

# 移动载荷作用下轴向运动载流梁的 参强联合共振\*

戎艳天, 胡宇达

(燕山大学 建筑工程与力学学院;

河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 研究磁场环境中移动载荷作用下轴向运动梁的磁弹性参强联合共振问题.以轴向运动载流梁为研究对象,建立横向磁场中受移动载荷作用下梁的力学模型.应用 Hamilton(哈密顿)原理,得到梁的非线性磁弹性振动方程.利用 Galerkin(伽辽金)积分法和多尺度法,推得以移动载荷为变量的幅频响应方程.通过数值计算,绘制了振幅随调谐参数、拉力扰动幅值、移动载荷、磁感应强度的变化规律曲线图,分析了电流密度、磁感应强度、移动载荷等变量对参变系统动力学特性的影响.结果表明:系统呈现典型的参强联合共振特性;移动载荷、磁感应强度能够起到抑制共振幅值多值现象的产生.

**关键词:** 载流梁; 参强联合共振; 磁场; 移动载荷; 多尺度法

**中图分类号:** O322

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.380128

## 引 言

轴向运动结构广泛应用于机械、航空航天、交通运输等重要领域,如运动轴承、输送机等设备,随着导电导磁结构的应用,电磁场的工作环境越来越普遍.处于电磁场环境中的构件,因受到电磁场和机械场等因素的共同作用,会产生较为明显的振动,影响系统的正常工作,同时系统内部参数的改变也会明显影响其动力学特性.因此,研究复杂载荷作用下系统的耦合共振问题具有理论和实际意义.

近年来,针对磁场环境中运动结构的非线性振动问题进行了一些理论探索和研究.文献[1-3]建立了横向恒定磁场中运动结构的力学模型,依据 Maxwell(麦克斯韦)电磁场方程并考虑电磁边界条件和电磁本构关系,进而运用 Hamilton 原理推导了磁弹性耦合动力学振动方程,为分析磁场环境中轴向运动导电导磁结构的非线性振动问题提供了理论依据.文献[4]以旋转运动结构为研究对象,将 Bessel(贝塞尔)函数作为振型函数,分析了系统的主共振分岔问题.参数振动通过内部参数进行周期性的变化而实现,是非线性振动中一个重要的部分,也是

\* 收稿日期: 2017-05-09; 修订日期: 2017-05-31

**基金项目:** 国家自然科学基金(11472239);河北省自然科学基金(A2015203023);河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD20131055)

**作者简介:** 戎艳天(1990—),女,硕士生(E-mail: Tiffany\_rong@163.com);

胡宇达(1968—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: huyuda03@163.com).

一种特殊的振动形式.文献[5]将拉力和速度设定为随时间变化的周期性改变的参数,分析了矩形薄板的主参数共振和载流梁的主共振-主参数共振.文献[6-7]研究了电磁影响下水电机组和电机轴承转子系统的参强联合共振问题,着重讨论了阻尼和电流对参数共振幅值的作用.文献[8]以横向磁场中变速运动矩形板为模型,依据 Floquet(弗洛凯)理论和平均法得到了参变系统的振动方程,并给出了稳定性判别条件,进而讨论了速度等变量对参数共振特性行为的影响.载荷的作用对非线性振动特性的影响非常显著,近些年,受复杂载荷作用下结构的振动问题得到了学者们的广泛关注.文献[9-11]探讨了移动载荷作用下系统的振动问题,着重分析了移动载荷大小对梁、轨道振动特性的影响.文献[12]研究了受静载荷作用的旋转圆形薄板的自由振动问题,得到了以初挠度为参数的振动系统的固有频率,着重分析了静载荷、转速对振幅的影响.文献[13]依据改进的多尺度法得到了以静载荷为参数的主共振幅频响应方程,通过数值计算分析了静载荷对振动系统的影响.

