

基于动力系统特性和群理论的一维周期结构瞬态响应的高效算法*

梁希强, 高强, 姚伟岸

(大连理工大学 工程力学系;
工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

摘要: 基于凝聚技术、周期结构的动力特性和群理论,提出了一种求解一维周期结构瞬态响应的高效数值算法。高效求解线性方程是动力响应求解过程中的关键问题。基于结构的周期特性和凝聚技术,减小结构对应线性方程的规模。利用周期结构动力系统中线性方程的特性,证明了在给定时间步长内,作用在某个单胞的外力只会对临近的有限个单胞产生影响。基于这个性质,一维周期结构动力响应的求解可转换为一系列小规模子结构的响应分析。进一步地,将小规模子结构的动力响应转化为循环周期结构的响应分析,而循环周期结构对应的线性方程可基于群理论高效求解。数值算例表明,该算法计算效率高且节省存储要求。

关键词: 周期结构; 群理论; Newmark-beta 法; 动力响应

中图分类号: O347

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380129

引 言

周期结构是由基本周期单元(单胞)在空间周期排列形成的。它在工程、航空航天和新型材料中应用非常广泛。由于周期结构的特殊性质和广泛应用,引起了众多学者的关注。

能带是周期结构特有的性质,也是其中很重要的一个研究方向。汪越胜等^[1]总结了计算声子晶体能带结构的若干数值方法,包括平面波法、多重散射法、有限元法、时域有限差分法等,并介绍了它们的优缺点以及局限性。基于平面波展开法,温激鸿等^[2]计算了无限周期细直梁弯曲振动中的弹性波能带结构。郑玲等^[3]基于多重散射理论对二维声子晶体带结构进行了计算。借助声子晶体理论,陈启勇等^[4]采用改进的传递矩阵法,计算出梁的能带结构。文献[5]提出了一种有限元方法用于计算光子和声子带隙材料的光谱。郁殿龙等^[6]利用有限元方法,计算了有限周期结构的椭圆杆的扭转振动频率响应,得到在带隙频率范围内频率的响应有明显衰减。基于时域有限差分方法,文献[7]提出了一种计算二维声子晶体能带的数值方法。负昊等^[8]研究了结构参数对星形节点周期蜂窝材料结构带隙的影响。

在外界激励下的动力响应也是研究周期结构很重要的一个方面。为研究列车震动在地表的传播规律,刘维宁和张昀青^[9]推导了周期轨道结构在移动荷载作用下动力响应的解析解。借

* 收稿日期: 2017-05-09; 修订日期: 2017-11-01

基金项目: 国家自然科学基金(11572076); 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2014CB049000)

作者简介: 梁希强(1988—),男,博士生(E-mail: liangxq@mail.dlut.edu.cn);

高强(1978—),男,教授,博士生导师(通讯作者, E-mail: qgao@dlut.edu.cn).

助 U 变换解耦理论, 文献[10]得到了大跨度周期性加筋板动力响应的解析解. Hans 等^[11]研究了由梁或板相互连接组成的无支承周期框架结构的动力响应. 对任意形式的周期格架结构, Rychlewska 等^[12]提出了该结构动力响应分析的数学模型. 基于波有限元方法, Mencik 和 Duhamel^[13]研究了由任意形状子结构构成的周期结构的动力响应. 以精细积分方法为基础, 利用结构的周期特性和动力系统的特性, 高强等^[14-15]提出了求解周期结构瞬态响应的高效率、高精度算法.

在实际工程应用中, 通常周期结构的规模比较大, 在对结构进行瞬态分析时, 要考虑的自由度数目非常多, 使得求解结构瞬态响应时线性方程组的规模非常大. 利用现有的方法, 进一步提高算法的计算效率是值得进一步研究的问题. 本文基于凝聚技术、周期结构中动力系统的线性方程特性和群理论, 提出了一种求解周期结构瞬态响应的高效算法.

1 一维周期结构模型

考虑如图 1(a) 所示一维周期结构, 它由 N 个单胞(如图 1(b)) 组成, 并在结构左、右两端边界施加边界条件. 对第 k ($k = 1, 2, \dots, N$) 个单胞, 假设 $\mathbf{u}_L^k, \mathbf{u}_R^k$ 和 \mathbf{u}_I^k 分别表示单胞左端、右端和中间自由度对应的位移向量, 单胞对应的位移向量可写为如下分块形式:

$$\mathbf{u}^k = [(\mathbf{u}_L^k)^T \quad (\mathbf{u}_I^k)^T \quad (\mathbf{u}_R^k)^T]^T, \quad (1)$$

单胞对应的外力向量和内力向量也可写为分块形式, 需要注意的是单胞中间自由度对应的内力向量为 $\mathbf{0}$.

显然

$$\mathbf{u}_R^k = \mathbf{u}_L^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

根据位移向量的分块形式, 单胞对应的刚度矩阵 \mathbf{K}_e , 质量矩阵 \mathbf{M}_e 和阻尼矩阵 \mathbf{C}_e 也可写为分块形式.

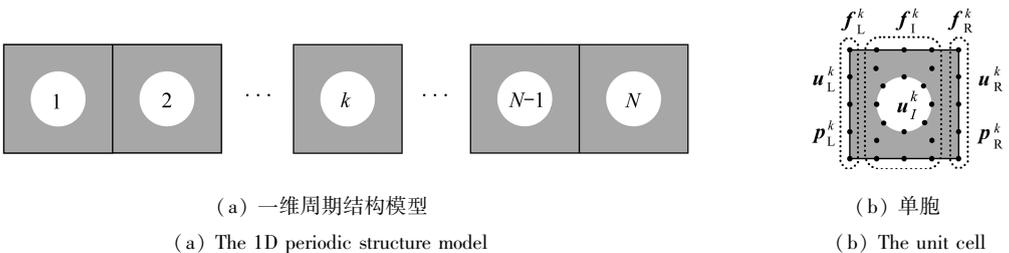


图 1 周期结构

Fig. 1 The periodic structure

根据单胞的刚度、质量、阻尼矩阵和外力向量, 可得到整个周期结构的动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3)$$

其中 \mathbf{M}, \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 分别为整个结构的质量、阻尼和刚度矩阵, \mathbf{f} 表示结构外力向量, $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}$ 分别表示位移、速度和加速度向量.

