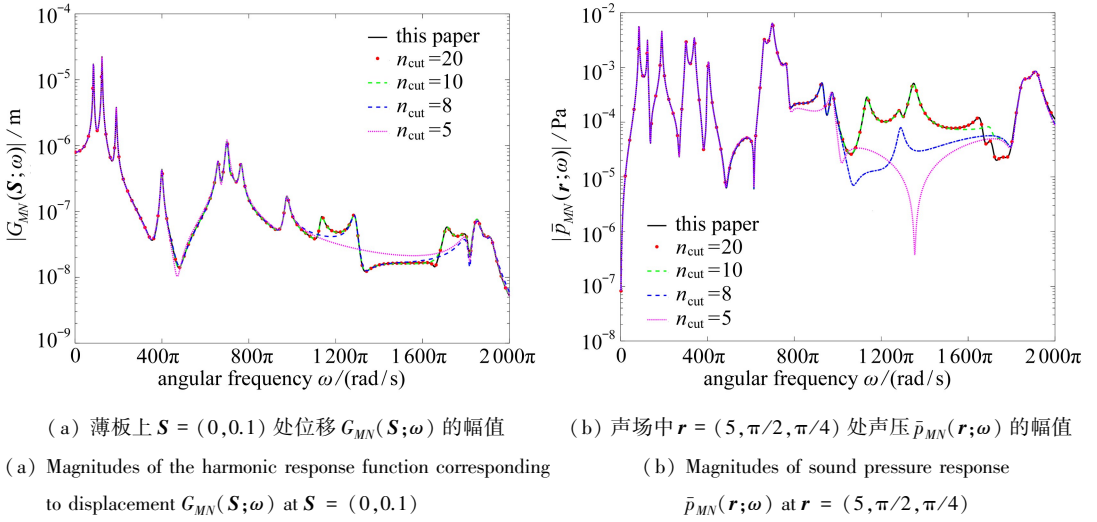


图3 本文方法与模态叠加法的结果比较

Fig. 3 Comparison of the results calculated with the presented method and the modal superposition method

### 3.2 湍流边界层作用下的辐射声场分析

进一步采用本文提出的方法分析了在湍流边界层作用下薄板随机振动的声辐射情况.湍流边界层模型采用文献[22]建议的参数,即 $c_x = 0.7, c_y = 0.116$ ,湍流的壁面速度 $U_c = 92 \text{ m/s}$ ,壁面压力场的功率谱密度函数 $\Phi_{\beta}(\omega) = 1 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$ ,频率范围为 $1 \sim 1000 \text{ Hz}$ .从声压功率谱密度表达式(20)可以看出,由于本文将湍流边界层的功率谱密度函数在 $x$ 方向和 $y$ 方向进行了Fourier级数展开,因此需要研究两个方向的级数截断对计算结果的影响,其中 $x$ 方向级数的截断阶数用 $M_{\text{cut}}$ 表示, $y$ 方向用 $N_{\text{cut}}$ 表示.

为了结果显示的方便,定义声压自功率谱密度的声压级(单位为dB)为<sup>[1]</sup>

$$S_{\text{SPL}} = 10 \lg \left( \frac{|S_{pp}|}{p_{\text{ref}}^2} \right), \quad (38)$$

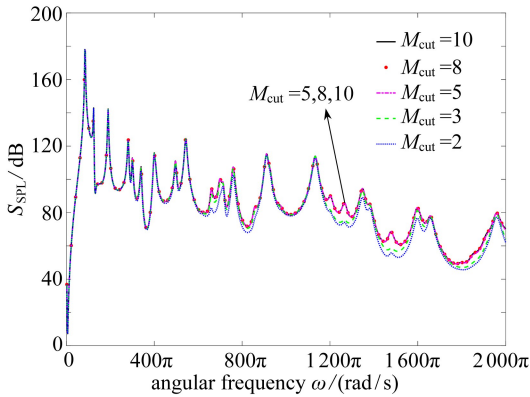
其中, $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ 为参考声压.

图4(a)和(b)分别比较了 $x$ 和 $y$ 方向的Fourier级数的截断对 $r$ 处的空间点的声压级结果的影响.在研究 $x$ 方向的截断情况时,为了保证结果不受 $y$ 方向截断的影响,在 $y$ 方向应取充分大的截断值,这里取 $N_{\text{cut}} = 50$ .同理,在研究 $y$ 方向的截断情况时,取 $M_{\text{cut}} = 50$ .从图4可看出,无论在 $x$ 方向还是 $y$ 方向,随着截断阶数 $M_{\text{cut}}$ 或 $N_{\text{cut}}$ 的增加,声压级结果逐渐趋于收敛.同时可以看出,在低频段,较小的级数截断就可以得到收敛的结果,而对于高频段则需要更大的截断阶数,这个现象与模态叠加法中模态截断对简谐响应函数的影响类似.另外一方面,还可以看出,在保证结果收敛的前提下, $x$ 方向的截断阶数比 $y$ 方向要小.

