

双势积分算法在非关联材料中的应用*

周洋靖, 冯志强, 彭磊

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

(本刊编委冯志强来稿)

摘要: 在双势理论的框架下,根据材料自由能形式,材料可以被划分为显式标准材料和隐式标准材料.以经典的非关联 D-P 模型为例,对其本构锥体进行了描述,并引入了一对对偶锥体.证明了对偶锥体的描述下,不仅能满足非关联 D-P 模型自身本构关系,其应力和塑性应变也能满足隐式流动表达.结合双势理论和 D-P 模型自身的本构特点,推导出了非关联 D-P 模型率形式弹性状态下、率形式塑性状态下、增量形式弹性状态下、增量形式塑性状态下和增量形式弹塑性状态下的双势函数,从而得到了非关联 D-P 模型的双势积分算法.通过数值模拟算例验证了双势积分算法的准确性和稳定性.

关键词: 非关联材料; 双势理论; 正交性; 非关联 D-P 模型; 数值模拟

中图分类号: O39; O341 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.380139

引言

探究材料本构关系一直是固体力学中一个重要的研究课题^[1],能正确模拟材料的应力-应变关系,即数值实现材料的本构积分,是材料非线性研究的核心^[2].对于经典的关联性材料,如大部分金属材料,其理论框架较为成熟,研究方法较为经典,研究成果也较为丰富^[3].同样,大量的研究人员也对非关联材料进行了深入的研究^[4].但直到现在,如何在复杂的工程实践中,找到更有效、更准确的模拟方法仍然是一个难题^[5].

根据不同的理论假设,不同的数值实现方法,非关联材料模型的本构积分方法存在一定的差异,文献[6]对非关联模型本构进行了简单的讨论.其中,Drucker-Prager 模型(以下简称 D-P 模型)是一种常用的非关联材料模型^[7],常被用于模拟非关联土体材料.能高效准确地模拟简单工况下非关联 D-P 模型的本构关系,是成功模拟复杂非关联材料的基础^[8].

针对非关联 D-P 模型应力-应变关系,传统塑性力学采用显式本构积分算法(explicit integration algorithm)^[9],在每一步迭代计算中,只通过结构满足整体平衡来计算求解材料应力增量.这种方法的优势在于模型本构积分只依赖于材料的屈服势函数 F 与流动势函数 P 的函数形式.因此采用显式本构积分算法推导模型本构相对容易.但是由于此方法每一步计算其结构只满足整体平衡,可能会造成计算过程的不稳定,计算效率有一定局限^[10].由此可见,显式本

* 收稿日期: 2017-05-15; 修订日期: 2017-05-23

基金项目: 国家自然科学基金(11372260)

作者简介: 周洋靖(1988—),男,博士生(通讯作者. E-mail: yjzhou1988@qq.com);
冯志强(1963—),男,教授,博士生导师(E-mail: feng@ufrst.univ-evry.fr);
彭磊(1990—),男,博士生(E-mail: penglei.swjtu@foxmail.com).

构积分算法能有效模拟小型非关联材料的本构关系,但在处理复杂的大型非关联模型时存在一定困难。

Simo 和 Taylor 基于加卸载条件和一致性原理,于 1985 年提出了一种隐式本构积分算法 (implicit integration algorithm),也称为回退映射积分算法 (return mapping integration algorithm)^[11],此方法被广泛应用到固体力学材料的本构模拟中。尤其是针对关联材料,有较为理想的模拟效果。关联材料流动势函数 P 与屈服势函数 F 具有关联性,其流动法则满足正交性。隐式本构积分算法在每一步迭代计算中,不仅满足全局结构上的整体平衡,也满足模型局部上的本构关系,这种算法更为稳定,效率相对较高^[12]。但是隐式本构积分算法处理非关联材料时,其算法的稳定性和精确性取决于流动势函数 P ,不同形式的流动势函数 P 对计算结果影响较大^[13]。许多研究者在隐式本构积分算法的基础上,对非关联 D-P 模型进行了相应的研究^[14],提出了一些流动势函数 P 的确定方法,并给出了其本构积分的相关步骤和数值模拟结果,模拟结果较为理想。但是,在隐式本构积分算法中,对于非关联塑性材料,构造流动势函数 P 的方法较为复杂,势函数 P 中某些项物理意义较为模糊。可见,对于非关联材料,隐式本构积分算法具有一定的局限性。

双势理论 (bi-potential theory) 由 de Saxcé 和 Feng 于 1991 年提出^[15]。其理论基础建立在 Legendre 定理上,通过 Fenchel 变换,形成了一套能有效处理对偶变量的 Fenchel 不等式。1992 年,de Saxcé 通过 Fenchel 不等式处理材料的自由能,根据自由能是否能被分解为两个独立的对偶势,将材料分为显式标准材料 (explicit standard material) 和隐式标准材料 (implicit standard material)^[16]。并且,其于 1995 年提出了双势积分算法 (bi-potential integration algorithm),并证明此算法在处理隐式标准材料时,不仅能满足材料的本构关系,还能保证材料应力和塑性应变的正交表达形式,算法具有自身的优势^[17]。目前双势理论的研究在国内还处于起步阶段,但在国际上已经开始了一些相关工作的探索,尤其是针对接触摩擦问题、关联土体本构问题、非关联硬化本构问题、非关联材料均匀化问题等。

由于接触面的法向与接触力的方向不一定共线,所以接触摩擦本构为典型的非关联本构^[18]。Feng 于 1995 年成功将双势应用于处理 2D 和 3D 情况下的接触摩擦本构问题^[19]。之后,de Saxcé 等对双势积分算法处理接触摩擦本构进行了总结^[20],该算法融合接触中的 Signorini 条件和 Coulomb 条件^[21],较传统算法处理接触摩擦问题能更为有效。Joli 等采用 Uzawa 方法替代双势积分算法中的 Newton 方法来求解非线性方程,进一步提高了双势积分算法的计算效率^[22]。研究者们还将这种算法发展到伴随大变形接触问题^[23]、各向异性接触问题^[24]、冲击动力学接触问题^[25]等,都得到了较为理想的结果。

同样,根据非关联材料能量势函数的表达形式可知,一些非关联土体材料也属于隐式标准材料^[26]。1995 年,de Saxcé 证明了采用双势理论处理非关联土体材料问题的可行性^[17]。之后,Bousshine 等推导出了双势积分算法处理非关联土体材料本构的具体形式^[27]。Berga 针对非关联土体材料中具体的理想塑性模型,给出了双势积分算法的具体步骤^[28],并对双势积分算法的理论框架、数值实现过程进行了总结^[29]。Zhou 等结合 Berga 的工作,推导出了非关联岩土体材料的双势函数,并进行了简单的数值模拟^[30]。

Bodovillé 等运用双势积分算法处理非关联随动硬化模型^[31]。Bouby 等结合微动分析,通过双势积分算法,比较了线性有限、线性无限和非线性随动硬化材料^[32]。Chaaba 等结合极限分析,阐述了双势积分算法处理非线性随动硬化材料的优势^[33]。周洋靖等通过两种常用的非关联材料模型,比较了双势积分算法和回退映射算法,总结了各自适用范围^[34]。研究结果表明,结合双势积分算法分析非关联随动硬化模型能得到较为理想的结果。

Cheng 等采用双势积分算法,数值模拟各向同性加载条件下,非关联材料空心圆球的受力^[35]。他们还将双势理论结合到极限分析中,针对塑性多孔材料,推导出了一种应力更新变分模型^[36]。最近,Cheng 等利用双势的概念,处理非关联材料的均匀化问题^[37]。研究表明,建立在双势理论下的双势积分算法处理隐式标准材料,具有自身独特的优势^[38]。

以非关联材料中的 D-P 模型为例,本文从模型的本构圆锥出发,通过圆锥的空间变化,阐述了非关联 D-P 模型对偶锥体满足模型的正交表达。结合双势理论,逐步构造增量形式下非关联 D-P 模型弹塑性状态的双势函数 $\Delta b(\Delta\boldsymbol{\sigma}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ 。还列出了双势积分算法详细计算程序并对其进行了数值实现,通过单向拉伸和单向压缩两个简单的数值模拟算例,验证双势积分算法的准确性和稳定性。