很多数值方法可用于求解方程(3), 如 Newmark-beta 法^[16]、Runge-Kutta 法^[17] 和中心差分法^[18]等. 它们的基本思想都是将方程(3)转换成如下线性方程进行求解:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{t_0+\Delta t} = \bar{\mathbf{f}}, \quad (4)$$

本文以 Newmark-beta 方法为例, 方程(4)中 $\bar{\mathbf{K}}$ 和 $\bar{\mathbf{f}}$ 分别表示等效刚度矩阵和等效外力向量.

当周期结构包含大量单胞数时, 整个结构的自由度数将非常大, 则求解方程(4)会变得非

常耗时,因此高效率求解结构动力响应的关键在于快速求解线性方程组(4)。

2 凝聚技术的应用

本节基于结构的周期特性,采用凝聚技术减小线性方程组的规模.线性方程(4)中的等效刚度矩阵和等效外力向量可通过如下方式得到.首先基于单胞的刚度、质量、阻尼矩阵和外力向量形成单胞的等效刚度矩阵和等效外力向量;然后累加得到结构的等效刚度矩阵和等效外力向量.这样做的好处是可以将单胞内部自由度进行凝聚,从而得到一个较小规模的线性方程,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{LL} & \mathbf{W}_{LR} \\ \mathbf{W}_{RL} & \mathbf{W}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L^k \\ \mathbf{u}_R^k \end{bmatrix}_{t_0+\Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_L^k \\ \mathbf{r}_R^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_L^k \\ \mathbf{p}_R^k \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中系数矩阵表示凝聚单胞的等效刚度矩阵, \mathbf{r}_L^k 和 \mathbf{r}_R^k 表示凝聚单胞左端和右端自由度对应的等效外力向量.对每个单胞进行凝聚后,通过方程(5)并根据单胞间的连续性条件,可得凝聚后整个周期结构对应的线性代数方程,求解此线性代数方程可得单胞两端的位移向量 \mathbf{u}_L^k 和 \mathbf{u}_R^k .

对于周期结构,由于每个单胞是相同的,因此凝聚过程的计算量非常小,而凝聚后对应于整体结构的线性方程的规模将会大大减小,从而可显著提高计算效率。

3 周期结构对应的线性方程组的特性

众所周知,动力系统中能量传播速度是有限的,因此对给定的时间步长,作用在某个单胞的外力只会引起临近的有限个单胞的响应.以上概念是基于物理规律做出的推断,在本节将基于周期结构对应的线性方程组的特性,严格证明上述推断,并给出确定受影响单胞数目的方法.在下一节中,将利用本节的结论,将整个周期结构的动力响应转换为一系列小规模结构的响应分析。

考虑如图1所示的一维周期结构,假设只在第 k 个单胞上作用外力.将该结构分解为如图2所示的3部分,即第1到第 $k-1$ 个单胞组成的结构,第 k 个单胞以及第 $k+1$ 到第 N 个单胞组成的结构.根据第2节中对外力的凝聚方法,可将外力转化为等效力 \mathbf{r}_L^k 和 \mathbf{r}_R^k .假设第 k 个单胞对左端相邻单胞的作用力为 \mathbf{p}_R^{k-1} 、对右端相邻单胞的作用力为 \mathbf{p}_L^{k+1} .下面分析周期结构在外力 \mathbf{r}_L^k 和 \mathbf{r}_R^k 作用下的响应特性。

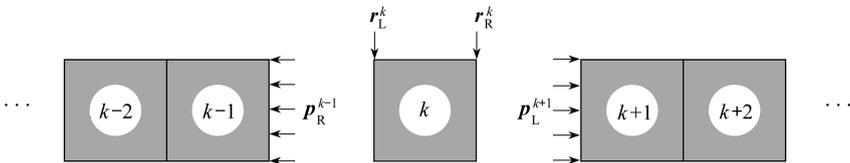


图2 仅第 k 个单胞作用外力时结构的相互作用

Fig. 2 The interaction of substructures when the external force applied on the k -th unit cell

首先,分析作用力 \mathbf{p}_L^{k+1} 对第 $k+1$ 到第 N 个单胞组成的结构的影响.基于第2节中凝聚方程,从第 $k+1$ 个单胞逐个地凝聚到第 $k+m$ ($m \geq 1$) 个单胞,则可得到如下方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{LL}^m & \mathbf{W}_{LR}^m \\ \mathbf{W}_{RL}^m & \mathbf{W}_{RR}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L^{k+1} \\ \mathbf{u}_R^{k+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_L^{k+1} \\ \mathbf{p}_R^{k+m} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 m 表示凝聚单胞的数目.系数矩阵的分块具有如下递推形式:

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{LL}^m = \mathbf{W}_{LL}^{m-1} - \mathbf{W}_{LR}^{m-1} (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} \mathbf{W}_{RL}^{m-1}, \\ \mathbf{W}_{LR}^m = (\mathbf{W}_{RL}^m)^T = -\mathbf{W}_{LR}^{m-1} (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} \mathbf{W}_{LR}, \\ \mathbf{W}_{RR}^m = \mathbf{W}_{RR} - \mathbf{W}_{RL} (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} \mathbf{W}_{LR}. \end{cases} \quad (7)$$

下面分析方程(6)中系数矩阵的特性.对任意非零向量 \mathbf{x} , 考虑如下的数列:

$$a_m = \mathbf{x}^T \mathbf{W}_{LL}^m \mathbf{x}. \quad (8)$$

利用方程(7)的第一个公式可得到

$$a_m = a_{m-1} - \mathbf{x}^T [\mathbf{W}_{LR}^{m-1} (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} \mathbf{W}_{RL}^{m-1}] \mathbf{x}. \quad (9)$$

由于等效刚度矩阵是对称正定矩阵,所以 $(\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1}$ 也是对称正定矩阵,则有

$$a_m > 0, (\mathbf{W}_{RL}^{m-1} \mathbf{x})^T (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} (\mathbf{W}_{RL}^{m-1} \mathbf{x}) \geq 0. \quad (10)$$