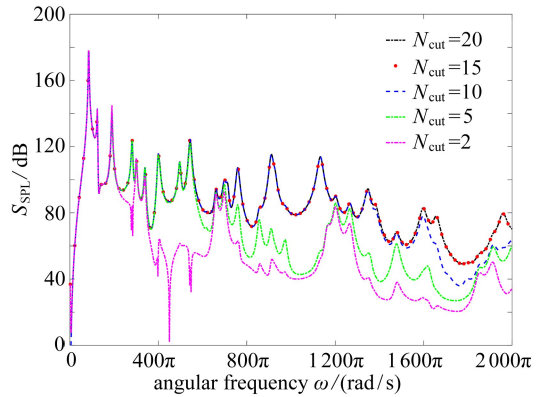
随后采用本文方法研究了湍流边界层作用下随机声场的声压功率谱密度函数的指向性.指向性<sup>[25]</sup>是描述声源辐射声场特性的一个重要参数,用来描述辐射声源将声波辐射到空间各个方向的能力,其定义为

$$D(\theta, \varphi) = \left| \frac{S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)}{S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)|_{\theta=0}} \right|, \quad (39)$$

其中,  $S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)|_{\theta=0}$  为  $\theta=0$  时的声压功率谱密度函数. 从式(18)和(14)可以看出, 当  $\theta=0$  时,  $S_{pp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega)$  与  $\varphi$  无关.



(a)  $M_{\text{cut}}$  对 SPL 结果的影响,  $N_{\text{cut}} = 50$   
(a) Influences of  $M_{\text{cut}}$  on SPL,  $N_{\text{cut}} = 50$

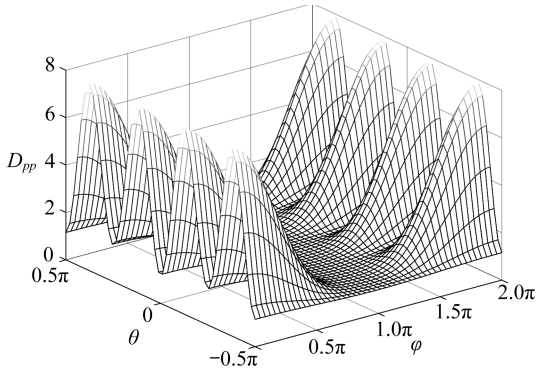


(b)  $N_{\text{cut}}$  对 SPL 结果的影响,  $M_{\text{cut}} = 50$   
(b) Influences of  $N_{\text{cut}}$  on SPL,  $M_{\text{cut}} = 50$

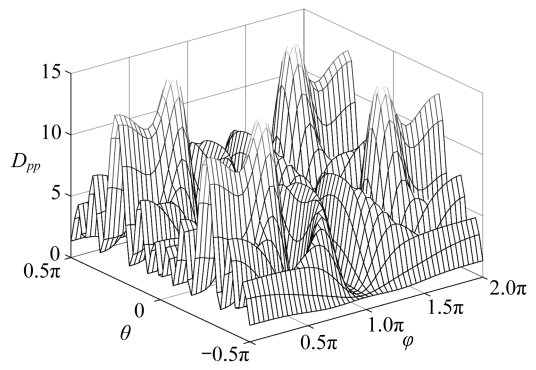
图4 Fourier级数截断对SPL结果的影响

Fig. 4 Influences of the Fourier series expansion on SPL

图5给出了声压功率谱密度函数在频率分别为170 Hz和1 000 Hz的指向性.可以看出,声压功率谱密度函数在空间上的分布非常复杂,在不同的方向上,声压功率谱密度函数周期性地出现极大与极小值.在  $\theta=0$  和  $\varphi=\pi$  的轴线上指向性较弱,声压功率谱密度在轴线对称的两侧出现对称的指向性;随着频率的增大,指向性变得愈发复杂,除了主峰外出现了其他峰值.