1 双势理论

de Saxcé 和 Feng 按照材料自由能的函数形式,将材料模型分为显式标准材料和隐式标准材料^[16]。显式标准材料具有关联材料的特征,其塑性流动方向正交于屈服面,隐式标准材料具有非关联材料的特征,其塑性流动方向与屈服面不正交。在传统塑性力学框架下,两种材料的流动法则具有不同的表达,但在双势理论的框架下,两种材料的流动法则可以统一。

1.1 显式标准材料

显式标准材料能量势函数可以分解为两种对偶势函数 $W(\boldsymbol{\sigma})$ 和 $V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$, $W(\boldsymbol{\sigma})$ 为共轭凸函数, $V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 为外凸势函数,其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为应变率张量,二者为一对对偶二阶张量,且 $W(\boldsymbol{\sigma})$ 和 $V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 满足 Fenchel 不等式^[39],则有

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad W(\boldsymbol{\sigma}) + V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (1)$$

当且仅当 $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 取得极值时等号成立,即 $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 满足材料本构关系,此时

$$W(\boldsymbol{\sigma}) + V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2)$$

对不等式(1)两边作如下变换:

$$\forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}') - V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad (3)$$

$$\forall \boldsymbol{\sigma}' \quad W(\boldsymbol{\sigma}') - W(\boldsymbol{\sigma}) \geq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}), \quad (4)$$

可以得到显式标准材料正交准则的一般表达式

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \partial W(\boldsymbol{\sigma}). \quad (5)$$

文献[11]中, Simo 和 Taylor 将显式标准材料的流动准则表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (6)$$

其中, $\dot{\lambda}$ 为塑性乘子,可以看出显式标准材料的流动准则在式(5)、(6)中具有类似的形式。

1.2 隐式标准材料

对于隐式标准材料能量势函数不能分解,文献[16]中定义双势函数 $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$, $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 满足不等式

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (7)$$

当且仅当 $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 取得极值时等号成立,即 $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 满足材料本构关系时,此时

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (8)$$

对不等式(7)两边做如下变换:

$$\forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}') - b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad (9)$$

$$\forall \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma} \quad b(\boldsymbol{\sigma}', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}), \quad (10)$$

可以得到隐式标准材料正交准则的一般表达式

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \partial b_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (11)$$

若令 $b(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = W(\boldsymbol{\sigma}) + V(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$, 则为显式标准材料. 因此, 可以认为显式标准材料是隐式标准材料的特殊情况.

2 非关联 D-P 模型

非关联 D-P 模型是经典的三参数(黏聚力 c , 内摩擦角 ϕ , 剪胀角 θ) 非关联材料模型^[40], 参数确定方法详见文献[41]. 非关联 D-P 模型的本构可以通过一共轭张量: 应力张量 $\boldsymbol{\sigma} = (s_m, \mathbf{s})$ 和塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = (\dot{\varepsilon}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ 来表示, 其中 $s_m = (1/3)\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - s_m \mathbf{1}$, $\dot{\varepsilon}_m^p = \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - (\dot{\varepsilon}_m^p/3)\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ 为二阶单位张量.

2.1 D-P 模型本构锥体

在弹性状态下, 应力 $\boldsymbol{\sigma} = (s_m, \mathbf{s})$ 处于应力圆锥 $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 内; 在塑性状态下, 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 必须处于应力圆锥 $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 上, 如图 1 所示, $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 有如下集合表达:

$$K_{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ (s_m, \mathbf{s}) \mid \frac{\|\mathbf{s}\|}{k_d} + s_m \tan \phi \leq c \right\}, \quad (12)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示 Euclid (欧几里得) 范数, k_d 为一个与内摩擦角有关的量^[42], 在主应力空间中, 取 Mohr-Coulomb 角锥的内切圆为 D-P 圆锥, 所以有

$$k_d = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}. \quad (13)$$

根据 D-P 模型的流动法则, 可以得到塑性应变率圆锥 $K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, 如图 1 所示, $K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 也可以表示为塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = (\dot{\varepsilon}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ 的集合. 只有在塑性状态下, 才有塑性应变的产生, 所以 $K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 只存在于应力圆锥 $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的边界上, 根据 $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的可微性, 可以知道:

1) 对于应力圆锥的一般点, 即 $\left(s_m \neq \frac{c}{\tan \phi} \text{ 和 } \|\mathbf{s}\| \neq 0 \right)$, $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 是可微的, 塑性应变的流动方向确定, 塑性应变率唯一, 此时有

$$K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \{ (\dot{\varepsilon}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \mid \dot{\varepsilon}_m^p = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| k_d \tan \theta \}. \quad (14)$$

2) 对于应力圆锥的顶点, 即 $(s_m = c/\tan \phi \text{ 和 } \|\mathbf{s}\| = 0)$, $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 不可微, 塑性应变的流动方向不确定, 塑性应变率不唯一, 其流动方向为一个集合, 则有

$$K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \{ (\dot{\varepsilon}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \mid \dot{\varepsilon}_m^p \geq \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| k_d \tan \theta \}. \quad (15)$$

所以, D-P 模型的塑性应变率圆锥 $K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 可以统一表示为

$$K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \{ (\dot{\varepsilon}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \mid \dot{\varepsilon}_m^p \geq \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| k_d \tan \theta \}. \quad (16)$$

引入符号函数 $\Psi(K_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}))$ 和 $\Psi(K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p))$, 定义

$$\Psi(K_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma})) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{\sigma} \in K_{\boldsymbol{\sigma}}, \\ +\infty, & \text{other}, \end{cases} \quad (17a)$$

$$\Psi(K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)) = \begin{cases} 0, & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \\ +\infty, & \text{other}. \end{cases} \quad (17b)$$

根据传统的正交定理, 有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial \Psi(K_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma})) \Rightarrow (\dot{\varepsilon}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \in (\partial_{s_m} \Psi(K_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma})), \partial_{\mathbf{s}} \Psi(K_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}))), \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial \Psi(K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)) \Rightarrow (s_m, \mathbf{s}) \in (\partial_{\dot{\varepsilon}_m^p} \Psi(K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)), \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \Psi(K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p))). \quad (19)$$

易知, $\partial \Psi(K_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}))$ 和 $\partial \Psi(K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p))$ 对应的分别为集合 $K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 和 $K_{\boldsymbol{\sigma}}$, 从图 1 中可以看出, 当且仅当 $\theta = \phi$ 时, $K_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 和 $K_{\boldsymbol{\sigma}}$ 互为对偶圆锥(两圆锥的母线正交), 此时 D-P 模型是关联的, 塑性应

变率的流动方向垂直应力屈服面;在 $\theta \neq \phi$ 时,此时 D-P 模型是非关联的,塑性应变率的流动方向与应力屈服面的法向存在 $\phi - \theta$ 的夹角.由此可见,非关联 D-P 模型的传统表达虽然满足了模型的本构关系,但塑性应变率与屈服面不垂直.希望寻求一种新的表述,既能满足非关联 D-P 模型的本构关系,又能表达模型的正交性.

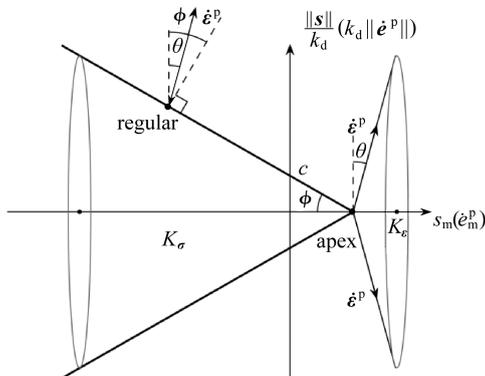


图 1 D-P 非关联模型圆锥

Fig. 1 The cone of the non-associated D-P model

2.2 D-P 模型对偶锥体

将非关联 D-P 模型的应力圆锥沿 s_m 轴的负方向移动 $c/\tan \phi$, 即将应力圆锥 K_σ 移动到顶点 $(s_m, \|s\|) = (0, 0)$ 的位置, 如图 2 所示, 此时得到的新的应力圆锥为 K_σ^* , 有

$$K_\sigma^* = \left\{ (s_m, s) \mid \frac{\|s\|}{k_d} + s_m \tan \phi \leq 0 \right\}. \quad (20)$$