根据方程(8)~(10)可知 $a_{m-1} \geq a_m > 0$, 因此数列 a_m 单调有下界,则根据单调有界定理^[19], 数列 a_m 必有极限.由于数列 a_m 有极限,则由方程(9)可得到

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \mathbf{x}^T [\mathbf{W}_{LR}^{m-1} (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} \mathbf{W}_{RL}^{m-1}] \mathbf{x} \} = \\ \lim_{m \rightarrow \infty} [(\mathbf{W}_{RL}^{m-1} \mathbf{x})^T (\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1} (\mathbf{W}_{RL}^{m-1} \mathbf{x})] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

由于 $(\mathbf{W}_{RR}^{m-1} + \mathbf{W}_{LL})^{-1}$ 是正定矩阵,则方程(11)表明

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{W}_{RL}^m \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

由于非零向量 \mathbf{x} 的任意性,则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{W}_{RL}^m = \mathbf{0}. \quad (13)$$

根据方程(13)可知,当 m 趋于无穷大时,方程(6)中分块矩阵 \mathbf{W}_{LR}^m 和 \mathbf{W}_{RL}^m 趋近于零.当分块矩阵 \mathbf{W}_{LR}^m 和 \mathbf{W}_{RL}^m 为零时,线性方程组(6)可转化为两个独立的线性方程,即

$$\mathbf{W}_{LL}^m \mathbf{u}_L^{k+1} = -\mathbf{p}_L^{k+1}, \mathbf{W}_{RR}^m \mathbf{u}_R^{k+m} = \mathbf{p}_R^{k+m}. \quad (14)$$

由于方程(14)中的两个方程是相互独立的,因此 \mathbf{p}_L^{k+1} 不会对 \mathbf{u}_R^{k+m} 对应自由度产生影响.因此,第 k 个单胞上的外力只会引起其右侧有限个单胞的响应.同理,可以证得第 k 个单胞上的外力只会引起其左侧有限个单胞的响应.因此在给定时间步长,作用在某个单胞上的外力,只会引起临近的有限个单胞的影响.

下面给出求解受影响单胞数目的方法.通过上述分析知道,当 $\mathbf{W}_{RL}^m = \mathbf{0}$ 时,方程(6)转化为两个独立的方程,即方程(14),这时外力 \mathbf{p}_L^{k+1} 引起的位移向量 \mathbf{u}_R^{k+m} 为零.根据方程(7),逐步凝聚可以得到任意单胞数 $m (m > 1)$ 的分块矩阵 \mathbf{W}_{RL}^m .当满足 $\|\mathbf{W}_{RL}^m\|_2 < \varepsilon$ (通常 $\varepsilon = 10^{-16}$) 时,可以认为 $\mathbf{W}_{RL}^m = \mathbf{0}$, 此时外力引起的位移向量 \mathbf{u}_R^{k+m} 为零,此时合并的单胞数目 m 即表示受影响的单胞数 N_R .同理,分析外力 \mathbf{p}_R^{k-1} 引起结构左侧的响应,可以得到其左端受影响的单胞数 N_L .

通过上述分析可知,在给定时间步长内,作用在某个单胞上的外力只会对其左端 N_L 个单胞和右端 N_R 个单胞产生影响,并且这两个参数只需根据时间步长和单胞的属性就可以确定.

4 一维周期结构动力响应的分解

基于第3节中求解得到的 N_L 和 N_R , 本节将一维周期结构动力响应分解为一系列小规模结构的动力响应.

基于第2节中凝聚技术,将所有凝聚后单胞的等效外力叠加,如图3(a)所示,它们可表示为 $\mathbf{r}_L^1, \mathbf{r}_R^1 + \mathbf{r}_L^2, \mathbf{r}_R^2 + \mathbf{r}_L^3, \dots, \mathbf{r}_R^{N-1} + \mathbf{r}_L^N$ 和 \mathbf{r}_R^N , 共 $N + 1$ 个外力.将这 $N + 1$ 个外力分为3部分,即第

1 至第 N_L 个,第 $N - N_R + 2$ 至第 $N + 1$ 个以及第 $N_L + 1$ 至第 $N - N_R + 1$ 个,如图 3(b)、(c) 和 (d) 所示.根据线性系统叠加原理可知,图 3(b)、(c) 和 (d) 所示 3 个结构的动力响应之和与图 3(a) 所示结构的动力响应相同.

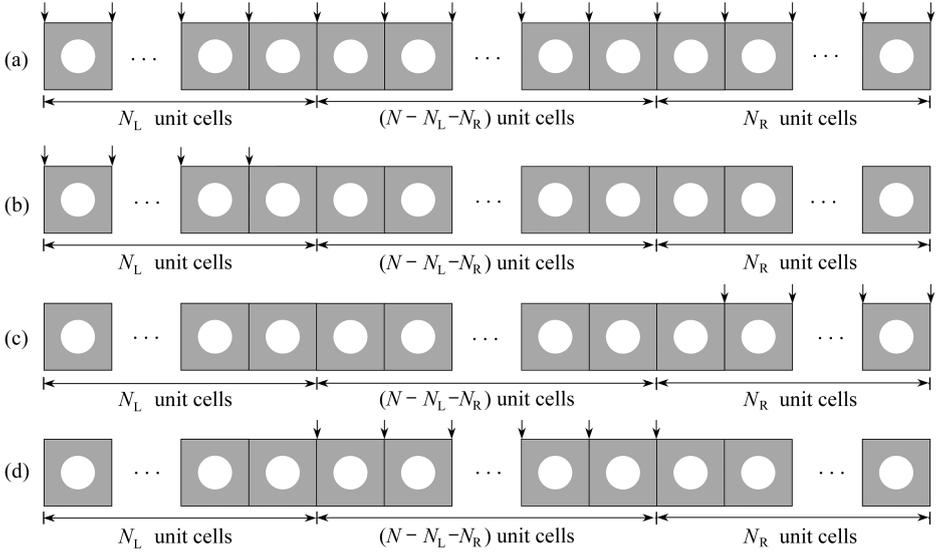


图 3 整个结构的外力及其分解后的 3 部分外力

Fig. 3 The external force on the entire structure and its 3 parts of decomposition forces

根据第 3 节分析可知,作用在某个单胞上的外力只会对其左端 N_L 个和右端 N_R 个单胞产生影响,因此分析图 3(b) 和 (c) 所示结构时,只需分别对图 4(a) 和 (b) 所示结构分析即可.图 4(a) 和 (b) 所示结构均包含 $N_L + N_R - 1$ 个单胞,其中图 4(a) 所示结构左端边界条件与原结构相同,图 4(b) 所示结构右端边界条件与原结构相同.因此,通过求解图 4(a) 和 (b) 所示结构的动力响应就可以得到图 3(b) 和 (c) 所示结构的动力响应.