目前对于轴向运动结构的参数振动问题已有许多研究,但是对处于电磁场环境中且受移动载荷作用轴向运动结构的磁弹性参数振动问题的研究还很少.本文针对磁场中移动载荷作用下轴向运动载电流梁的参强联合共振问题进行研究,重点推导移动载荷作用下轴向运动载流梁的磁弹性耦合振动方程,并对系统的非线性参强联合共振问题进行解析求解,最后通过数值算例,分析移动载荷、电磁等变量对系统振动特性的影响.

## 1 轴向运动载流梁的磁弹性振动方程

研究长  $l$ , 宽  $b$ , 高  $h$ , 质量密度为  $\rho$  的置于恒定磁场环境中的轴向变速运动载电流梁,其中恒定磁场为  $\mathbf{B} = [0, B_{0y}, 0]$ , 通入电流的电流密度矢量为  $\mathbf{J}_e = [J_{0x}(t), 0, 0]$ ,  $t$  为时间变量.该梁沿形心轴  $x$  方向以恒定速度  $C$  运动,并且受轴向拉力  $F_{0x}$  和移动载荷  $Q$  的共同作用.

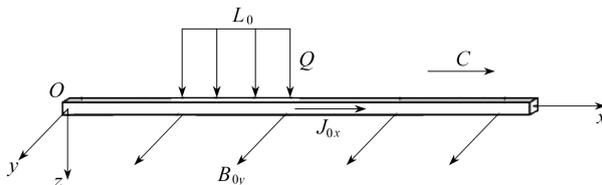


图1 磁场中轴向运动载流梁力学模型

Fig. 1 The mechanical model of an axially moving and current-carrying beam in magnetic field

### 1.1 轴向运动载电流梁动能和势能

轴向变速运动载电流梁沿  $z$  轴的速度分量为

$$V_{0z} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1)$$

其中,  $w(x, t)$  是系统横向振动位移.因此,梁的动能为

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l [C^2 + V_{0z}^2] dx dy dz = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ C^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

式中,  $A = b \times h$ , 表示梁的横截面积.

梁的总势能  $U$  由轴向拉力作用下引起的应变势能、弯曲应变势能和中面应变势能 3 部分组成,其表达式为

$$U = \int_0^l F_{0x} \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l E \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right)^2 dx dy dz + \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l E \varepsilon_x^2 dx dy dz, \quad (3)$$

其中,  $\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ ,  $E$  为弹性模量.

## 1.2 轴向运动载电流梁外力虚功

依据电磁场基本理论, Lorentz 力为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{J}$  为梁内电流密度矢量, 由通入电流和因外加磁场作用而在导电梁内产生沿  $x$  轴方向的感应电流  $\mathbf{J}'$  两部分组成, 则式(4)可表示为

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}_e \times \mathbf{B} + \mathbf{J}' \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ J_{0x} + J_x & 0 & 0 \\ 0 & B_{0y} & 0 \end{vmatrix} = (J_{0x} B_{0y} + J_x B_{0y}) \mathbf{k}, \quad (5)$$

其中,  $J_x = -\sigma_0 V_{0x} B_{0y}$ ,  $\sigma_0$  为电导率,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为直角坐标系各坐标轴的单位向量.

由式(5)可得梁单位长度所受电磁力表达式为

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} (J_{0x} B_{0y} + J_x B_{0y}) dy dz, \quad (6)$$

从而得到电磁力虚功表达式为如下形式:

$$\delta W_1 = \int_0^l F_z \delta w dx. \quad (7)$$

设梁上作用有随梁一起运动的均布移动载荷, 载荷集度为  $Q$ , 作用长度为  $L_0$ , 则合力表达式为

$$F_Q = \int_0^l Q [1 - H(x - Ct)] dx - \int_0^l Q [1 - H(x - (Ct - L_0))] dx, \quad (8)$$

式中  $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  为单位阶跃函数.

从而得到移动载荷虚功表达式:

$$\delta W_2 = \int_0^l Q [H(x - (Ct - L_0)) - H(x - Ct)] \delta w dx, \quad (9)$$

式中,  $\delta W_2$  为合力  $F_Q$  所做虚功.

## 1.3 振动方程的建立

根据 Hamilton 原理可得

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_1 + \delta W_2) dt = 0, \quad (10)$$

其中,  $(t_1, t_2)$  为积分时间域,  $\delta T$  为动能变分,  $\delta U$  为势能变分.