根据对偶圆锥的定义, 有应力圆锥 K_σ^* 的对偶圆锥 K_ϵ^* :

$$K_\epsilon^* = \{ (\dot{e}_m^p, \dot{e}^p) \mid \dot{e}_m^p \geq \|\dot{e}^p\| k_d \tan \phi \}. \quad (21)$$

根据新圆锥与传统圆锥的几何特征, 再由式 (18)、(19) 可以得到如下关系:

$$\sigma \in \partial \Psi(K_\epsilon(\dot{e}^p)) = \partial \Psi(K_\epsilon^*(\dot{e}^p)) + \left(\frac{c}{\tan \phi}, s \right), \quad (22)$$

$$\dot{e}^p \in \partial \Psi(K_\sigma(\sigma)) = \partial \Psi(K_\sigma^*(\sigma)) + (k_d(\tan \theta - \tan \phi) \|\dot{e}^p\|, s). \quad (23)$$

将式 (22)、(23) 分解为静水压力部分和偏量部分, 则有

$$\begin{cases} s_m \in \partial_{\dot{e}_m^p} \Psi(K_\epsilon^*(\dot{e}^p)) + \frac{c}{\tan \phi}, \\ s \in \partial_{\dot{e}^p} \Psi(K_\epsilon^*(\dot{e}^p)), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \dot{e}_m^p \in \partial_{s_m} \Psi(K_\sigma^*(\sigma)) + k_d(\tan \theta - \tan \phi) \|\dot{e}^p\|, \\ \dot{e}^p \in \partial_s \Psi(K_\sigma^*(\sigma)). \end{cases} \quad (25)$$

整理式 (24)、(25), 可以得到

$$\begin{cases} s_m - \frac{c}{\tan \phi} \in \partial_{\dot{e}_m^p} \Psi(K_\epsilon^*(\dot{e}^p)), \Rightarrow \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi}, s \right) \in \partial \Psi(K_\epsilon^*(\dot{e}^p)), \\ s \in \partial_{\dot{e}^p} \Psi(K_\epsilon^*(\dot{e}^p)), \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \dot{e}_m^p + k_d(\tan \phi - \tan \theta) \|\dot{e}^p\| \in \partial_{s_m} \Psi(K_\sigma^*(\sigma)), \\ \dot{e}^p \in \partial_s \Psi(K_\sigma^*(\sigma)), \end{cases} \Rightarrow \quad (27)$$

$$(\dot{e}_m^p + k_d(\tan \phi - \tan \theta) \|\dot{e}^p\|, \dot{e}^p) \in \partial \Psi(K_\sigma^*(\sigma)).$$

根据以上推导,可以得到 D-P 模型正交法则对偶锥体的表达式:

$$(\dot{\epsilon}_m^p + k_d(\tan \phi - \tan \theta) \|\dot{\epsilon}^p\|, \dot{\epsilon}^p) = \partial \Psi \left(K_\sigma^* \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi}, s \right) \right), \quad (28)$$

$$\left(s_m - \frac{c}{\tan \phi}, s \right) = \partial \Psi (K_\epsilon^* (\dot{\epsilon}_m^p + k_d(\tan \phi - \tan \theta) \|\dot{\epsilon}^p\|, \dot{\epsilon}^p)). \quad (29)$$

由于 K_σ^* 与 K_ϵ^* 为对偶圆锥, $\sigma = (s_m, s)$ 与 $\dot{\epsilon}^p = (\dot{\epsilon}_m^p, \dot{\epsilon}^p)$ 为对偶变量,再根据第 1 节中介绍的双势理论,希望寻找一个能统一表示 $\partial \Psi(K_\sigma^*(\sigma))$ 和 $\partial \Psi(K_\epsilon^*(\dot{\epsilon}^p))$ 的双势函数表达非关联 D-P 模型,使之既满足材料的本构关系,也满足材料的双势积分算法。

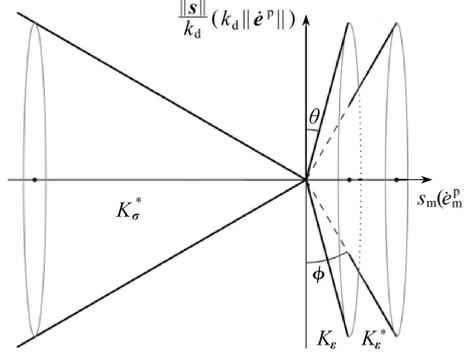


图 2 应变率圆锥 K_ϵ 与 K_ϵ^*

Fig. 2 The plastic strain rate cone K_ϵ and K_ϵ^*

3 建立非关联 D-P 模型双势函数

推导非关联 D-P 模型的本构积分算法,首先需要建立模型的双势函数.采用分情况推演的思路,分别建立非关联 D-P 模型率形式弹性状态下、率形式塑性状态下、增量形式弹性状态下、增量形式塑性状态下和增量形式弹塑性状态下的双势函数,推演过程如图 3 所示。

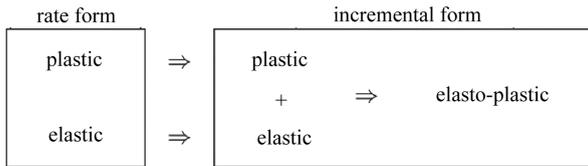


图 3 增量形式弹塑性双势函数的推演策略

Fig. 3 The deriving strategy of incremental elasto-plasticity

3.1 建立率形式弹性状态的双势函数 $b^e(\sigma, \dot{\epsilon}^e)$

在弹性状态下,非关联 D-P 模型的双势函数满足显式标准材料双势函数的特征,所以有

$$b^e(\sigma, \dot{\epsilon}^e) = V^e(\dot{\epsilon}^e) + W^e(\sigma) \geq \sigma : \dot{\epsilon}^e, \quad (30)$$

其中, $V^e(\dot{\epsilon}^e)$ 与 $W^e(\sigma)$ 也被称为应变能密度与应变余能密度^[43].根据 $V^e(\dot{\epsilon}^e)$ 和 $W^e(\sigma)$ 的定义,直接可以得到 D-P 模型弹性状态下应力与塑性应变率的正交表达式:

$$\dot{\epsilon}^e \in \partial W^e(\sigma) = \partial_\sigma b^e(\sigma, \dot{\epsilon}^e), \quad (31)$$

$$\sigma \in \partial V^e(\dot{\epsilon}^e) = \partial_{\dot{\epsilon}^e} b^e(\sigma, \dot{\epsilon}^e). \quad (32)$$

3.2 建立率形式塑性状态的双势函数 $b^p(\sigma, \dot{\epsilon}^p)$

在塑性状态下,由于非关联 D-P 模型为隐式标准材料,根据式(7),有

$$b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})) + \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)). \quad (33)$$

当材料满足非关联 D-P 模型本构时,有

$$b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})) + \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)). \quad (34)$$

将 $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 分解为静水压力部分和偏量部分,即

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = s_m \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p + \boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})) + \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)), \quad (35)$$

其中,静水压力项可以做如下变换:

$$s_m \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p = \frac{c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p}{\tan \phi} + \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p. \quad (36)$$

再由式(12)和(16)可以得到

$$s_m \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p \leq \frac{c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p}{\tan \phi} + k_d \tan \theta \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|. \quad (37)$$

对于偏量项,由 Cauchy-Schwarz 不等式和式(12)可以得到

$$\boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \leq \|\boldsymbol{s}\| \cdot \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \leq -k_d \tan \phi \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|. \quad (38)$$

由式(33)、(35)、(37)、(38)可以得到 D-P 模型塑性状态在率形式下的双势函数表达式:

$$b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq \frac{c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p}{\tan \phi} + k_d (\tan \theta - \tan \phi) \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| + \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})) + \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)). \quad (39)$$

若此时 $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ 满足非关联 D-P 模型的本构关系,则有

$$b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \frac{c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p}{\tan \phi} + k_d (\tan \theta - \tan \phi) \left(s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| + \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})) + \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)). \quad (40)$$

验证 $b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ 的双势积分算法,将式(39)分别对 $\boldsymbol{\sigma} = (s_m, \boldsymbol{s})$ 与 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ 求偏导数, D-P 模型塑性状态下的正交法则可以表示为

$$\begin{cases} \partial_{s_m} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = k_d (\tan \theta - \tan \phi) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| + \partial_{s_m} \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})), \\ \partial_s b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \partial_s \Psi(K_\sigma^*(\boldsymbol{\sigma})), \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \frac{c}{\tan \phi} + \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p} \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)), \\ \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \Psi(K_\varepsilon^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)). \end{cases} \quad (42)$$