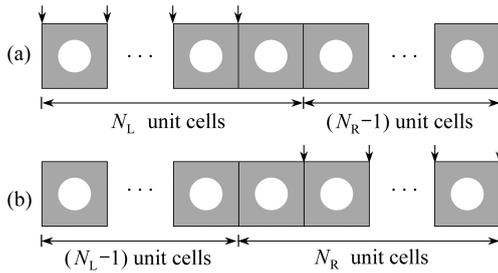


图 4 图 3(b) 和 (c) 所示结构的等效结构

Fig. 4 The equivalent structures corresponding to the structures given in fig. 3(b) and (c)

图 3(d) 所示结构与原一维周期结构包含相同数目的单胞,直接求解其动力响应的计算效率仍然非常低.为了提高计算效率,将图 3(d) 所示结构上的所有外力从左到右依次进行分组,并假设每 σ 个外力为一组(下文将会说明),结构上共有外力数为 $N + 1 - N_L - N_R$,它可能不能被 σ 整除,为保证每组均包含相同数目的外力分块,将最后一组用零进行填补,使其外力的分块数目也为 σ .这样该结构上所有外力分块被分为 J_σ 组,即

$$J_\sigma = \text{ceil}((N + 1 - N_L - N_R)/\sigma), \quad (15)$$

其中 $\text{ceil}(a)$ 表示不小于 a 的最小整数.根据第 2 节中凝聚单胞的等效外力形式,即方程(5),

这 J_σ 组外力形式如下:

$$f_\kappa = \begin{cases} [(\mathbf{r}_R^\beta + \mathbf{r}_L^{\beta+1})^T, (\mathbf{r}_R^{\beta+1} + \mathbf{r}_L^{\beta+2})^T, \dots, (\mathbf{r}_R^{\beta+\sigma-2} + \mathbf{r}_L^{\beta+\sigma-1})^T, \\ (\mathbf{r}_R^{\beta+\sigma-1} + \mathbf{r}_L^{\beta+\sigma})^T]^T, & \beta = (\kappa - 1)\sigma + N_L, \kappa = 1, 2, \dots, J_\sigma - 1, \\ [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, (\mathbf{r}_R^\beta + \mathbf{r}_L^{\beta+1})^T, (\mathbf{r}_R^{\beta+1} + \mathbf{r}_L^{\beta+2})^T, \dots, (\mathbf{r}_R^{N-N_R-1} + \mathbf{r}_L^{N-N_R})^T, \\ (\mathbf{r}_R^{N-N_R} + \mathbf{r}_L^{N-N_R+1})^T]^T, & \beta = (\kappa - 1)\sigma + N_L, \kappa = J_\sigma. \end{cases} \quad (16)$$

根据叠加原理可知,求解图 3(d) 所示结构的动力响应可通过求解这 J_σ 组外力引起响应的叠加得到。

根据第 3 节中的分析可知,一组局部外力作用在周期结构上时,只会引起其左边相邻 N_L 个和右边相邻 N_R 个单胞的响应,因此求解上述每一组外力引起的响应时,只需分析该组外力所对应的单胞及其左端 N_L 、右端 N_R 个单胞组成的结构。由于方程(16)中所有分组均包含相同数目的外力,因此在求解它们引起的响应时,所分析的结构均包含相同数目的单胞。根据结构的周期特性,每个单胞具有相同的属性,因此求解方程(16)中所有分组引起的响应时,均可通过如图 5 所示结构求解。该结构包含 $N_L + N_R + \sigma - 1$ 个单胞,结构两端是自由的。根据叠加原理可知,按照自由度的对应关系将每组外力引起的响应进行叠加后与图 3(d) 所示结构的动力响应是等效的。由于图 5 所示结构所含单胞数目很小,求解其动力响应时对应线性方程的规模也很小,因此求解结构的动力响应会变得简捷高效。

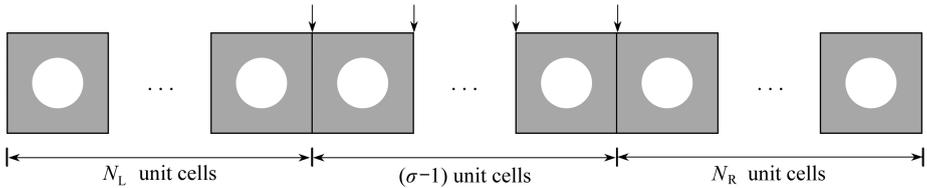


图 5 求解图 3(d) 所示结构动力响应时的等效结构

Fig. 5 The equivalent structure for solving the dynamic response of the structure given in fig. 3(d)

在上述过程中引入了参数 σ , 理论上参数 σ 可取区间 $[1, N + 1 - N_L - N_R]$ 中的任意整数,但并不是所有的 σ 均是最优的。可通过分析求解结构对应线性方程的计算量(只考虑数乘)来求得 σ 的最优值 σ_{best} 。当求解结构对应线性方程的计算量取最小值时,求解图 3(d) 所示结构的动力响应具有最高的计算效率。

通过上述分析,将求解一维周期结构动力响应转化为求解如图 4(a)、(b) 和图 5 所示结构的动力响应。转化后的这些结构包含的单胞数都很少,其对应线性方程的规模都非常小,因此通过上述转化提高了求解结构动力响应的计算效率。图 4(a) 和 (b) 所示结构对应线性方程规模非常小,且只需求解一次,因此可直接求解。而对于大规模一维周期结构,需要多次求解图 5 所示结构的动力响应,因此提高图 5 所示结构动力响应的求解效率非常重要。