将式(2)、(3)、(7)、(9)代入式(10)中, 经过变分运算, 得到梁的磁弹性振动方程:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho AC \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \rho AC^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - F_{0x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{2} EA \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_z + Q [H(x - (Ct - L_0)) - H(x - Ct)], \quad (11)$$

$$\text{式中 } F_z = A \left( B_{0y} J_{0x} - \sigma_0 B_{0y}^2 \frac{\partial w}{\partial t} - \sigma_0 B_{0y}^2 C \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

## 2 参强联合振动方程

针对交变电流和变拉力作用下的轴向匀速运动导电梁进行研究,各量表达式为

$$C = C_0, F_{0x} = F_0 + F_1 \sin(\omega_1 t), J_{0x} = J_0 \sin(\omega_2 t), \quad (12)$$

其中,  $C_0$  是轴向运动恒定速度,  $F_0$  是轴向运动恒定拉力,  $F_1$  是轴向时变拉力扰动量,  $J_0$  是电流密度幅值,  $\omega_1, \omega_2$  分别是拉力和电流的变频率.

两端铰支梁满足的边界条件为

$$x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$x = l: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

当考虑上述边界条件情况,可将位移解展开为如下分离变量形式:

$$w(x, t) = f(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (13)$$

将式(12)、(13)代入式(11)中并应用 Galerkin 积分,可推得带有变系数项的参强联合无量纲化振动微分方程:

$$\ddot{q}(\tau) + 2\tilde{\zeta}\dot{q}(\tau) + q(\tau) + \tilde{g}\sin(\Omega_1\tau)q(\tau) + \tilde{\alpha}q^3(\tau) - \tilde{P}\sin(\Omega_2\tau) - \tilde{Q}_z\sin(\Omega_3\tau - \theta) = 0, \quad (14)$$

其中

$$q = \frac{f(t)}{h}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}, \quad \Omega_3 = \frac{\omega_3}{\omega_0}, \quad \omega_3 = \frac{\pi C_0}{l},$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{\sigma_0 B_{0y}^2}{2\rho\omega_0}, \quad \tilde{g} = \frac{\pi^2 F_1}{\rho A \omega_0^2 l^2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{3E\pi^4 h^2}{8\rho\omega_0^2 l^4}, \quad \tilde{P} = \frac{4AB_{0y}J_0}{\rho A \pi h \omega_0^2}, \quad \tilde{Q}_z = \frac{4Q\sin\theta}{\rho A \pi h \omega_0^2},$$

$$\theta = \frac{\pi L_0}{2l}, \quad \omega_0^2 = \frac{F_0 \pi^2 l^2 + EI\pi^4 - \rho AC_0^2 \pi^2 l^2}{\rho Al^4},$$

$\omega_0$  为系统固有频率.

## 3 多尺度法求解

在对主共振-主参数联合共振问题求解时,在式(14)中引入小参数  $\varepsilon$ , 有

$$\ddot{q}(\tau) + 2\varepsilon\tilde{\zeta}\dot{q}(\tau) + q(\tau) + \varepsilon g\sin(\Omega_1\tau)q(\tau) + \varepsilon\alpha q^3(\tau) - \varepsilon P\sin(\Omega_2\tau) - \varepsilon Q_z\sin(\Omega_3\tau - \theta) = 0, \quad (15)$$

其中

$$\zeta = \frac{\tilde{\zeta}}{\varepsilon}, \quad g = \frac{\tilde{g}}{\varepsilon}, \quad \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\varepsilon}, \quad P = \frac{\tilde{P}}{\varepsilon}, \quad Q_z = \frac{\tilde{Q}_z}{\varepsilon}.$$

采用多尺度<sup>[14-16]</sup>求解微分方程,设方程的一次近似解析解为

$$q(\tau, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1), \quad (16)$$

其中,  $T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon\tau$  为两个时间尺度.