对比式(24)、(25),可以知道

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^p \in \partial_{s_m} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial_s b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \end{cases} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial_{\boldsymbol{\sigma}} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad (43)$$

$$\begin{cases} s_m \in \partial_{s_m} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \\ \boldsymbol{s} \in \partial_s b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} b^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (44)$$

由此可知,非关联 D-P 模型塑性状态下的双势函数,满足应力与塑性应变率的正交表达。

3.3 建立增量形式弹性状态的双势函数 $\Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e)$

假设应变率随时间线性变化,则有

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta t \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (45)$$

下标 0 表示初始迭代时的状态,下标 1 表示此步迭代最终的状态.所以,根据以上关系,可以建立增量形式下非关联 D-P 模型的双势函数。

当模型处于弹性状态时,满足弹性状态的本构关系,此时模型具有显式标准材料的特征,由式(30),可以知道

$$\Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e) = \Delta V^e(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Delta W^e(\Delta \boldsymbol{\sigma}) \geq \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (46)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta V^e(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e) &= \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} (\Delta s_m \cdot \Delta e_m^e + \Delta s : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e) = \\ & \frac{K_c}{2} (\Delta e_m^e)^2 + \mu \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e\|^2, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \Delta W^e(\Delta \boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} (\Delta s_m \cdot \Delta e_m^e + \Delta s : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e) = \\ & \frac{1}{2K_c} (\Delta s_m)^2 + \frac{1}{4\mu} \|\Delta s\|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

故在满足非关联 D-P 模型弹性本构的条件下,其增量形式弹性状态双势函数表达式为

$$\Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{K_c}{2} (\Delta e_m^e)^2 + \mu \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e\|^2 + \frac{1}{2K_c} (\Delta s_m)^2 + \frac{1}{4\mu} \|\Delta s\|^2. \quad (49)$$

3.4 建立增量形式塑性状态的双势函数 $\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$

模型处于塑性状态时,满足塑性状态的本构关系,满足式(33),又因为塑性状态具有历史继承性,即

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \in \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} b^p(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (50)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0 \in \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} b^p(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (51)$$

所以

$$(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \leq b^p(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (52)$$

则

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \leq b^p(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{\sigma}_0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (53)$$

又因为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \leq b^p(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (54)$$

所以可以得到

$$\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \geq b^p(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{\sigma}_0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (55)$$

在满足 D-P 模型本构的前提下,根据式(40),可以得到 D-P 模型塑性状态增量形式的双势函数表达式

$$\begin{aligned} \Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \Delta \boldsymbol{\sigma}) &= \frac{c \Delta e_m^p}{\tan \phi} + k_d (\tan \theta - \tan \phi) \left(s_{m0} + \Delta s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\| - \\ & s_{m0} \Delta e_m^p - s_0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \end{aligned} \quad (56)$$

3.5 建立增量形式弹塑性状态的双势函数 $\Delta b^{ep}(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon})$

由于总应变 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 可以分解为弹性应变 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$ 和塑性应变 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ 之和,则有

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (57)$$

再根据式(46)和(52),可以得到增量形式弹塑性状态的双势函数表达式:

$$\Delta b^{ep}(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} [\Delta b^p(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)] + \Delta b^e(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (58)$$

根据式(58),再结合式(49)、(56),可以得到 D-P 模型弹塑性状态在增量形式下的双势函数:

$$\Delta b^{ep}(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \geq k_d \tan \theta \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\|} \left\{ \frac{K_c}{2} (\Delta e_m - \Delta e_m^p)^2 + \mu \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\|^2 + \frac{c \Delta e_m^p}{\tan \phi} + \right.$$

$$k_d(\tan \theta - \tan \phi) \left(s_{m0} + \Delta s_m - \frac{c}{\tan \phi} \right) \|\Delta \mathbf{e}^p\| - s_{m0} \Delta \mathbf{e}_m^p - s_0 : \Delta \mathbf{e}^p \Big\} + \frac{1}{4\mu} \|\Delta \mathbf{s}\|^2 + \frac{1}{2K_c} (\Delta s_m)^2. \quad (59)$$

同 3.1 小节和 3.2 小节中验证双势积分算法的方法, 可以验证 $\Delta b^{\text{ep}}(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon})$ 满足材料应力增量与塑性应变增量的正交性:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \in \partial_{\Delta \boldsymbol{\sigma}} \Delta b^{\text{ep}}(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta b^{\text{ep}}(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (60)$$

4 双势积分算法

对式 (59) 进行有限元离散, 可以得到非关联 D-P 模型的双势本构积分算法.

4.1 整体计算框架

根据经典弹性力学可知, 结构整体平衡方程为

$$\int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \Delta b[\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{U})]}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{T} dS = 0, \quad (61)$$

其中, \mathbf{B} 为应变矩阵, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 为增量位移 $\Delta \mathbf{U}$ 的函数, \mathbf{N} 为单元形函数, $\Delta \mathbf{f}$ 为体力, $\Delta \mathbf{T}$ 为面力. 根据式 (61), 结构的整体平衡在残余外力 $\Delta \mathbf{F}_r$ 趋近于 $\mathbf{0}$ 时达到, 则有

$$\Delta \mathbf{F}_r = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} - \Delta \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (62)$$

同样, 每个 Gauss (高斯) 点局部平衡在残余应力 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_r$ 趋近于 $\mathbf{0}$ 时达到, 则有

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_r = \frac{\partial \Delta b(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\sigma})}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} - \Delta \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (63)$$

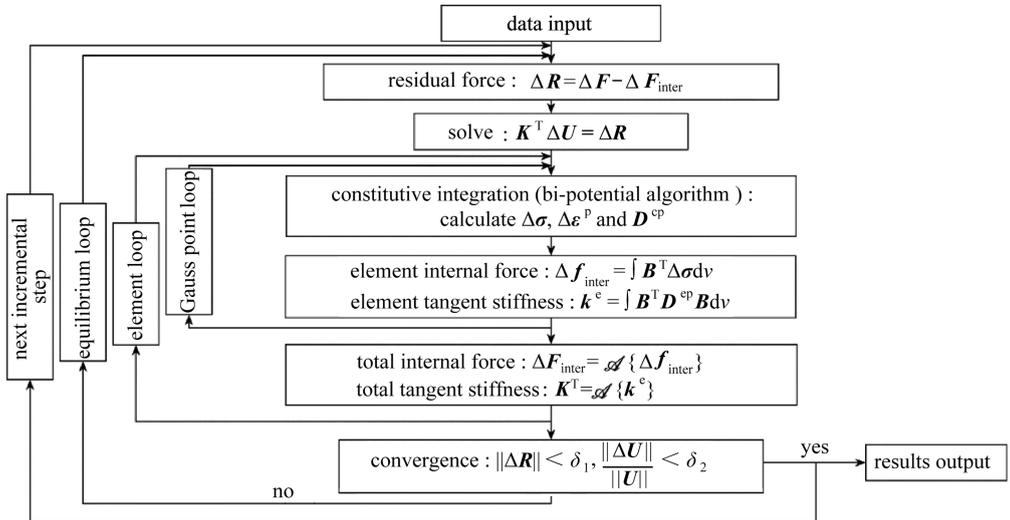


图 4 计算程序框图

Fig. 4 The calculating program frame

图 4 为双势本构积分算法利用 Newton-Raphson 迭代的计算程序框图, 其中 $\Delta \mathbf{R}, \Delta \mathbf{F}, \Delta \mathbf{F}_{\text{inter}}$ 为每一个增量步的整体残余力向量、整体外力向量和整体内力向量; \mathbf{K}^T 为整体切向刚度矩阵, 其维度为 $m \times m$, m 为整体结构的自由度; $\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ 为 Gauss 点上的应力增量和塑性应变增量; \mathbf{D}^{ep} 为弹塑性刚度矩阵; $\Delta \mathbf{f}_{\text{inter}}$ 为单元内力向量; \mathbf{k}^t 为单元切向刚度矩阵, 其维度为 $n \times n$, n 为单元的自由度; 单元内力向量 $\Delta \mathbf{f}_{\text{inter}}$ 和单元切向刚度矩阵 \mathbf{k}^t 通过组装运算 A 得到; δ_1 和 δ_2 分

别为绝对收敛判据和相对收敛判据。

4.2 双势本构积分

对式(59)进行有限元离散,结合 Lagrange(拉格朗日)乘数法和材料的一致性条件,可以得到非关联 D-P 模型的双势积分算法,其具体离散方法可参看文献[30].本构积分点在非关联 D-P 模型应力圆锥上可分为顶点与一般点两类.非关联 D-P 模型双势本构积分算法见附录.