5 基于群理论的求解方法

基于第 4 节分析,快速求解图 5 所示结构的动力响应是高效率分析的关键。本节基于群理论,通过提高该结构对应线性方程的求解效率,提高结构动力响应的求解效率。

基于第 2 节中凝聚单胞的等效刚度矩阵和等效外力向量,图 5 所示结构对应的线性方程可写为如下形式:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{LL} & \mathbf{W}_{LR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_{RL} & \mathbf{W}_{LL} + \mathbf{W}_{RR} & \mathbf{W}_{LR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{RL} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{W}_{LL} + \mathbf{W}_{RR} & \mathbf{W}_{LR} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_{RL} & \mathbf{W}_{RR} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad (\mathbf{f}_\kappa)^T \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T, \quad (19)$$

式中 \mathbf{f}_κ 如方程(16)所示,等效外力向量 \mathbf{f} 从上到下依次为 N_L 个零分块、 \mathbf{f}_κ 和 N_R 个零分块。

根据第3节分析可知在给定的时间步长,图5所示结构上的外力不会引起结构两端自由度上的响应,因此,对结构两端的自由度施加任意约束均不会影响该力引起结构的响应。对应到方程(17)上,在系数矩阵 \mathbf{K}_0 的左上、右上、左下和右下这4个顶角分块上分别增加 \mathbf{W}_{RR} 、 \mathbf{W}_{RL} 、 \mathbf{W}_{LR} 和 \mathbf{W}_{LL} 分块,方程(17)的解不变。这样,得到的新矩阵 \mathbf{K} 对应的结构为循环周期结构,其形式为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{LL} + \mathbf{W}_{RR} & \mathbf{W}_{LR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_{RL} \\ \mathbf{W}_{RL} & \mathbf{W}_{LL} + \mathbf{W}_{RR} & \mathbf{W}_{LR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{RL} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{W}_{LL} + \mathbf{W}_{RR} & \mathbf{W}_{LR} \\ \mathbf{W}_{LR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_{RL} & \mathbf{W}_{LL} + \mathbf{W}_{RR} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

该矩阵对应的线性方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (21)$$

通过上述分析可知,方程(17)和(21)的解是相同的。基于系数矩阵 \mathbf{K} 的特殊结构,利用群理论可以高效求解方程(21)。

求解方程(21)的主要思想是,根据对称群的不可约表示得到一个正交转换矩阵,基于矩阵 \mathbf{K} 的特性可将其分块对角化。由于该转换矩阵非常容易得到,且分块对角矩阵所对应的方程很容易求解,使得求解方程(21)具有很高的计算效率^[20]。

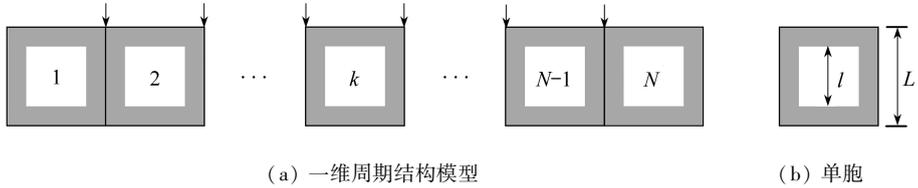
6 数值算例

高效率求解线性方程是求解结构动力响应的关键问题。求解线性方程的常用方法包括直接法和间接法,直接法首先对系数矩阵进行 Cholesky 分解,然后回代求解,而最常用的间接法是预处理共轭梯度(PCG)法,它通过收敛精度 τ 控制求解误差。本节将比较本文方法、直接法和间接法3种方法在求解周期结构动力响应过程中所占用的计算机内存、计算效率和准确性。本文算例均是在6核、32 GB内存和2.10 GHz处理器的电脑上进行的。Newmark-beta法参数为 $\alpha = 0.6$ 和 $\delta = 0.5$ 。比较本文方法计算结果的准确性时,以直接法的计算结果为参考,比较本文方法和PCG方法时,定义相对误差 e 为

$$e = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_2}{\|\mathbf{u}_N\|_2},$$

其中 \mathbf{u}_N 表示直接法求得所有自由度的位移向量, \mathbf{u} 表示本文方法或PCG方法计算得到的所有自由度的位移向量。

算例 1 考虑如图 6(a) 所示一维周期结构,它包含 N 个单胞.单胞为如图 6(b) 所示的带方形孔的方形板,方形孔位于单胞中心.单胞的几何尺寸为 $L = 0.1$ m, $l = 0.06$ m,厚度为 0.025 m,单胞为橡胶材料,材料属性如表 1 所示.采用三节点三角形单元对单胞进行有限元离散,共包含 180 个自由度.固定结构两端,在结构上端相邻单胞的节点上作用 $10^3 \sin(t)$ N 形式的外力,方向向下.采用 Rayleigh(瑞雷)阻尼为 $C = 0.3M + 0.003K$.



(a) 一维周期结构模型
(a) The 1D periodic structure model
(b) 单胞
(b) The unit cell

图 6 算例 1 模型

Fig. 6 The model for example 1

表 1 材料属性

Table 1 The properties of the 2 materials

property	rubber	low-carbon steel
Young's modulus $E / (\text{N/m}^2)$	7.84×10^6	2.1×10^{11}
density $\rho / (\text{kg/m}^3)$	32.5	195
Poisson's ratio ν	0.4	0.3

选取时间步长为 0.000 1 s 时,积分到 10 s,即积分 10^5 步.图 7 给出了结构包含 50 个单胞时,本文方法和 PCG 方法的相对误差,其中图 7(a) 表示本文方法与直接法的相对误差,图 7(b)、(c) 和 (d) 分别表示 3 种不同收敛精度 $\tau = 10^{-6}$, 10^{-7} 和 10^{-8} 的 PCG 方法与直接法的相对误差.从图 7 可以看出本文方法的正确性,且表明本文方法的精度优于 PCG 方法.

