

深埋公路隧洞围岩应力和位移分布的 复变函数解*

刘淑红^{1,2}, 王自豪¹, 甄卫刚¹

(1. 石家庄铁道大学 工程力学系, 石家庄 050043;

2. 河北省大型结构健康诊断与控制重点实验室, 石家庄 050043)

摘要: 为了优化公路隧道的设计和确保施工安全,必须明确公路隧洞开挖时围岩的力学行为.利用复变函数方法,通过保角映射函数把隧洞外域变换为单位圆外域.利用 Cauchy(柯西)积分和留数定理求出两个应力函数,从而得到围岩的应力与位移的平面应变问题的解析解.结合曲墙马蹄形断面,通过数学软件 MATLAB 编程计算,分别给出了应力和仅考虑开挖引起的位移沿隧洞边和坐标轴方向的分布.利用有限元软件 ANSYS 建立二维平面应变模型,对理论推导得到的应力和位移的分布进行验证,数值解结果与近似解析解结果吻合性很好.研究表明:最大的环向应力发生在隧洞拱脚处,最大水平位移发生在拱腰处,最大的沉降和隆起分别发生在拱顶和仰拱中心处.沿坐标轴的正应力在隧洞附近变化较大,不一定在洞边取得最大值,离洞边不到 10 m 的距离,便分别趋于所加外荷载.位移值在洞边最大,随着离洞边距离的增大,逐渐单调趋于 0.

关键词: 公路隧洞; 近似解析解; 复变函数; 应力; 位移

中图分类号: U451

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380137

引言

近年来,随着我国社会经济的快速发展,地面交通增长十分迅速.在现代化高速公路迅速发展的今天,隧道在公路工程中的作用和地位日益重要.隧道施工和运营的安全问题也越来越成为学术界和工程界广泛关注的问题.

对于深埋隧道,可以看成无限大弹性体中的孔洞问题,复变函数解法是解决此类问题最有效的方法.圆形孔、椭圆形孔和直线裂纹的精确解,及方形孔的近似解已有详细论述^[1-3].Liu(刘淑红)和 Duan(段士杰)^[4-5]研究了孔边裂纹的精确解.祝江鸿^[6]给出了隧洞任意开挖断面围岩的两个应力函数,并退化成本所周知的椭圆形和圆形的应力函数,证明了解的正确性.Zhao 和 Yang^[7]在保角变换函数中取了 3 项,得到了与水平轴成一定角度的压力作用下,方形隧洞边围岩的环向应力的近似解析解.唐治等^[8]得出了直墙拱形巷道围岩应力分布的解析表达式,分析了沿巷道边界和巷道水平线方向的围岩应力分布规律.近年来很多学者得到了在远场压力状态下,不同形状隧洞的围岩应力和位移的解析解表达式,给出了沿隧洞边的环向应力和位移的分布,并利用不同的数值软件进行了验证.如 Exadaktylos 和 Stavropoulou^[9]研究了半

* 收稿日期: 2017-05-13; 修订日期: 2017-11-17

基金项目: 河北省自然科学基金(A2015210089);河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD2015101)

作者简介: 刘淑红(1968—),女,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: liush@stdu.edu.cn).

圆形隧道,并将解析值与有限差分 FLAC2D 的数值结果进行了比较;苏峰等^[10]研究了深埋双圆形隧洞的开挖问题,采用有限元分析软件 MIDAS/GTS 对解析解进行了验证.李培楠等^[11]、施有志和高轩能^[12]得到了工程中常用的单心圆仰拱马蹄形隧道的解析解,并分别利用有限元软件 ANSYS 和 MADIS 进行了验证;Guan(关振长)和 Deng(邓涛)等^[13-14]得出了不同形状的马蹄形和直墙拱形隧洞的应力和位移的解析解,并利用有限差分软件 FLAC3D 进行了验证. Lu 等^[15-16]研究了深埋直墙拱形隧道衬砌与围岩不同接触条件下应力和位移沿边界的分布. Zhang 和 Sun^[17]得到了隧道断面开挖轮廓线为任意不规则形状的情况,横观各向同性的围岩中应力与位移解析解表达式.宋浩然等^[18]得出了浅埋的圆形隧道在不同边界条件下的解析解.王华宁等^[19]得出了流变岩体中圆形隧洞分两步开挖围岩的黏弹性位移和应力的解析解.