5 计算算例

根据上面推导出的非关联 D-P 模型双势积分算法,利用 C++编程进行了程序实现,并通过以下算例对双势积分算法计算结果的准确性、计算过程的稳定性进行了讨论。

仅仅考虑小变形的情况,数值模拟非关联 D-P 模型单向拉伸和单向压缩.由于模型采用无强化的理想弹塑性,为避免因力边界加载导致的不收敛,故采用给定位移 $u_z = \pm 0.1 \text{ cm}$ (“+”为拉伸,“-”为压缩)加载,算例几何模型如图 5 所示,正方体边长为 10 cm 。

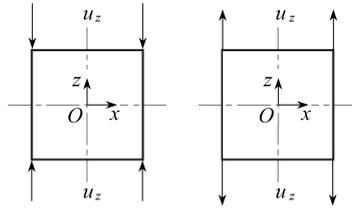


图 5 单压/单拉算例几何模型

Fig. 5 Geometry of the compression/tension examples

特别地,采用文献[44]中白云岩的参数进行计算,弹性模量 $E = 5.0 \times 10^4 \text{ MPa}$, Poisson(泊松)比 $\nu = 0.33$,黏聚力 $c = 30.0 \text{ MPa}$,内摩擦角 $\phi = 40^\circ$,由式(13)计算得到 $k_d = 1.01566$ 。

5.1 准确性验证

对算例中模型任意一个 Gauss 点,由双势积分算法,可以得到单向压缩和单向拉伸模型在 $\|s\|/k_d-s_m$ 坐标下的本构曲线图。

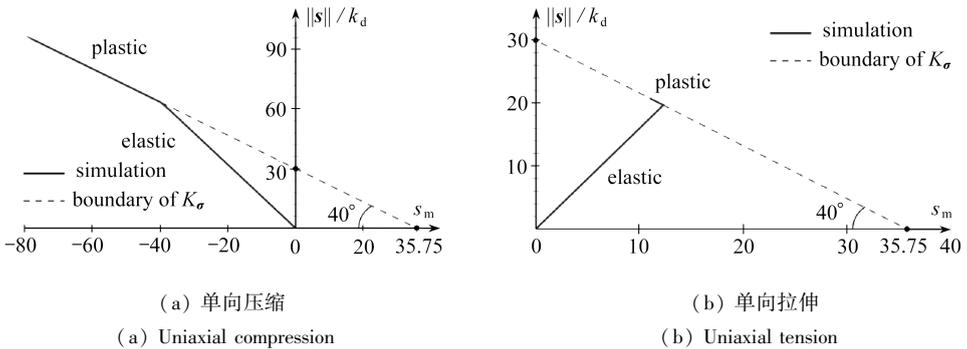


图 6 $\|s\|/k_d-s_m$ 本构曲线

Fig. 6 The $\|s\|/k_d-s_m$ curves

将数值结果图 6 与理论结果图 1 进行比较,可以看出,双势积分算法得到的非关联 D-P 模型本构曲线图和理论本构曲线吻合:曲线弹性部分位于应力锥体内部;曲线塑性部分与 $\|s\|$ 轴的截距为材料黏聚力 $c = 30 \text{ MPa}$;曲线塑性部分与 s_m 的夹角为材料内摩擦角 $\phi = 40^\circ$ 。

一般的岩体材料具有剪胀特性,若采用普通的关联流动法则,进入塑性后会产生体积膨胀现象,导致结果失真;引入剪胀角,采用非关联流动法则,能有效减小进入塑性后的体积膨胀现

象.取不同剪胀角值: $\theta = \phi = 40^\circ$ (关联流动法则), $\theta = \phi/2 = 20^\circ$ (非关联流动法则), $\theta = \phi/4 = 10^\circ$ (非关联流动法则), $\theta = 0^\circ$ (非关联流动法则),图 7 给出了单向压缩与单向拉伸时不同剪胀角材料进入塑性后的体积膨胀曲线,从两幅曲线中可以看出,采用非关联流动法则可以有效避免岩体材料进入塑性后产生的体积膨胀,使模拟结果更为准确.

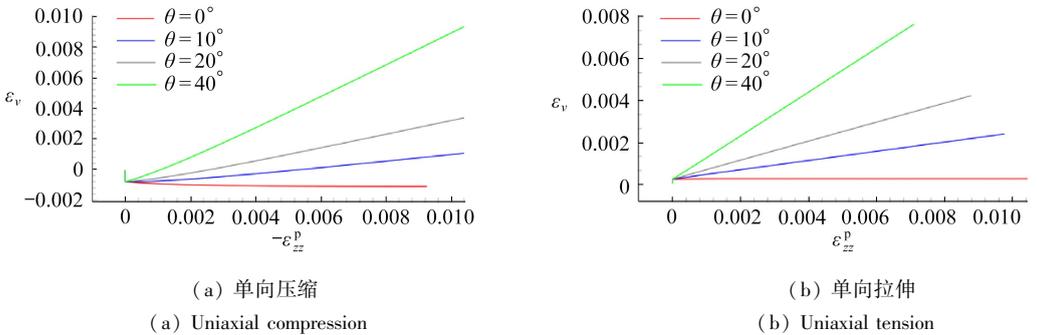


图 7 剪胀角 θ 对材料进入塑性后体积膨胀的影响

Fig. 7 Effects of different dilatancy angles on material plastic volume dilation

为保证数值模拟结果满足对白云岩材料的抗压强度范围(98.1~147 MPa)与抗拉强度范围(9.81~14.7 MPa),当模拟单向拉伸时,计算结果乘以 0.5 的折损系数.模拟得出了 4 条 $\sigma^{ep}-\varepsilon^{ep}$ 本构曲线, σ^{ep} 代表等效应力, ε^{ep} 代表等效应变.

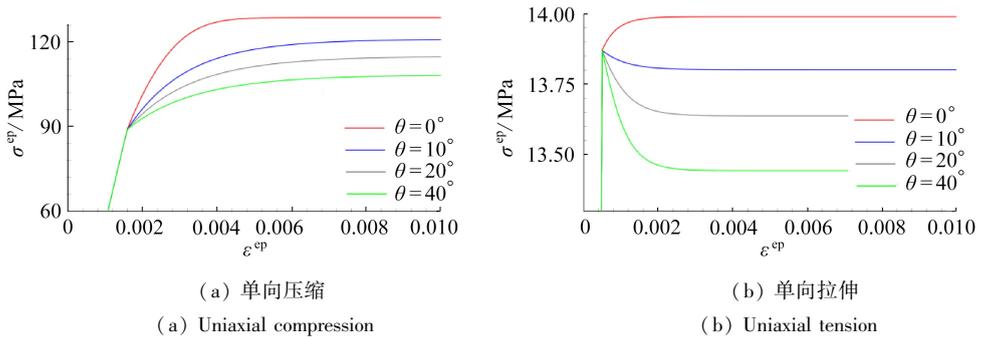


图 8 单压/单拉 $\sigma^{ep}-\varepsilon^{ep}$ 本构曲线

Fig. 8 The compression/tension $\sigma^{ep}-\varepsilon^{ep}$ curves

从图 8(a)可以看出,单向压缩非关联 D-P 模型的极限应力随着剪胀角的增大而增大, $\sigma^{ep}-\varepsilon^{ep}$ 曲线符合典型的经典弹塑性特点;从图 8(b)可以看出,单向拉伸非关联 D-P 模型的极限应力随着剪胀角的增大而增大,而且当剪胀角减小时,在加载初期会出现软化现象,此结论与文献[27]中结论相同.由 $\|s\|/k_d-s_m$ 本构曲线和 $\sigma^{ep}-\varepsilon^{ep}$ 本构曲线,双势积分算法的准确性可以被验证.