(a)  $\omega/(2\pi) = 170 \text{ Hz}$

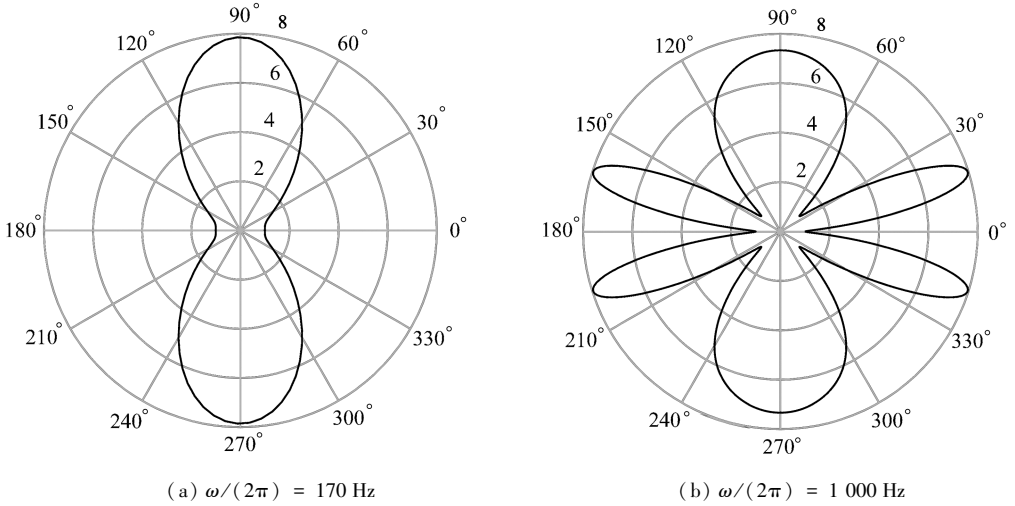
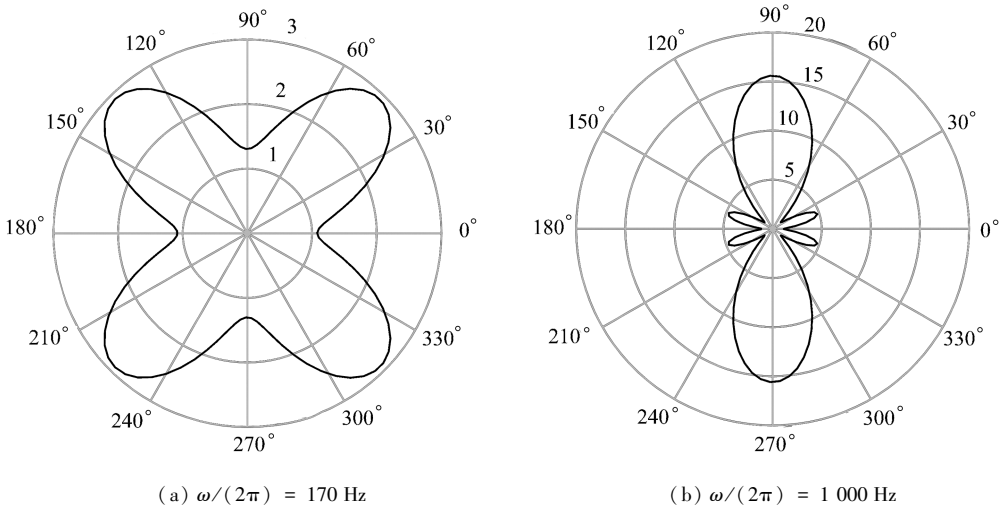


(b)  $\omega/(2\pi) = 1 000 \text{ Hz}$

图5 不同频率下声压功率谱密度函数的指向性

Fig. 5 The directivity pattern of the power spectral density of the sound pressure response under different frequencies

图6和图7分别给出了  $\varphi=\pi/4$  和  $\theta=\pi/4$  时声压功率谱密度函数的指向性.图6所示的声场指向性描述的是在垂直于薄板所在平面的平面内,辐射声场随  $\theta$  的变化规律,即当  $\varphi$  等于常数时,指向性函数与  $\theta$  的关系.图7所示的声场指向性描述的是当  $\theta$  为常数时,指向性函数与  $\varphi$  的关系.从图6和图7可看到,随着频率的增加,声压功率谱密度的指向性在不同方向上出现越来越多的极值,主瓣越来越尖锐,旁瓣不断增加.