从上述文献中可以看出,目前的研究大多集中在得到不同形状隧洞的围岩应力和位移解析的隐函数,给出沿隧洞边的应力和总的位移分布.由于数学上的复杂性,在隧洞附近,沿坐标轴方向应力和位移的分布的文献非常少,由于开挖引起的位移沿洞边和坐标轴方向的分布几乎未见.而通过沿坐标轴的应力和由于开挖引起位移的分布,随着离隧洞距离的增大,应力趋于相应的所加荷载,由于开挖引起的位移趋于 0,可以直接看出解析解的正确性.本文根据复变函数理论,得到了深埋公路隧洞在远场双向压缩受力状态下应力和位移近似解析解,给出了应力和由于开挖引起的位移沿孔边和坐标轴方向的分布,证明了本文得到的近似解析解的正确性.并采用有限元软件 ANSYS 进行模拟计算,通过数值结果与解析结果的比较,再次证明了近似解析解的正确性.

1 基本方程

通过保角映射函数 $z = \omega(\zeta)$ 将 z 平面上孔洞变换为 ζ 平面上的单位圆.对于平面应变问题,弹性体中的应力与位移分量可由复平面上 2 个解析函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 确定,根据边界条件,通过下列方程得到 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ ^[20]:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{8\pi(1-\mu)}(\bar{F}_x + i\bar{F}_y)\ln\zeta + B\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (1)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{3-4\mu}{8\pi(1-\mu)}(\bar{F}_x + i\bar{F}_y)\ln\zeta + (B' + iC')\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta), \quad (2)$$

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad (3)$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\bar{f}_0 d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad (4)$$

$$f_0 = i \int (\bar{f}_x + i\bar{f}_y) ds - \frac{\bar{F}_x + i\bar{F}_y}{2\pi} \ln\sigma - \frac{1}{8\pi(1-\mu)}(\bar{F}_x - i\bar{F}_y) \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma - 2B\omega(\sigma) - (B' - iC') \overline{\omega(\sigma)}, \quad (5)$$

式中 \bar{F}_x 和 \bar{F}_y 分别为孔洞整个内边界上沿 x, y 方向的面力之和, \bar{f}_x 和 \bar{f}_y 分别为孔洞内边界上沿 x, y 方向的面力, σ 为 ζ 平面上单位圆的边界值, μ 为 Poisson(泊松)比,常数 B 和 $B' + iC'$ 由无穷远处的主应力 σ_1 和 σ_2 确定

$$B = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (6)$$

$$B' + iC' = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\beta}, \quad (7)$$

式中 β 为主应力 σ_1 与 x 轴之间的夹角。

弹性体在 z 平面上曲线坐标 ρ 和 θ 中的应力分量 σ_ρ 和 σ_θ 的关系为

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = 4\operatorname{Re} \Phi(\zeta), \quad (8)$$

式中 $\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ 。当洞边所受面力为 0 时, 在洞边有 $\sigma_\rho = 0$, 式(8)可简化为

$$\sigma_\theta = 4\operatorname{Re} \Phi(\zeta). \quad (9)$$

弹性体在 z 平面上直角坐标中的应力分量 σ_x 和 σ_y 为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re} \Phi(\zeta), \quad (10)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)\Phi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} + \Psi(\zeta) \right], \quad (11)$$

式中 $\Psi(\zeta) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ 。

在 z 平面上直角坐标中的 x 和 y 方向位移 u 和 v 为

$$\frac{E}{1+\mu}(u+iv) = (3-4\mu)\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \quad (12)$$

2 问题求解

深埋隧洞的埋深与隧洞孔径之比较大, 求出无隧洞时隧洞形心处正压力 σ_1 和侧压力 σ_2 , 就可以看成含隧洞的无限大体在无穷远处受双向压力 σ_1 和 σ_2 。隧洞的轴向长度一般都远远大于隧洞的断面尺寸, 按平面应变问题进行力学分析。

通过保角映射函数 $z = \omega(\zeta)$ 将 z 平面上隧洞外域变换为 ζ 平面上单位圆外域, 所采用的保角变换函数形式如下:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{m=0}^n c_m \zeta^{-m}\right), \quad (13)$$

式中 R 表征隧洞界面大小, 系数 c_m 与隧洞截面形状有关, 在大多数情形下, 级数中只须取很少几项就足够精确^[21]。

由于受无限远处压应力, 隧洞内边界不受力, $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{f}_x, \bar{f}_y$ 均为 0, 由式(1)、(2)可得

$$\varphi(\zeta) = B\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (14)$$

$$\psi(\zeta) = (B' + iC')\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta), \quad (15)$$

式中 $B = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)$, $B' + iC' = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ 。