5.2 稳定性验证

为验证双势积分算法的稳定性,仍然采用此算例.根据文献[45],可以得到平面应变非关联 D-P 模型单向压缩和单向拉伸的理论解.再分别使用传统塑性力学的显式本构积分算法,隐式本构积分算法和双势积分算法对模型进行数值模拟,选取剪胀角 $\theta = 40^\circ$ (显式标准材料)、 $\theta = 20^\circ$ (隐式标准材料)和 $\theta = 0^\circ$ (隐式标准材料)3 种剪胀角模型,为比较算法稳定性,同时选取加载步为 100 步,则可以得到如下结果(见图 9、10).

当 $\theta = \phi = 40^\circ$ 时,模型材料为显式标准材料,其流动势函数和屈服势函数具有关联性,从图 9(a)中可以看出:3 种积分算法得到的数值解最终都与解析解吻合,且计算结果稳定.当 $\theta =$

20° 时,材料为隐式标准材料,从图 9(b)中可以看出:采用显式本构积分算法存在一定误差,且计算结果有轻微震荡;采用隐式本构积分算法,结果趋近于解析解,且计算结果较为稳定;采用双势积分算法得到的数值解与解析解吻合,且计算结果稳定。当 $\theta = 0^\circ$ 时,材料为隐式标准材料,从图 9(c)中可以看出:采用显式本构积分算法误差较大,且计算结果有明显震荡;采用隐式本构积分算法,结果与解析解存在一定误差,计算结果较为稳定;采用双势积分算法得到的数值解与解析解吻合,且计算结果稳定。

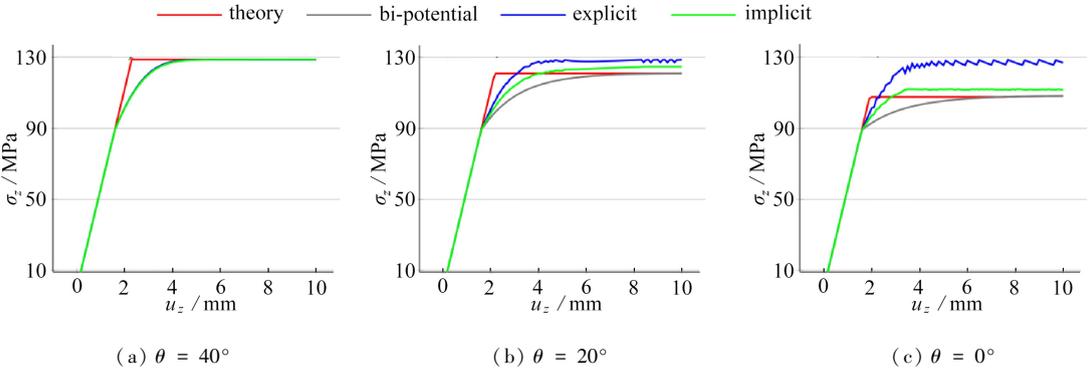


图 9 单向压缩稳定性曲线

Fig. 9 Stability curves in the compression case

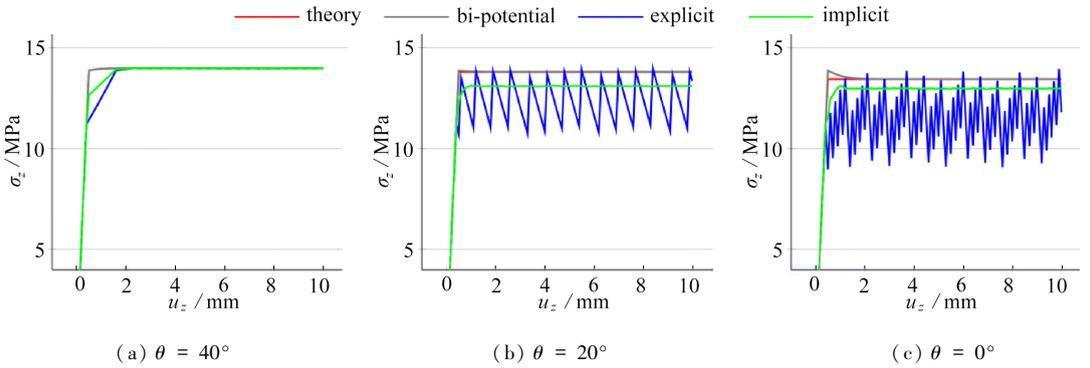


图 10 单向拉伸稳定性曲线

Fig. 10 Stability curves in the tension case

对于单向拉伸模型,同样选取 $\theta = 40^\circ$, $\theta = 20^\circ$ 和 $\theta = 0^\circ$ 这 3 种剪胀角模型进行模拟,都选取加载步为 100 步的情况,可以得到如下结果:当 $\theta = \phi = 40^\circ$ 时,模型材料为显式标准材料,从图 10(a)中可以看出,此时 3 种积分算法得到的数值解最终都与解析解吻合,且计算结果稳定。当 $\theta = 20^\circ$ 时,材料为隐式标准材料,从图 10(b)可以看出,采用显式本构积分算法有较大的震荡,计算结果不收敛;采用隐式本构积分算法,结果与解析解存在一定误差,计算结果较为稳定;采用双势积分算法得到的数值解与解析解吻合,且计算结果稳定。当 $\theta = 0^\circ$ 时,材料为隐式标准材料,从图 10(c)中可以看出,采用显式本构积分算法有很大的震荡,计算结果不收敛;采用隐式本构积分算法,结果与解析解存在一定误差,计算结果较为稳定;采用双势积分算法得到的数值解与解析解吻合,且计算结果稳定。

值得注意的是,尽管限定加载步为 100 时,显示本构积分算法处理非关联材料时产生了较大震荡,但随着加载步数的增加,震荡逐渐减小,直至稳定且数值上趋近于理论解。根据 3 种积分算法对单拉单压模型的模拟,可以得出模型拉压极限应力比较如表 1 所示。

表 1 D-P 模型极限应力比较表(单位: MPa)
Table 1 Comparison of the D-P model limit stress(unit: MPa)

$\theta / (^{\circ})$	theroy		bi-potential	
	compression	tension	compression	tension
40	128.669	13.989	128.669	13.989 2
20	121.094	13.802	121.094	13.801 5
0	108.439	13.444	108.439	13.443 8
max error			<0.01%	<0.01%

$\theta / (^{\circ})$	explicit		implicit	
	compression	tension	compression	tension
40	128.669	13.989 2	128.669	13.989
20	120.888	divergence	124.718	13.111
0	divergence	divergence	111.736	12.965
max error	17.00%		3.04%	5.00%

根据以上结果可知:显式本构积分算法能有效准确模拟显式标准材料,但是对于隐式标准材料却存在结果误差较大,计算结果震荡不收敛的问题,若增大计算步,可以减小震荡幅度,当计算步骤足够多时,可以使模拟结果收敛,但是将会耗费大量的计算时间,效率相对较低;隐式本构积分算法能够准确模拟计算显式标准材料,对于隐式标准材料能够计算出结果,但是具有一定的误差.选取恰当的流动势函数可以减小计算误差,但是推导流动势函数过程较为繁琐,理论依据也仍待完善^[46];较前两种本构积分算法,双势积分算法不仅能够准确稳定计算显式标准材料,还能够准确稳定计算隐式标准材料材料,由此可以证明双势积分算法的稳定性.

6 总 结

1) 以双势理论为基础,根据材料自由能是否能够被分解为两个对偶势,将材料分为了显式标准材料和隐式标准材料,并给出了两种材料双势函数的基本形式.

2) 以经典非关联 D-P 模型为例,对其本构锥体进行了描述,证明了在传统本构锥体的描述下,应力与塑性应变的表达不满足正交性.提出了一种新的对偶锥体表述方法,在此表述下,不仅能满足非关联 D-P 模型的本构关系,还能满足模型应力与塑性应变的正交表达.

3) 借用双势理论在显式标准材料和隐式标准材料中的表达,分别建立非关联 D-P 模型在率形式弹性状态、率形式塑性状态、增量形式弹性状态、增量形式塑性状态和增量形式弹塑性状态的双势函数,并且验证了双势函数不仅满足非关联 D-P 模型的本构关系,而且还能满足模型应力与塑性应变之间的正交表达关系.