图 6  $\varphi = \pi/4$  时薄板的指向性Fig. 6 The directivity pattern of the thin plate in flexural vibration,  $\varphi = \pi/4$ 图 7  $\theta = \pi/4$  时薄板的指向性Fig. 7 The directivity pattern of the thin plate in flexural vibration,  $\theta = \pi/4$ 

## 4 结 论

针对湍流边界层作用下薄板随机振动的声辐射问题,本文提出了一种基于辛对偶体系的方法.将湍流边界层的互功率谱密度函数进行 Fourier 级数展开,则湍流边界层作用下薄板随机振动辐射声压的互功率谱密度函数可通过对空间和时间简谐压力作用下的确定性简谐响应的求解得到.在求解简谐响应时,本文将薄板的运动方程导入辛状态空间,通过分离变量得到辛本征值问题,并将状态向量和外作用向量用辛本征向量进行展开,得到解耦后的方程,最终得到了简谐响应函数的解析解.本文方法由于仅在  $x$  方向上进行截断,因此相比模态叠加法,在计算精度方面有一定优势.采用本文方法计算了湍流边界层作用下薄板随机振动辐射的声压功率谱密度函数的声压级,讨论了因 Fourier 级数截断而产生的收敛性问题.计算结果表明,Fourier 级数在  $x$  方向比  $y$  方向收敛得更慢.最后,采用本文方法研究了湍流边界层作用下薄板

随机振动辐射声场的指向性.从计算结果可以看出,随着频率的增大,其辐射声场的指向性变得愈加复杂.

### 参考文献(References):

- [1] ALLEN M J, VLAHOPOULOS N. Integration of finite element and boundary element methods for calculating the radiated sound from a randomly excited structure[J]. *Computers & Structures*, 2000, **77**(2): 155-169.
- [2] MONTGOMERY J M. Modeling of aircraft structural-acoustic response to complex sources using coupled FEM-BEM analyses[C]//10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Manchester, Great Britain, 2004: AIAA 2004-2822.
- [3] 刘宝山, 赵国忠. 随机激励下结构振动声辐射的灵敏度分析和优化设计[J]. 振动工程学报, 2011, **24**(3): 309-314.(LIU Baoshan, ZHAO Guozhong. Sensitivity analysis and design optimization of acoustic radiation from random excited structures[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, **24**(3): 309-314.(in Chinese))
- [4] 凌芳芳. 湍流边界层脉动压力激励潜艇模型振动声辐射[D]. 硕士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2013.(LING Fangfang. Vibration and noise of submarine model excited by TBL dynamic pressure[D]. Master Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2013.(in Chinese))
- [5] 蔡承德, 陈永琴, 张龙. 统计能量法在分析船舶结构噪声中的应用[J]. 中国造船, 1992(1): 58-70.(CAI Chengde, CHEN Yongqin, ZHANG Long. Application of statistical energy analysis to ship structure-borne noise analysis[J]. *Shipbuilding of China*, 1992(1): 58-70.(in Chinese))
- [6] HAN F, BERNHARD R J, MONGEAU L G. Prediction of flow-induced structural vibration and sound radiation using energy flow analysis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **227**(4): 685-709.
- [7] NEWLAND D E. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*[M]. New York: Longman, 2012.
- [8] THOMAS D R, NELSON P A. Feedback control of sound radiation from a plate excited by a turbulent boundary layer[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, **98**(5): 2651-2662.
- [9] LIU B. Noise radiation of aircraft panels subjected to boundary layer pressure fluctuations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **314**(3/5): 693-711.
- [10] 刘钊, 陈心昭. 求解随机振动结构声辐射的统计边界元方法[J]. 声学学报, 1997, **22**(6): 495-500.(LIU Zhao, CHEN Xinzhaoh. Statistic boundary element analysis for structural sound radiation of random vibration[J]. *Acta Acustica*, 1997, **22**(6): 495-500.(in Chinese))
- [11] 王秀峰, 陈心昭. 随机振动结构声辐射的统计边界点法分析[J]. 声学技术, 2001, **20**(3): 107-109, 128.(WANG Xiufeng, CHEN Xinzhaoh. The statistical boundary point analysis of acoustic radiation problem caused by the random vibrating body[J]. *Technical Acoustics*, 2001, **20**(3): 107-109, 128.(in Chinese))
- [12] 高煜. 基于波叠加方法的声辐射与声学灵敏度算法的若干关键问题研究[D]. 博士学位论文. 合肥: 合肥工业大学, 2009.(GAO Yu. Research on several key problems of the acoustic radiation and the acoustic sensitivity analysis based on the wave superposition approach[D]. PhD Thesis. Hefei: Hefei University of Technology, 2009.(in Chinese))
- [13] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.(YAO Weian, ZHONG Wanx-