下面写出求 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 用到的式子:

$$\omega(\sigma) = R(\sigma + c_0 + c_1\sigma^{-1} + c_2\sigma^{-2} + c_3\sigma^{-3} + c_4\sigma^{-4}), \quad (16)$$

$$\overline{\omega(\sigma)} = R(\sigma^{-1} + \bar{c}_0 + \bar{c}_1\sigma^1 + \bar{c}_2\sigma^2 + \bar{c}_3\sigma^3 + \bar{c}_4\sigma^4), \quad (17)$$

$$\omega'(\sigma) = R(1 - c_1\sigma^{-2} - 2c_2\sigma^{-3} - 3c_3\sigma^{-4} - 4c_4\sigma^{-5}), \quad (18)$$

$$\overline{\omega'(\sigma)} = R(1 - \bar{c}_1\sigma^2 - 2\bar{c}_2\sigma^3 - 3\bar{c}_3\sigma^4 - 4\bar{c}_4\sigma^5), \quad (19)$$

$$f_0(\sigma) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}R(\sigma + c_0 + c_1\sigma^{-1} + c_2\sigma^{-2} + c_3\sigma^{-3} + c_4\sigma^{-4}) +$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} R(\sigma^{-1} + \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \sigma^1 + \bar{c}_2 \sigma^2 + \bar{c}_3 \sigma^3 + \bar{c}_4 \sigma^4). \tag{20}$$

$\varphi_0(\zeta)$ 具有如下形式:

$$\varphi_0(\zeta) = a_1 \zeta^{-1} + a_2 \zeta^{-2} + a_3 \zeta^{-3} + a_4 \zeta^{-4} + \dots. \tag{21}$$

由式(3),通过 Cauchy 积分和留数定理,得到

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{\bar{a}_1 c_3}{\zeta} + \frac{2\bar{a}_2 c_4}{\zeta} + \frac{\bar{a}_1 c_4}{\zeta^2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} R \left(\frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \frac{c_3}{\zeta^3} + \frac{c_4}{\zeta^4} \right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{R}{\zeta}. \tag{22}$$

通过与式(21)同类项对比,可得到式中系数 a_1, a_2, a_3 和 a_4 :

$$a_1 = \bar{a}_1 c_3 + 2\bar{a}_2 c_4 - \frac{Rc_1(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + \frac{R(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}, \tag{23}$$

$$a_2 = \bar{a}_1 c_4 - \frac{Rc_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}, \tag{24}$$

$$a_3 = -\frac{Rc_3(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}, \tag{25}$$

$$a_4 = -\frac{Rc_4(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}. \tag{26}$$

同理,由式(4),可得到 $\psi_0(\zeta)$ 的表达式.将得到的 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 代入式(14)和(15),即得出 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 的表达式.根据式(9)~(12),就可以得到弹性体中的应力和位移.如果只考虑开挖引起的位移 u_k 和 v_k ,则式(12)中的 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 用 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 代替^[20]:

$$\frac{E}{1 + \mu} (u_k + iv_k) = (3 - 4\mu) \varphi_0(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_0'(\zeta)} - \overline{\psi_0(\zeta)}. \tag{27}$$

3 算 例

隧洞尺寸和坐标如图 1 所示,无限远处受双向压力 σ_1 和 σ_2 .变换函数选取如下^[21]:

$$z = \omega(\zeta) = 1.680 4(\zeta - 0.066 2 - 0.057 1\zeta^{-1} + 0.067 8\zeta^{-2} - 0.002 3\zeta^{-3} - 0.019 2\zeta^{-4}). \tag{28}$$

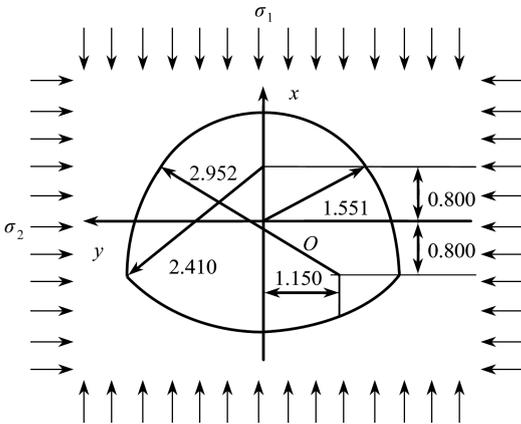


图 1 隧洞图(单位: m)

Fig. 1 The tunnel shape(unit: m)