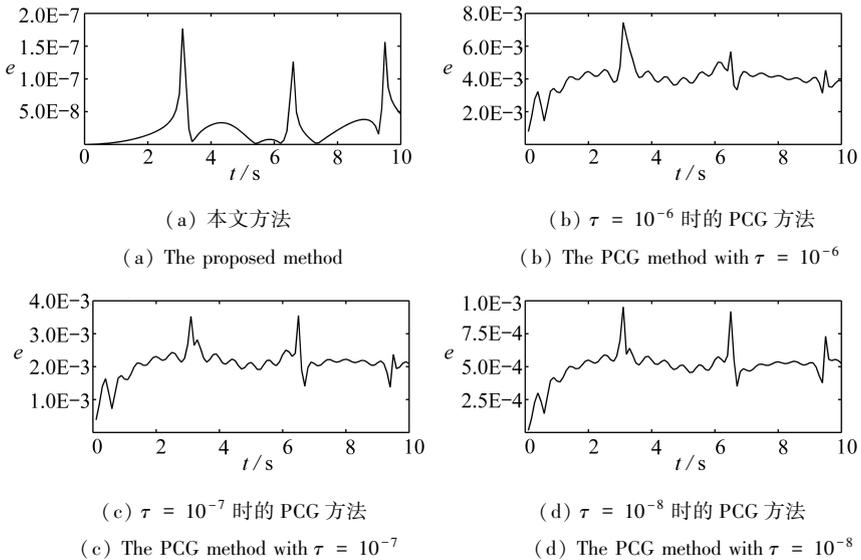


图 7 算例 1 的相对误差

Fig. 7 The relative errors for example 1

选取时间步长为 0.000 1 s,积分区间为 0~0.1 s.图 8 给出了 CPU 时间与结构所含单胞数目之间的关系,其中带三角形实线表示直接法,带圆形实线表示本文方法,带四边形、加号和五

角星的实线分别表示采用 3 种不同收敛精度 $\tau = 10^{-6}, 10^{-7}$ 和 10^{-8} 的 PCG 方法. 从图 8 可以发现, 本文方法的计算效率高直接法和 PCG 方法.

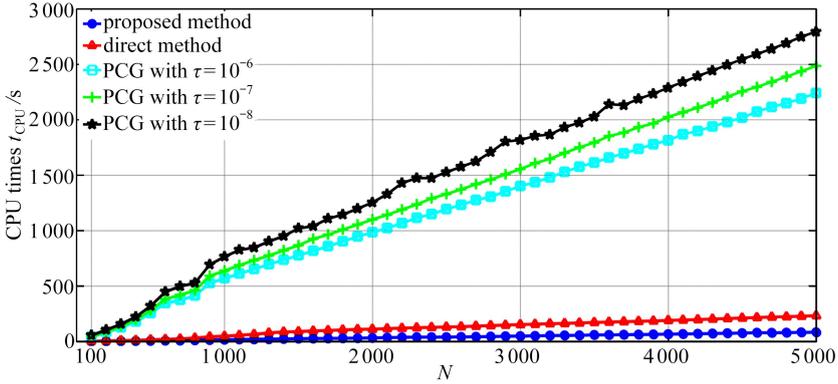


图 8 算例 1 中 3 种方法的 CPU 时间

Fig. 8 The CPU times of 3 methods for example 1

算例 2 考虑如图 9(a) 所示一维周期结构, 它包含 N 个如图 9(b) 所示单元, 结构两端固定. 单元几何尺寸为 $L = 0.1$ m, $r = 0.025$ m, 厚度 0.025 m, 弹簧刚度为 10^5 N/m, 圆心位于单元中心. 圆形材料为低碳钢, 其余材料为橡胶, 材料属性如表 1 所示. 采用三节点三角形单元对单元进行有限元离散, 共包含 386 个自由度. 结构所有节点初始位移和速度均为零, 结构上表面受 $10^2 \sin(x\pi/NL) \sin(t)$ N 的外力作用, 其中 x 表示距离结构左端的距离, 方向竖直向下. 采用 Rayleigh 阻尼 $C = 0.3M + 0.003K$.

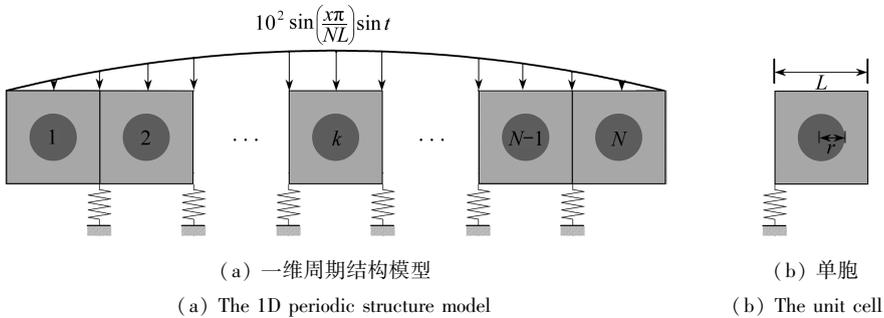


图 9 算例 2 模型

Fig. 9 The model for example 2

选取时间步长为 0.0001 s 时, 积分到 10 s, 即积分 10^5 步. 图 10 给出了结构包含 100 个单元时, 本文方法和 PCG 方法的相对误差, 其中图 10(a) 表示本文方法与直接法的相对误差, 图 10(b)、(c) 和 (d) 分别表示 3 种不同收敛精度 $\tau = 10^{-6}, 10^{-7}$ 和 10^{-8} 的 PCG 方法与直接法的相对误差. 从图 10 可看出本算例再次验证了本文方法的正确性.

选取时间步长为 0.0001 s, 积分区间为 $0 \sim 0.1$ s. 图 11 给出了 CPU 时间与结构所含单元数目之间的关系, 其中带三角形实线表示直接法, 带圆形实线表示本文方法, 带四边形、加号和五角星的实线分别表示采用 3 种不同收敛精度 $\tau = 10^{-6}, 10^{-7}$ 和 10^{-8} 的 PCG 方法. 从图 11 可以发现, 本文方法的计算效率高直接法和 PCG 方法.