- ie. *Symplectic Elasticity*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.(in Chinese))
- [14] 鲍四元, 邓子辰. 哈密顿体系下矩形薄板自由振动的一般解[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 10-16.(BAO Siyuan, DENG Zichen. A general solution of free vibration for rectangular thin plates in Hamilton systems[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 10-16.(in Chinese))
- [15] 钟阳, 李锐, 田斌. 矩形中厚板自由振动问题的哈密顿体系与辛几何解法[J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(4): 302-307.(ZHONG Yang, LI Rui, TIAN Bin. On Hamilton system and new symplectic approach for free vibration of moderately thick rectangular plates[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(4): 302-307.(in Chinese))
- [16] 李锐. 矩形板问题的 Hamilton 求解方法[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2012.(LI Rui. Hamiltonian solution approach for the problems of rectangular plates[D]. PhD Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2012.(in Chinese))
- [17] 邹贵平. 反对称铺设层合板动力问题的 Hamilton 体系及辛几何解法[J]. 固体力学学报, 1996, 17(4): 312-319.(ZOU Guiping. An exact symplectic solution for the dynamic analysis of shear deformable antisymmetric angle-ply laminated plates [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, 17(4): 312-319.(in Chinese))
- [18] 姚伟岸. 平面各向异性哈密顿体系及圣维南问题的解析解[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(5): 612-615.(YAO Weian. Hamiltonian system for plane anisotropic elasticity and analytical solutions of Saint-Venant problem[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1999, 39(5): 612-615.(in Chinese))
- [19] 周晓楠, 姜哲, 吴苏萍. 基于时域声辐射模态的结构噪声主动控制研究[J]. 振动与冲击, 2006, 25(6): 29-34.(ZHOU Xiaonan, JIANG Zhe, WU Suping. Study on active control of structural noise based on acoustic radiation modes in time domain[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(6): 29-34.(in Chinese))
- [20] LIN Y K. *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [21] CORCOS G M. The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, 18(3): 353-378.
- [22] BIRGERSSON F, FERGUSON N S, FINNVEDEN S. Application of the spectral finite element method to turbulent boundary layer induced vibration of plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(4): 873-891.
- [23] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983.(CAO Zhiyuan. *Vibration Theory of Plates and Shells*[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1983.(in Chinese))
- [24] 张亚辉, 马永彬. 薄板振动分析的辛空间波传播方法[J]. 振动与冲击, 2014, 33(12): 1-6.(ZHANG Yahui, MA Yongbin. A wave propagation method in symplectic space for vibration analysis of thin plates[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(12): 1-6.(in Chinese))
- [25] LIN S Y. Study on the radiation acoustic field of rectangular radiators in flexural vibration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(3): 469-479.

# Random Sound Radiation of Thin Plates Under Turbulent Boundary Layer Excitations With a Symplectic Method

PAN Chengge, LI Yuyin, ZHANG Yahui

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment*  
(*Dalian University of Technology*), Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Contributed by ZHANG Yahui, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The random sound radiation of thin plates subjected to turbulent boundary layer (TBL) excitations was studied in the symplectic duality system. Firstly, the cross power spectral density of the TBL was represented by a Fourier series, and the problem of the random sound radiation of structures excited by a random field was reduced to solve the deterministic response function, i.e. the structural response to a spatial and temporal harmonic pressure of unit magnitude. Secondly, the free vibration analysis of thin plates was introduced to the symplectic duality system, then a symplectic eigenproblem was formed with the method of separation of variables. Finally, the decoupled governing equations were derived through expansion of the response and excitation vectors in the symplectic space, to reduce the difficulty of solving the equations, and the symplectic analytical solution was obtained. In contrast to the modal decomposition method (MDM), the presented method is formulated in the symplectic duality system and does not need modal truncation, hence the computations are of high precision. In the numerical examples, the harmonic response functions for the thin plate were studied, and a comparison was made with the MDM to verify the effectiveness of the presented method. Thereafter, the sound pressure levels (SPL) of the power spectral density of the sound pressure response to the TBL were obtained, the convergence induced by the Fourier series expansions was examined, and the directivity functions of the radiation sound field were extensively investigated.

**Key words:** symplectic duality system; turbulent boundary layer; random vibration; random sound radiation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11672060)

---

引用本文/Cite this paper:

潘晨鸽, 李榆银, 张亚辉. 湍流边界层作用下薄板随机振动声辐射的辛方法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 50-63.

PAN Chengge, LI Yuyin, ZHANG Yahui. Random sound radiation of thin plates under turbulent boundary layer excitations with a symplectic method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 50-63.