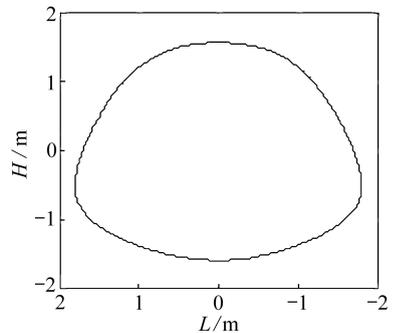


图 2 变换后的隧洞洞形

Fig. 2 The transformed tunnel shape

通过式(28),得到变换后 z 平面上隧洞洞形如图2所示,图中 L 和 H 分别为隧洞水平方向的长度和垂直方向的高度.将 z 平面上隧洞外域变换为 ζ 平面上单位圆外域,如图3所示,图中隧洞边界的极坐标角度 α 可以用单位圆的极坐标角度 θ 表示.在单位圆边界上, $\rho = 1, \theta = 0^\circ \sim 360^\circ$,将 ρ 和 θ 代入到映射函数式(28),得到隧洞边界坐标 x 和 y ,通过三角函数关系,就可以得到隧洞边界的极坐标 α .洞周上选取点 $A(1.5510, 0), B(1.0980, 1.0980), C(0, 1.6982), D(-0.7817, 1.7607), E(-1.2660, 1.2660)$ 和 $F(-1.6102, 0)$,变换为单位圆上对应点 A', B', C', D', E' 和 F' 的角度分别为 $0^\circ, 42.6338^\circ, 81.1308^\circ, 111.5318^\circ, 139.2517^\circ$ 和 180° .由式(23)~(26),得到待定系数

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.0893 \times 10^6, & a_2 &= 3.0574 \times 10^5, \\ a_3 &= -9.6623 \times 10^3, & a_4 &= -8.0659 \times 10^4. \end{aligned}$$

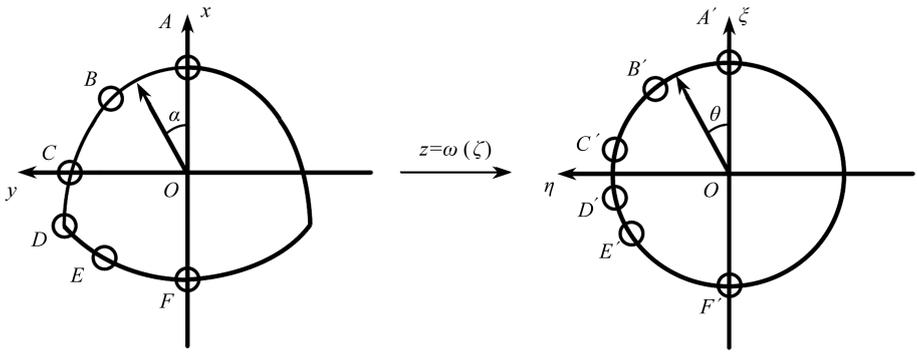
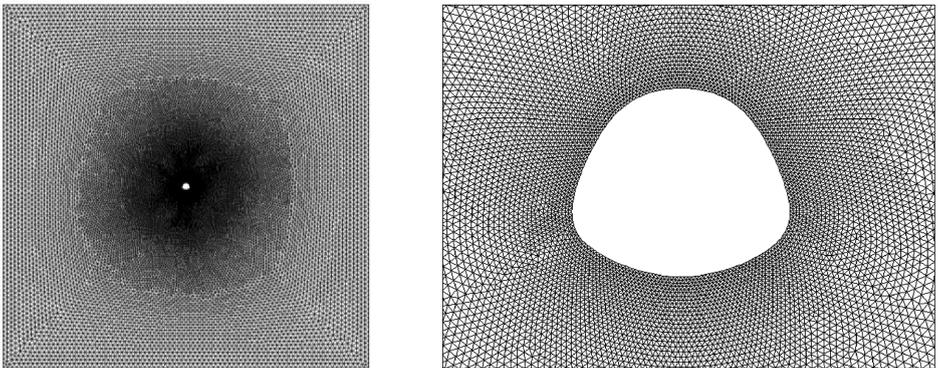


图3 隧洞洞周变换为单位圆

Fig. 3 Mapping of the tunnel shape into a unit circle



(a) 整体模型
(a) The whole model

(b) 隧洞附近
(b) The vicinity of the tunnel

图4 有限元网格

Fig. 4 The finite element mesh

为清楚地了解隧洞开挖时围岩内的应力和由于开挖引起的位移分布规律,并证明上述近似解析解的正确性,本节分别通过有限元软件 ANSYS 数值模拟和数学软件 MATLAB 编程计算,得到了围岩内应力和由于开挖引起的位移沿孔边和坐标轴分布的数值解和近似解析解.