4) 在推导出的非关联 D-P 模型双势函数基础上,给出了双势积分算法的计算步骤.算法整体满足平衡方程,局部满足材料本构条件.

5) 对双势积分算法进行了程序实现,数值模拟了非关联 D-P 模型的单向拉伸和单向压缩,比较不同剪胀角对进入塑性后体积膨胀的影响,验证了非关联流动准则选取的必要性;将数值模拟结果与解析解进行了对比,二者结果几乎吻合,由此证明了算法结果的准确性.

6) 对同一模型,分别采用传统显式积分算法、隐式本构积分算法和双势积分算法进行模拟计算,对比结果,可以看出双势积分算法处理隐式标准材料的优势,说明了算法过程的稳定性.

7) 仅仅考虑小变形,无几何非线性,状态非线性的情况,文章对双势积分算法在非关联材料本构问题中的应用进行了简单讨论,相信对于双势积分算法在其他非关联材料模型中的应

用,以及考虑大变形,考虑接触摩擦等复杂工况下的应用也有广阔的发展前景。

附录 非关联 D-P 模型双势本构积分算法

非关联 D-P 模型双势本构积分算法如下,其中: K_c 为体积模量, μ 为剪切模量,

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \frac{s_0}{2\mu}, \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}}{\|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\|}, \varepsilon_d = \frac{k_d}{2\mu}, \varepsilon_c = \frac{K_c}{2\mu}.$$

I 顶点 $\left(s_m = \frac{c}{\tan \phi} \text{ 且 } \|s\| = 0\right)$

若 $k_d \tan \theta \|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\| - (s_{m0} + K_c \Delta e_m - c/\tan \phi)/K_c > 0$, 此时材料点处于弹性状态。

计算 $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$

$$\begin{cases} \Delta s_m = K_c \Delta e_m, & \begin{cases} \Delta e_m^p = 0, \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0}. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A1})$$

弹塑性矩阵

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A2})$$

若 $k_d \tan \theta \|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\| - (s_{m0} + K_c \Delta e_m - c/\tan \phi)/K_c \leq 0$, 此时材料点处于塑性状态。

计算 $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$

$$\|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\| = \|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\| = \frac{\|s_0 + 2\mu \Delta \mathbf{e}\|}{2\mu}, \quad (\text{A3})$$

$$\begin{cases} \Delta e_m^p = k_d \tan \theta \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\|, & \begin{cases} \Delta s_m = K_c (\Delta e_m - \Delta e_m^p), \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\| \mathbf{n}, \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A4})$$

弹塑性矩阵

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A5})$$

II 一般点 (非顶点)

若 $\|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\| < \varepsilon_d \{c - \tan \phi (s_{m0} + \Delta s_m) + \tan \theta (\Delta s_m - K_c \Delta e_m)\}$, 此时材料处于弹性状态。

计算 $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$

$$\begin{cases} \Delta s_m = K_c \Delta e_m, & \begin{cases} \Delta e_m^p = 0, \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0}. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A6})$$

弹塑性矩阵

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{D}^e. \quad (\text{A7})$$

若 $\|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\| \geq \varepsilon_d \{c - \tan \phi (s_{m0} + \Delta s_m) + \tan \theta (\Delta s_m - K_c \Delta e_m)\}$, 此时材料处于塑性状态。

计算 $(\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$

$$\|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\| = \frac{\|\boldsymbol{\eta}_0 + \Delta \mathbf{e}\| - \varepsilon_d \{c - \tan \phi (s_{m0} + \Delta s_m) + \tan \theta (\Delta s_m - K_c \Delta e_m)\}}{1 + \varepsilon_c k_d^2 \tan^2 \theta}, \quad (\text{A8})$$

$$\begin{cases} \Delta e_m^p = k_d \tan \theta \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\|, & \begin{cases} \Delta s_m = K_c (\Delta e_m - \Delta e_m^p), \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\| \mathbf{n}, \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A9})$$

收敛判断

$$\begin{cases} \Delta s_{\text{mr}} = K_c (\Delta e_m - \Delta e_m^p) - \Delta s_m \rightarrow 0, \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_r = 2\mu (\|\Delta \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_0\| - \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\|) \mathbf{n} - (s_0 + \Delta s) \rightarrow \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{A10})$$

弹塑性矩阵

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \beta \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}/k_d + \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}/3) + \delta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \beta \tan \theta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{1}), \quad (\text{A11})$$

其中

$$\alpha = 2\mu \left(1 - \frac{\|\Delta \mathbf{e}^p\|}{\|\Delta \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_0\|} \right), \beta = \frac{1}{1 + \varepsilon_c k_d^2 \tan^2 \theta}, \delta = k_d \beta \tan^2 \theta.$$

参考文献 (References):

- [1] 郑颖人, 孔亮, 刘元雪. 塑性本构理论与工程材料塑性本构关系[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(7): 713-722. (ZHENG Yingren, KONG Liang, LIU Yuanxue. Plastic constitutive relation and plastic constitutive theory for engineering materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(7): 713-722. (in Chinese))
- [2] SMITH I M, GRIFFITHS D V. *Programming the Finite Element Methods*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2014.
- [3] 王记增, 陈伟球, 詹世革, 等. 第六届全国固体力学青年学者学术研讨会报告综述[J]. 力学学报, 2015, **47**(2): 372-380. (WANG Jizeng, CHEN Weiqiu, ZHAN Shige, et al. Review of the sixty national symposium on solid mechanics for young scholars[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, **47**(2): 372-380. (in Chinese))
- [4] 姚仰平, 张丙印, 朱俊高. 土的基本特性、本构关系及数值模拟研究综述[J]. 土木工程学报, 2012, **45**(3): 127-150. (YAO Yangping, ZHANG Bingyin, ZHU Jungao. Behaviors, constitutive models and numerical simulation of soils[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2012, **45**(3): 127-150. (in Chinese))
- [5] 朱维申, 赵成龙, 周浩, 等. 当前岩石力学研究中若干关键问题的思考与认识[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(4): 649-658. (ZHU Weishen, ZHAO Chenglong, ZHOU Hao, et al. Discussion on several key issues in current of rock mechanics[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(4): 649-658. (in Chinese))
- [6] 俞茂宏, 刘继明, YOSHIYA O D A, 等. 论岩土材料屈服准则的基本特性和创新[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(9): 1745-1757. (YU Maohong, LIU Jiming, YOSHIYA O D A, et al. On basic characteristics and innovation of yield criteria for geomaterials[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, **26**(9): 1745-1757. (in Chinese))
- [7] 肖诗云, 林皋, 王哲. Drucker-Prager 材料一致率型本构模型[J]. 工程力学, 2003, **20**(4): 147-151. (XIAO Shiyun, LIN Gao, WANG Zhe. A Drucker-Prager consistent rate-dependent model[J]. *Engineering Mechanics*, 2003, **20**(4): 147-151. (in Chinese))
- [8] 杨强, 杨晓君, 陈新. 基于 D-P 准则的理想弹塑性本构关系积分研究[J]. 工程力学, 2005, **22**(4): 15-19, 47. (YANG Qiang, YANG Xiaojun, CHEN Xin. On integration algorithms for perfect plasticity based on Drucker-Prager criterion[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, **22**(4): 15-19, 47. (in Chinese))
- [9] POTTS D M, ZDRAVKOVIĆ L. *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering*[M]. London: Thomas Telford Publishing, 1999.
- [10] 蒋明镜, 沈珠江. 理想弹塑性材料有限元计算算法比较研究[J]. 水利水运科学研究, 1998, **1**: 28-37. (JIANG Mingjing, SHEN Zhujiang. Study and comparison on the FEM computation methods used for the ideal elasto-plastic material[J]. *Nanjing Hydraulic Research Institute*, 1998, **1**: 28-37. (in Chinese))
- [11] SIMO J C, TAYLOR R L. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, **48**(1): 101-118.
- [12] 康国政. 非弹性本构理论及其有限元实现[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2010. (KANG Guozheng. *Inelastic Constitutive Theory and Finite Element Implementation*[M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2010. (in Chinese))