基于上述结构, 进一步分析在求解结构动力响应的整个过程中 3 种方法所占用的计算机内存. 当结构包含单元数为 5 000, 10 000 和 20 000 时, 表 2 给出了 3 种方法在求解结构动力响

应的整个过程中计算机使用的最大内存,其中采用 3 种收敛精度的 PCG 方法只是在求解线性方程时迭代次数有所不同,因此它们使用内存是相同的.从表 2 可以发现,本文方法占用计算机内存明显低于其他两种方法.这是因为直接法和 PCG 方法在求解动力响应过程中需要形成整个结构的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和等效刚度矩阵,尽管它们采用稀疏处理,但由于结构规模较大,使得占用内存仍然比较大.同时,在积分过程之前需对等效刚度矩阵进行分解,此过程需要较大内存.而本文提出的方法只需对 3 个很小结构进行分析,避免了大规模矩阵的形成和分解,因此占用计算机内存非常小.

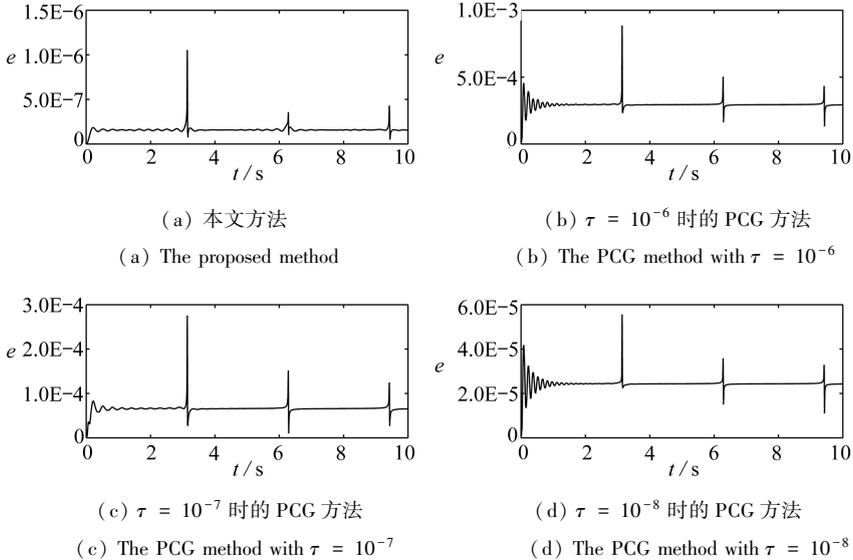


图 10 算例 2 的相对误差

Fig. 10 The relative errors for example 2

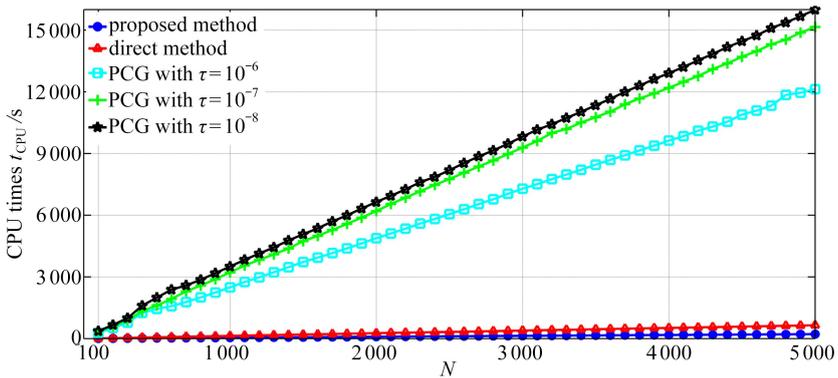


图 11 算例 2 中 3 种方法的 CPU 时间

Fig. 11 The CPU times of three methods for example 2

表 2 3 种方法使用内存的最大值

Table 2 The maximal usage of memory of the 3 methods

number of cells	number of DOFs	proposed method	direct method	PCG method
5 000	1 930 000	0.2 GB	2.8 GB	1.6 GB
10 000	3 860 000	0.4 GB	5.6 GB	3.2 GB
20 000	7 720 000	0.8 GB	11.1 GB	6.4 GB

7 结 论

基于凝聚技术、周期结构的动力特性和群理论,提出了一种求解一维周期结构瞬态响应的高效算法.首先利用结构的周期特性和凝聚技术,减小结构对应线性方程的规模.然后通过分析周期结构动力系统数值积分时对应线性方程的特性,将一维周期结构动力响应的求解转换为一系列小规模子结构的响应分析,同时将小规模子结构的响应分析转换为循环周期结构的响应分析.最后循环周期结构对应的线性方程可借助于群理论高效求解.该算法具有以下优点:

1) 利用结构的周期特性,通过对一个单胞凝聚来减小各子结构对应的线性方程的规模.

2) 通过对周期结构动力系统的线性方程进行分析,使得大规模一维周期结构的动力响应可通过求解多个小规模子结构的动力响应得到.这样,大大减小了分析结构的规模,避免了形成整个结构对应的刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和等效刚度矩阵,也避免了对等效刚度矩阵进行分解.因此该算法在很大程度上节省了计算过程中的物理内存,也进一步提高了求解结构动力响应的计算效率.

3) 基于群理论将循环周期结构对应线性方程的系数矩阵转化为分块对角形式,使得求解线性方程具有较高的计算效率.

4) 数值算例说明本文方法具有较高的计算效率.