令正压力 σ_1 和侧压力 σ_2 分别为3 MPa和2 MPa,围岩的弹性模量 $E = 1$ GPa, Poisson 比 $\mu = 0.4$.采用有限元软件进行数值模拟时,洞形尺寸、边界条件、荷载、材料常数均与近似解析解一样.属于平面应变问题,洞形尺寸与图2一致,板的尺寸 $160 \text{ m} \times 160 \text{ m}$,远远大于隧洞的尺

寸,可看成含洞的无限大板,四边不约束,采用 Plane82 单元,整体模型及隧洞附近的有限元网格如图 4 所示.图 5、6 给出了双向压力作用下,隧洞附近围岩的应力 σ_x 和 σ_y 的数值解的等值线图.可以看出,在隧洞附近,应力变化明显,离洞边一定距离,趋于稳定.应力关于隧洞的竖直轴正对称.为了与近似解析解对比,导出了沿隧洞边和坐标轴方向的应力值.

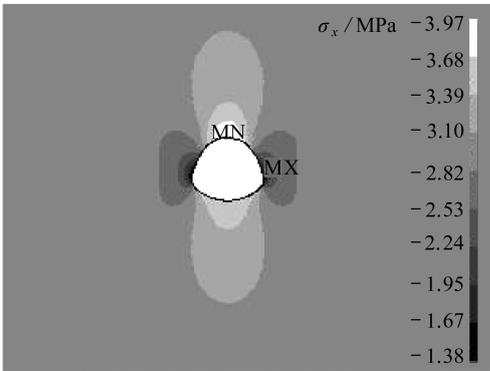


图 5 隧洞附近的应力 σ_x 云图

Fig. 5 The stress σ_x nephogram around the tunnel

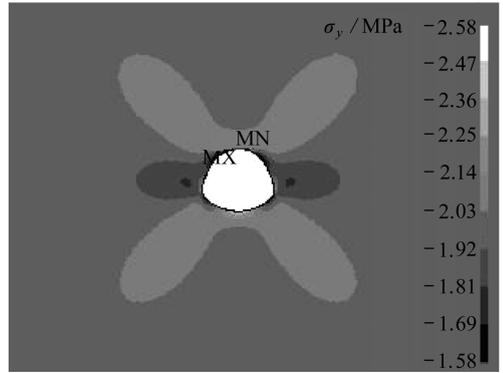


图 6 隧洞附近的应力 σ_y 云图

Fig. 6 The stress σ_y nephogram around the tunnel

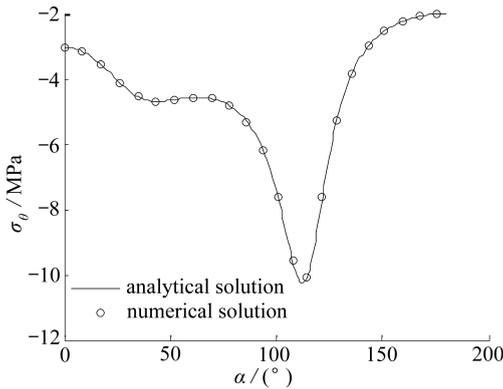


图 7 沿洞周环向应力 σ_θ

Fig. 7 Hoop stress σ_θ along the tunnel boundary

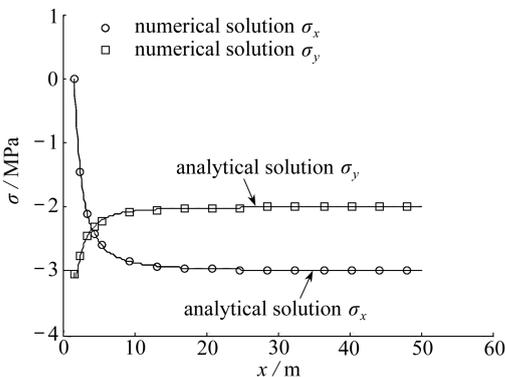


图 8 沿 x 轴的应力

Fig. 8 Stresses along axis x

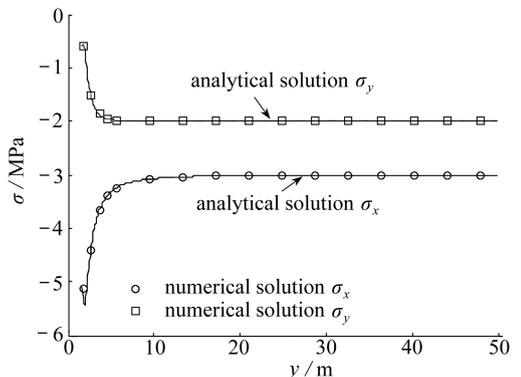


图 9 沿 y 轴的应力

Fig. 9 Stresses along axis y

图7~9给出了双向压力作用下,沿隧洞边的应力 σ_θ 、沿坐标轴 x 和 y 的应力 σ_x 和 σ_y 的近似解析解和数值解。可以看出,最大的环向压应力是 -10.2746 MPa,所在位置 $\alpha = 112.2539^\circ$,位于拱脚处,由于此处是两圆弧交界处,所以存在应力集中。