将式(16)代入式(15)中,令  $\varepsilon$  的同次幂项系数相等可以得到

$$D_0^2 q_0 + q_0 = 0, \quad (17)$$

$$D_0^2 q_1^2 + q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - 2\zeta D_0 q_0 - g \sin(\Omega_1 \tau) q_0 - \alpha q_0^3 + P \sin(\Omega_2 \tau) + Q_z \sin(\Omega_3 \tau - \theta), \quad (18)$$

其中  $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$ .

零次近似方程式(17)的解可表示为

$$q_0 = A_0(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}_0(T_1) e^{-iT_0}, \quad (19)$$

其中,  $i^2 = -1, A_0$  为未知复数,  $\bar{A}_0$  为  $A_0$  的共轭复数.将式(19)代入一次近似方程式(18),可得

$$D_0^2 q_1^2 + q_1 = (-2iA_0' - 2i\zeta A_0 - 3\alpha A_0^2 \bar{A}_0) e^{iT_0} - \alpha A_0^3 e^{i(3T_0)} - \frac{g}{2i} [A_0(T_1) e^{i(\Omega_1+1)T_0} + \bar{A}_0(T_1) e^{i(\Omega_1-1)T_0}] + \frac{P}{2i} e^{i\Omega_2 T_0} + \frac{Q_z}{2i} e^{i\Omega_3 T_0} + cc, \quad (20)$$

其中,  $A_0' = \partial A_0 / \partial T_1, cc$  表示等式(20)右端各项的共轭复数.

分析式(20)可知,当  $\Omega_1 \approx 2, \Omega_2 \approx 1, \Omega_3 \approx 1$ , 即拉力参数激励频率接近系统固有频率的2倍,电流密度频率和外界移动载荷频率与系统固有频率近似相等时,系统主共振-主参数共振将发生.此时,令

$$\Omega_1 = 2 + \varepsilon\sigma_1, \Omega_2 = 1 + \varepsilon\sigma_2, \Omega_3 = 1 + \varepsilon\sigma_3, \quad (21)$$

其中,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  为频率调谐值.

将式(21)代入式(20)中,由消除久期项的条件可得

$$-2iA_0' - 2i\zeta A_0 - 3\alpha A_0^2 \bar{A}_0 + \frac{g}{2} i e^{i\sigma_1 T_1} \bar{A}_0 - \frac{P}{2} i e^{i\sigma_2 T_1} - \frac{Q_z}{2} e^{i(\sigma_3 T_1 - \theta)} = 0. \quad (22)$$

取复函数  $A_0$  表示形式如下:

$$A_0 = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\varphi(T_1)}, \quad (23)$$

其中,  $a$  和  $\varphi$  都是关于  $T_1$  的实函数.

将式(23)代入式(22)中,并分离实部和虚部,可得

$$a\varphi' = \frac{3\alpha}{8} a^3 + \frac{g}{4} a \sin \beta_1 - \frac{P}{2} \sin \beta_2 - \frac{Q_z}{2} \sin(\beta_3 - \theta), \quad (24)$$

$$a' = -\zeta a + \frac{g}{4} a \cos \beta_1 - \frac{P}{2} \cos \beta_2 - \frac{Q_z}{2} \cos(\beta_3 - \theta), \quad (25)$$

其中

$$\beta_1 = \sigma_1 T_1 - 2\varphi, \beta_2 = \sigma_2 T_1 - \varphi, \beta_3 = \sigma_3 T_1 - \varphi, a' = \frac{\partial a}{\partial T_1}, \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial T_1}.$$

从而  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  对  $T_1$  求导分别为

$$\begin{cases} \beta'_1 = \sigma_1 - 2\varphi', \\ \beta'_2 = \sigma_2 - 2\varphi', \\ \beta'_3 = \sigma_3 - \varphi'. \end{cases} \quad (26)$$

对于系统的稳态运动情况,应有  $a' = 0, \beta'_1 = \beta'_2 = \beta'_3 = 0$ , 则可求得

$$\varphi' = \frac{1}{2} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma. \quad (27)$$