参考文献(References):

- [1] 汪越胜,张传增,陈阿丽,等.声子晶体能带结构计算数值方法评述[C]//中国力学大会.中国,陕西,西安,2013.(WANG Yueheng, ZHANG Chuanzeng, CHEN Ali, et al. The recitation of numerical methods of the phononic crystal band structure[C]//*Proceedings of the Chinese Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Xi'an, Shaanxi, China, 2013.(in Chinese))
- [2] 温激鸿,郁殿龙,王刚,等.周期结构细直梁弯曲振动中的振动带隙[J].机械工程学报,2005,41(4):1-6.(WEN Jihong, YU Dianlong, WANG Gang, et al. Elastic wave band gaps in flexural vibrations of straight beams[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(4): 1-6.(in Chinese))
- [3] 郑玲,李以农.基于多重散射理论的二维声子晶体带结构计算[J].重庆大学学报(自然科学版),2007,30(6):6-9.(ZHENG Ling, LI Yinong. Elastic band gaps in two-dimensional phononic crystals based on multiple scattering theory[J]. *Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)*, 2007, 30(6): 6-9.(in Chinese))
- [4] 陈启勇,胡少伟,张子明.基于声子晶体理论的弹性地基梁的振动特性研究[J].应用数学和力学,2014,35(1):29-38.(CHEN Qiyong, HU Shaowei, ZHANG Ziming. Research on the vibration property of the beam on elastic foundation based on the PCs theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(1): 29-38.(in Chinese))
- [5] AXMANN W, KUCHMENT P. An efficient finite element method for computing spectra of photonic and acoustic band-gap materials—I: scalar case[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 150(2): 468-481.
- [6] 郁殿龙,刘耀宗,王刚,等.一维杆状结构声子晶体扭转振动带隙研究[J].振动与冲击,2006,25(1):104-106,169-170.(YU Dianlong, LIU Yaozong, WANG Gang, et al. Research on torsional vibration band gaps of one dimensional phononic crystals composed of rod structures[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(1): 104-106, 169-170.(in Chinese))
- [7] CAO Y J, HOU Z L, LIU Y Y. Finite difference time domain method for band-structure calcu-

- lations of two-dimensional phononic crystals[J]. *Solid State Communications*, 2004, **132**(8): 539-543.
- [8] 贡昊, 邓子辰, 朱志韦. 弹性波在星形节点周期结构蜂窝材料中的传播特性研究[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(8): 814-820.(YUN Hao, DENG Zichen, ZHU Zhiwei. Bandgap properties of periodic 4-point star-shaped honeycomb materials with negative Poisson's ratios[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(8): 814-820.(in Chinese))
- [9] 刘维宁, 张昀青. 轨道结构在移动荷载作用下的周期解析解[J]. 工程力学, 2004, **21**(5): 100-102, 93.(LIU Weining, ZHANG Yunqing. A periodic analytical solution of railway track structure under moving loads[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(5): 100-102, 93.(in Chinese))
- [10] 柴维斯, 刘锋. 周期加筋板动力响应的解析解[J]. 暨南大学学报(自然科学版), 2005, **26**(1): 46-49.(CHAI Weisi, LIU Feng. Exact solutions of vibration analysis for stiffened plates[J]. *Journal of Jinan University (Natural Science)*, 2005, **26**(1): 46-49.(in Chinese))
- [11] HANS S, BOUTIN C, CHESNAIS C. A typical dynamic behavior of periodic frame structures with local resonance[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2014, **136**(4): 2077.
- [12] RYCHLEWSKA J, SZYMCZYK J, WOZNIAC C. On the modelling of dynamic behavior of periodic lattice structures[J]. *Acta Mechanica*, 2004, **170**(1/2): 57-67.
- [13] MENCİK J M, DUHAMEL D. A wave-based model reduction technique for the description of the dynamic behavior of periodic structures involving arbitrary-shaped substructures and large-sized finite element models[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2015, **101**: 1-14.
- [14] 高强, 姚伟岸, 吴锋, 等. 周期结构动力响应的高效数值方法[J]. 力学学报, 2011, **43**(6): 1181-1185.(GAO Qiang, YAO Weian, WU Feng, et al. An efficient algorithm for dynamic responses of periodic structures[J]. *Chinese of Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, **43**(6): 1181-1185.(in Chinese))
- [15] GAO Q, ZHANG H W, ZHONG W X, et al. An accurate and efficient method for dynamic analysis of two-dimensional periodic structures[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2016, **8**(2): 1650013.
- [16] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics[J]. *Journal of the Engineering Mechanics*, 1959, **85**(3): 67-94.
- [17] BURRAGE K, BUTCHER J C. Stability-criteria for implicit Runge-Kutta methods[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1979, **16**(1): 46-57.
- [18] PARK K C, UNDERWOOD P G. A variable-step central difference method for structural dynamics analysis—part 1: theoretical aspects[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1980, **22**(2): 241-258.
- [19] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.(Department of Applied Mathematics of Tongji University. *Advanced Mathematics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.(in Chinese))
- [20] ZHONG W X, QIU C H. Analysis of symmetric or partially symmetric structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1983, **38**(1): 1-18.

An Efficient Algorithm Based on Dynamic System Properties and Group Theory for Transient Responses of 1D Periodic Structures

LIANG Xiqiang, GAO Qiang, YAO Weian

(*Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology;*
State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment
(*Dalian University of Technology*), *Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

Abstract: Based on the condensation technology, the dynamic periodic structure properties and the group theory, an efficient numerical method for computing the transient responses of 1D periodic structures was proposed. Efficiently solving linear equations is an issue for computing the dynamic responses. Based on the periodic properties of the structure and with the condensation technology, the scale of the linear equation corresponding to the structure was reduced. By means of the properties of linear equations for dynamic periodic systems, it was proved that the force on any chosen unit cell can only influence a finite number of adjacent unit cells within a time step. Then, the dynamic response computation of 1D periodic structures was converted into the computation of a series of small-scale substructures. Subsequently, the dynamic response computation of the substructures can be converted into the computation of the cyclic-periodic structures. Then, the cyclic-periodic structures were solved efficiently in light of the group theory. Numerical examples illustrate the high efficiency and memory saving of the proposed method.

Key words: periodic structure; group theory; Newmark-beta method; dynamic response

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11572076); The National Basic Research Program of China(973 Program)(2014CB049000)

引用本文/Cite this paper:

梁希强, 高强, 姚伟岸. 基于动力系统特性和群理论的一维周期结构瞬态响应的高效算法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(2): 170-182.

LIANG Xiqiang, GAO Qiang, YAO Weian. An efficient algorithm based on dynamic system properties and group theory for transient responses of 1D periodic structures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(2): 170-182.