图7中当 $\alpha = 0^\circ$ 时与图8中沿 x 轴的第一个点是同一点,环向应力 $\sigma_\theta = -3.0358$ MPa,应力 $\sigma_x = -0.0153$ MPa和 $\sigma_y = -3.0205$ MPa,满足关系式 $\sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$ 。图7中当 $\alpha = 90^\circ$ 时与图9中沿 y 轴的第一个点是同一点,环向应力 $\sigma_\theta = -5.6933$ MPa,应力 $\sigma_x = -5.0908$ MPa和 $\sigma_y = -0.6025$ MPa,同样满足关系式 $\sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$ 。沿 x 轴的应力 σ_y 和沿 y 轴的应力 σ_x 没在洞边取得最大值,而是压应力值继续增大,很快达到最大值,之后再逐渐减小。沿 x 轴的应力 σ_x 和沿 y 轴的应力 σ_y 则单调的增大。离洞边不到10 m的距离,应力 σ_x 和 σ_y 便分别趋于所加荷载3 MPa和2 MPa,应力分布符合Saint-Venant(圣维南)原理。应力分布的近似解析解和数值解吻合性非常好,所有这些均说明了近似解析解的正确性。

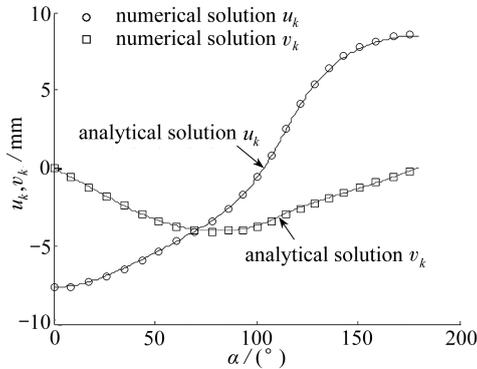


图10 沿洞周开挖位移

Fig. 10 Excavation displacements along the tunnel boundary

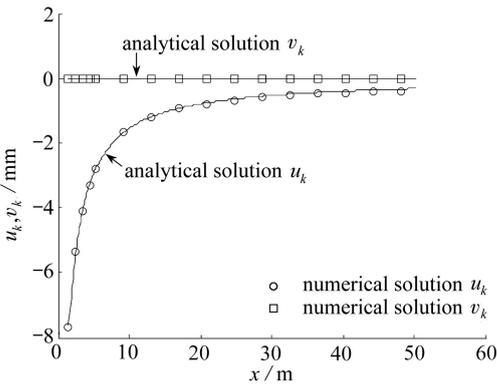


图11 沿 x 轴开挖位移

Fig. 11 Excavation displacements along axis x

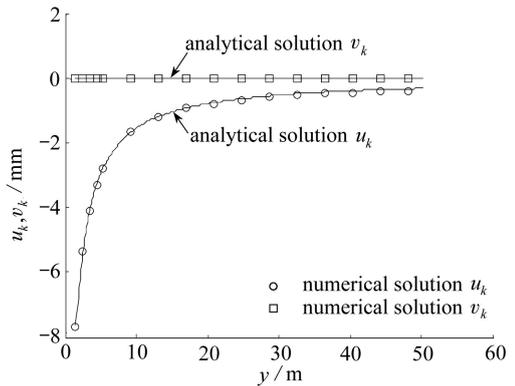


图12 沿 y 轴开挖位移

Fig. 12 Excavation displacements along axis y

当仅考虑开挖引起的位移时,由式(27)得到近似解析解。数值解分两次建模,将带隧洞的双向压力作用下得到的位移减去不含隧洞的双向压力作用下的位移,就是开挖位移。图10~12给出了只考虑开挖引起的沿隧洞周、沿坐标轴 x 和 y 的位移 u_k 和 v_k 的近似解析解和数值解。从图中可以看出,洞顶的沉降和仰拱中心的隆起分别是7.6420 mm和8.4913 mm。最大的洞周水平位移是4.0304 mm,所在位置 $\alpha = 81.1873^\circ$,位于拱腰处。图10中当 $\alpha = 0^\circ$ 时的位移与