- [13] CLAUSEN J, DAMKILDE L, ANDERSEN L. An efficient return algorithm for non-associated plasticity with linear yield criteria in principal stress space[J]. *Computers and Structures*, 2007, **85**(23/24): 1795-1807.
- [14] 杨强, 冷旷代, 张小寒, 等. Drucker-Prager 弹塑性本构关系积分: 考虑非关联流动与各向同性硬化[J]. 工程力学, 2012, **29**(8): 165-171.(YANG Qiang, LENG Kuangdai, ZHANG Xiaohan, et al. An integration algorithm for Drucker-Prager elastic-plastic model with non-associated flow rule and isotropic hardening[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(8): 165-171.(in Chinese))
- [15] DE SAXCÉ G, FENG Z Q. New inequality and functional for contact with friction; the implicit standard material approach[J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 1991, **19**(3): 301-325.
- [16] DE SAXCÉ G. A generalization of Fenchel's inequality and its applications to the constitutive law[J]. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1992, **314**(2): 125-129.
- [17] DE SAXCÉ G. The bipotential method, a new variational and numerical treatment of the dissipative laws of materials[C]//*10th International Conference on Mathematical and Computer Modelling and Scientific Computing*. Boston, 1995.
- [18] WRIGGERS P. *Computational Contact Mechanics*[M]. Springer, 2006.
- [19] FENG Zhiqiang. 2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context[J]. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 1995, **11**(5): 409-416.
- [20] DE SAXCÉ G, FENG Zhiqiang. The bipotential method; a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 1998, **28**(4/8): 225-245.
- [21] PARISCH H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, **28**(8): 1803-1812.
- [22] JOLI P, FENG Z Q. Uzawa and Newton algorithms to solve frictional contact problems within the bi-potential framework[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **73**(3): 317-330.
- [23] FENG Zhiqiang, RENAUD C, CROS J M, et al. A finite element finite-strain formulation for modeling colliding blocks of Gent materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(15): 2215-2222.
- [24] FENG Z Q, HJIAJ M, DE SAXCÉ G, et al. Influence of frictional anisotropy on contacting surfaces during loading/unloading cycles[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(8): 936-948.
- [25] FENG Z Q, PEYRAUT F, HE Q C. Finite deformations of Ogden's materials under impact loading[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(4): 575-585.
- [26] MITCHELL G P, OWEN D R J. Numerical solutions for elastic-plastic problems[J]. *Engineering Computations*, 1988, **5**(4): 274-284.
- [27] BOUSSHINE L, CHAABA A, DE SAXCÉ G. Softening in stress-strain curve for Drucker-Prager non-associated plasticity[J]. *International Journal of Plasticity*, 2001, **17**(1): 21-46.
- [28] BERGA A. Contribution to modeling of non associated law of soils with the bipotential method and its application in foundation area[C]//*International Symposium on Characterization and Modeling of Materials and Structures, CMMS08*. Tizi-Ouzou, Algeria, 2008.

- [29] BERGA A. Mathematical and numerical modeling of the non-associated plasticity of soils—part 1: the boundary value problem[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, **47**(1): 26-35.
- [30] ZHOU Yangjing, FENG Zhiqiang, XU W Y, Non-associated constitutive law of soils and its simulation based on the bi-potential theory[J]. *International Journal of Structural Analysis & Design*, 2014, **1**(4): 1-6.
- [31] BODOVILLÉ G, DE SAXCÉ G. Plasticity with non-linear kinematic hardening: modeling and shakedown analysis by the bipotential approach[J]. *European Journal of Mechanics: A/Solids*, 2001, **20**(1): 99-112.
- [32] BOUBY C, DE SAXCÉ G, TRITSCH J B. Shakedown analysis: comparison between models with the linear unlimited, linear limited and non-linear kinematic hardening[J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, **36**(5): 556-562.
- [33] CHAABA A. Plastic collapse in presence of non-linear kinematic hardening by the bipotential and the sequential limit analysis approaches[J]. *Mechanics Research Communications*, 2010, **37**(5): 484-488.
- [34] 周洋靖, 冯志强, 宁波. 双势理论用于处理非关联材料本构[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(8): 787-804. (ZHOU Yangjing, FENG Zhiqiang, NING Po. The bi-potential theory applied to non-associated constitutive law[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(8): 787-804. (in Chinese))
- [35] CHENG Long, JIA Yun, OUESLATI A, et al. Plastic limit state of the hollow sphere model with non-associated Drucker-Prager material under isotropic loading[J]. *Computational Materials Science*, 2012, **62**: 210-215.
- [36] CHENG Long, DE SAXCÉ G, KONDO D. A stress-based variational model for ductile porous materials[J]. *International Journal of Plasticity*, 2014, **55**: 133-151.
- [37] CHENG Long, JIA Yun, OUESLATI A, et al. A bipotential-based limit analysis and homogenization of ductile porous materials with non-associated Drucker-Prager matrix[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, **77**: 1-26.
- [38] HJIAJ M, DAO D L, DE SAXCÉ G. A family of bi-potentials describing the non-associated flow rule of pressure-dependent plastic models[J]. *Acta Mechanica*, 2011, **220**(1/4): 237-246.
- [39] FENCHEL W. On conjugate convex functions[J]. *Canadian Journal of Mathematics*, 1949, **1**: 73-77.
- [40] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plasticity analysis or limit design[J]. *Quarterly Applied Mathematics*, 1953, **10**(2): 157-165.
- [41] 刘金龙, 栾茂田, 许成顺, 等. Drucker-Prager 准则参数特性分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(S2): 4009-4015. (LIU Jinlong, LUAN Maotian, XU Chengshun, et al. Study on parametric characters of Drucker-Prager criterion[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(S2): 4009-4015. (in Chinese))
- [42] 楚锡华, 徐远杰, 孔科. M-C 与 D-P 屈服准则计算参数的能量等效方法及误差分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2009, **28**(8): 1666-1673. (CHU Xihua, XU Yuanjie, KONG Ke. Energy equivalent method for calculating parameters of M-C and D-P criteria and error[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, **28**(8): 1666-1673. (in Chinese))
- [43] 王光钦. 弹性力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2008. (WANG Guangqin. *Elastic Mechanics* [M]. Beijing: China Railway Press, 2008. (in Chinese))

- [44] 贺永年, 韩立军, 王衍森. 岩石力学简明教程[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2010. (HE Yongnian, HAN Lijun, WANG Yansen. *Rock Mechanics Introductory Tutorial*[M]. Xuzhou: China Mining University Press, 2010. (in Chinese))
- [45] BERGA A. Mathematical and numerical modeling of the non-associated plasticity of soils—part 2: finite element analysis[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, **47**(1): 36-45.
- [46] 殷有泉, 邸元. 地质材料弹塑性本构关系的塑性势理论[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2014, **50**(2): 201-206.(YIN Youquan, DI Yuan. On the plastic potential theory of elasto-plastic constitutive relation for geomaterials[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2014, **50**(2): 201-206.(in Chinese))

Application of the Bi-Potential Integration Algorithm to Non-Associated Materials

ZHOU Yangjing, FENG Zhiqiang, PENG Lei

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P.R.China)

(Contributed by FENG Zhiqiang, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Given the formulation of material free energy, the bi-potential theory allows one to divide standard materials into 2 main categories: explicit or implicit. The Drucker-Prager (D-P) model was taken as an example, which typically describes non-associated materials through the constitutive cones. With a new description of the orthogonal law, the dual constitutive cones were proposed, which not only satisfy the constitutive law of the D-P model, but also meet the requirements of the implicit flow rules. On the basis of the D-P model, and according to the bi-potential theory, 5 forms of bi-potential functions were established: the elastic stage in rate form, the plastic stage in rate form, the elastic stage in incremental form, the plastic stage in incremental form and the elasto-plastic stage in incremental form. The bi-potential integration algorithm was then obtained. A numerical simulation example was given to verify the accuracy and stability of the bi-potential integration algorithm.

Key words: non-associated material; bi-potential theory; orthogonality; non-associated D-P model; simulation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11372260)

引用本文/Cite this paper:

周洋靖, 冯志强, 彭磊. 双势积分算法在非关联材料中的应用[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 11-28.

ZHOU Yangjing, FENG Zhiqiang, PENG Lei. Application of the bi-potential integration algorithm to non-associated materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 11-28.