图 11 中沿 x 轴的第一个点的位移相等,分别是 $-7.642\ 0\ \text{mm}$ 和 0 。图 10 中当 $\alpha = 90^\circ$ 时的位移与图 12 中沿 y 轴的第一个点的位移相等,分别是 $-2.152\ 1\ \text{mm}$ 和 $-3.966\ 5\ \text{mm}$ 。由于结构关于竖直轴 x 对称,沿 x 轴的水平位移为 0 。在洞边附近由于开挖引起的位移值较大,随着离洞边距离的增大,逐渐单调趋于 0 。开挖引起的位移的近似解析解和数值解吻合性非常好,所有这些再次说明了近似解析解的正确性。

4 结 论

通过复变函数方法,得出了深埋公路隧洞开挖问题的应力与位移的近似解析解,并给出了应力和开挖引起的位移分别沿洞周和坐标轴方向近似解析解和数值解的分布,二者吻合较好,说明了本文得到的近似解析解的正确性。得出以下结论:

1) 最大的环向应力发生在隧洞拱脚处,最大水平位移发生在拱腰处,最大的沉降和隆起发生在拱顶和仰拱中心处。因此隧道设计和施工时应重点注意这些位置的安全。

2) 沿坐标轴的正应力在洞边附近变化较大,不一定在洞边取得最大值,离洞边不到 $10\ \text{m}$ 的距离,便分别趋于所加外荷载。

3) 由于隧洞开挖引起的位移值,沿竖直对称轴的水平位移为 0 。在洞边附近较大,随着离洞边距离的增大,逐渐单调趋于 0 。

参考文献(References):

- [1] 许翥中. 弹性力学中的复变函数方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989. (XU Zhuzhong. *The Method of Complex Function in Elasticity Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1989. (in Chinese))
- [2] МУСХЕЛИШВИЛИ Н И. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 赵惠元, 译. 北京: 科学出版社, 1958. (МУСХЕЛИШВИЛИ Н И. *Some Basic Problems in Mathematical Elasticity* [M]. ZHAO Huiyuan, transl. Beijing: Science Press, 1958. (Chinese version))
- [3] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2016. (XU Zhilun. *Elasticity* [M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese))
- [4] LIU Shuhong, DUAN Shijie. Analytical solutions of cracks emanating from an elliptic hole in an infinite plate under tension[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014, **27** (5): 1057-1063.
- [5] 段士杰, 刘淑红. 剪切荷载作用下圆孔孔边裂纹的解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(7): 740-747. (DUAN Shijie, LIU Shuhong. Solutions for a circular hole with edge cracks under shear load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 740-747. (in Chinese))
- [6] 祝江鸿. 隧洞围岩应力复变函数分析法中的解析函数求解[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(4): 345-354. (ZHU Jianghong. Analytic functions in stress analysis of the surrounding rock for caverns with the complex variable theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34** (4): 345-354. (in Chinese))
- [7] ZHAO Guangpu, YANG Shengli. Analytical solutions for rock stress around square tunnels using complex variable theory[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2015, **80**: 302-307.
- [8] 唐治, 潘一山, 朱小景, 等. 直墙拱形巷道围岩应力场分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2015, **37** (3): 79-85. (TANG Zhi, PAN Yishan, ZHU Xiaojing, et al. Analysis of surrounding rock stress field of vertical wall archy roadway[J]. *Journal of Civil, Architectural & Environmental*, 2015, **37**(3): 79-85. (in Chinese))

- [9] EXADAKTYLOS G E, STAVROPOULOU M C. A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, **39**(7): 905-916.
- [10] 苏锋, 陈福全, 施有志. 深埋双隧洞开挖的解析延拓法求解[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, **31**(2): 365-374.(SU Feng, CHENG Fuquan, SHI Youzhi. Analytic continuation solution of deep twin-tunnels[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, **31**(2): 365-374.(in Chinese))
- [11] 李培楠, 刘俊, 苏锋, 等. 任意形状隧道围岩应力与位移的解析延拓求解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2013, **41**(10): 1483-1489.(LI Peinan, LIU Jun, SU Feng, et al. Analytical continuation method for solving stress and displacement of surrounding rock buried tunnel excavation with arbitrary shape section[J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2013, **41**(10): 1483-1489.(in Chinese))
- [12] 施有志, 高轩能. 深埋马蹄形隧道开挖围岩应力与位移的复变函数解[J]. 土木建筑与环境工程, 2014, **36**(1): 101-105, 118.(SHI Youzhi, GAO Xuanneng. Complex variable function solution of stress and displacement of surrounding rock buried deep horseshoe-shaped tunnel excavation[J]. *Journal of Civil, Architectural & Environmental*, 2014, **36**(1): 101-105, 118.(in Chinese))
- [13] GUAN Zhenchang, DENG Tao, HUANG Hongwei, et al. Back analysis technique for mountain tunneling based on the complex variable solution[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2013, **59**: 15-21.
- [14] 邓涛, 魏雯, 关振长, 等. 公路隧道开挖问题的复变函数解及应用[J]. 中国公路学报, 2015, **28**(10): 90-97.(DENG Tao, WEI Wen, GUAN Zhenchang, et al. Complex variable function solution and its application for road tunnel excavation[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2015, **28**(10): 90-97.(in Chinese))
- [15] LU Aizhong, ZHANG Ning, KUANG Lin. Analytic solutions of stress and displacement for a non-circular tunnel at great depth including support delay[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2014, **70**: 69-81.
- [16] LU Aizhong, ZHANG Ning, QIN Yuan. Analytical solutions for the stress of a lined non-circular tunnel under full-slip contact conditions[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2015, **79**: 183-192.
- [17] ZHANG Zhizen, SUN Yuzhou. Analytical solution for a deep tunnel with arbitrary cross section in a transversely isotropic rock mass[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2011, **48**(8): 1359-1363.
- [18] 宋浩然, 张顶立, 房倩. 浅埋海底隧道的围岩应力解析解[J]. 土木工程学报, 2015, **48**(S1): 283-288.(SONG Haoran, ZHANG Dingli, FANG Qian. Analytic solution on the stress of surrounding rocks for shallow subsea tunnel[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2015, **48**(S1): 283-288.(in Chinese))
- [19] 王华宁, 骆莉莎, 蒋明镜. 流变岩体中任意形状隧道分部开挖响应的理论解[J]. 岩土工程学报, 2017, **39**(2): 259-268.(WANG Huaning, LUO Lisha, JIANG Mingjing. Analytical solutions for tunnels with any shape excavated sequentially in rheological rock at great depth[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(2): 259-268.(in Chinese))
- [20] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.(LÜ Aizhong, ZHANG Luqing. *Complex Variable Function Method in Underground Tunnel Mechanics Analysis*[M]. Beijing: Science Press, 2007.(in Chinese))
- [21] 吕爱钟, 王全为. 应用最优化技术求解任意截面形状巷道映射函数的新方法[J]. 岩石力学与工

程学报, 1995, 14(3): 269-274. (LÜ Aizhong, WANG Quanwei. New method of determination for the mapping function of tunnel with arbitrary boundary using optimization techniques[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1995, 14(3): 269-274. (in Chinese))

Complex Variable Function Solutions for Stress and Displacement Distributions in Surrounding Rock of Deep Buried Highway Tunnels

LIU Shuhong^{1,2}, WANG Zihao¹, ZHEN Weigang¹

(1. *Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, P.R.China;*

2. *The Key Laboratory for Health Monitoring and Control of Large Structures of Hebei Province, Shijiazhuang 050043, P.R.China*)

Abstract: In order to optimize the design of highway tunnels and ensure the safety of construction, mechanical behavior of rock shall be made clear during highway tunnel excavation. With the complex variable method, firstly, the exterior domain of the tunnel was transformed into a unit-circle domain through the conformal mapping function; then 2 stress functions were derived with the Cauchy integral formula and the residue theorem; thereby, closed-form plane strain solutions of the surrounding rock were obtained for stresses and displacements. The curved-wall horseshoe-shaped cross section was adopted, and the distributions of stresses and excavation displacements along the tunnel boundary and the coordinate axes were calculated respectively with mathematical software MATLAB. To verify the accuracy of the stress and displacement distributions derived with analytical solutions, a 2D plane strain model was established with finite element software ANSYS. Comparison between the numerical results and the approximate analytical results shows good agreement. The results show that, the maximum hoop stress occurs at the arch foot, the maximum horizontal displacement occurs at the hance, the largest settlement and uplift are at the centers of the vault and the invert, respectively. Normal stresses along coordinate axes change obviously near the tunnel, and the maximum stress doesn't always occur at the tunnel boundary. The maximum stress approaches the applied load at a distance less than 10 m from the tunnel boundary. The largest displacement occurs at the tunnel boundary, and gradually reaches zero with an increasing distance from the tunnel boundary.

Key words: highway tunnel; approximate analytical solution; complex variable function; stress; displacement

引用本文/Cite this paper:

刘淑红, 王自豪, 甄卫刚. 深埋公路隧洞围岩应力和位移分布的复变函数解[J]. *应用数学和力学*, 2018, 39(5): 548-557.

LIU Shuhong, WANG Zihao, ZHEN Weigang. Complex variable function solutions for stress and displacement distributions in surrounding rock of deep buried highway tunnels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(5): 548-557.