进一步考虑式(24)~(27),最终求得

$$-\left(a\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^3\right) = -\frac{g}{4}a\sin(2\beta_3) + \frac{P}{2}\sin\beta_3 + \frac{Q_z}{2}\sin(\beta_3 - \theta), \quad (28)$$

$$\zeta a = \frac{g}{4}a\cos(2\beta_3) - \frac{P}{2}\cos\beta_3 - \frac{Q_z}{2}\cos(\beta_3 - \theta). \quad (29)$$

为便于对方程(28)、(29)进行求解,采取变量变换方法,设

$$m = a(T_1)\cos\beta_3(T_1), \quad (30)$$

$$n = a(T_1)\sin\beta_3(T_1). \quad (31)$$

由式(30)、(31)并考虑式(24)~(27),可得

$$m' = a(\cos\beta_3)\left(-\zeta + \frac{g}{4}\right) + a(\sin\beta_3)\left(\frac{3\alpha}{8}a^2 - \sigma\right) - \frac{P}{2} - \frac{Q_z}{2}\cos\theta, \quad (32)$$

$$n' = a(\sin\beta_3)\left(-\zeta - \frac{g}{4}\right) + a(\cos\beta_3)\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right) - \frac{Q_z}{2}\sin\theta. \quad (33)$$

同样,对于稳态运动,令  $m' = 0, n' = 0$ , 则由式(30)~(33)可解得

$$m = \frac{\frac{Q_z}{2}(\sin\theta)\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right) - \frac{(P + Q_z\cos\theta)}{2}\left(\zeta + \frac{g}{4}\right)}{\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right)^2 + \left(\zeta^2 - \frac{g^2}{16}\right)}, \quad (34)$$

$$n = \frac{-\frac{Q_z}{2}(\sin\theta)\left(\zeta - \frac{g}{4}\right) - \frac{(P + Q_z\cos\theta)}{2}\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right)}{\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right)^2 + \left(\zeta^2 - \frac{g^2}{16}\right)}. \quad (35)$$

又因  $m^2 + n^2 = a^2$ , 则可得系统主共振-主参数共振下的幅频响应方程:

$$\begin{aligned} & \left[ Q_z(\sin\theta)\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right) - (P + Q_z\cos\theta)\left(\zeta + \frac{g}{4}\right) \right]^2 + \\ & \left[ Q_z(\sin\theta)\left(\zeta - \frac{g}{4}\right) + (P + Q_z\cos\theta)\left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right) \right]^2 = \\ & 4\left[ \left(\sigma - \frac{3\alpha}{8}a^2\right)^2 + \left(\zeta^2 - \frac{g^2}{16}\right) \right]^2 a^2. \end{aligned} \quad (36)$$

## 4 算例及结果分析

以铜制梁为例进行分析,选取梁长  $l = 0.3$  m, 宽  $b = 0.02$  m, 高  $h = 0.01$  m, 弹性模量  $E = 108$  GPa, 质量密度  $\rho = 8\,920$  kg/m<sup>3</sup>, Poisson(泊松)比  $\mu = 0.33$ , 电导率  $\sigma_0 = 5.714\,3 \times 10^7$  ( $\Omega \cdot \text{m}$ )<sup>-1</sup>.

图2为速度-频率关系曲线图,由图可知,当轴向恒定拉力  $F_0 = 10\ 000\ \text{N}$  时,轴向速度要达到  $C_0 = 91.3\ \text{m/s}$ ,系统才发生主共振-主参数共振。

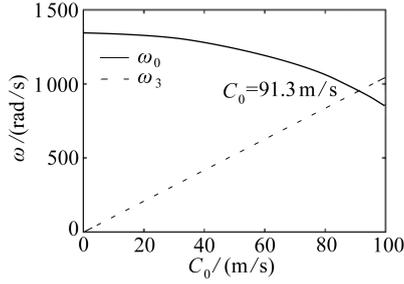


图2 速度-频率关系曲线图

Fig. 2 The speed-frequency relationship graph

图3~10分别给出了共振幅值  $a$  随调谐参数  $\varepsilon\sigma$ 、时变拉力扰动量幅值  $F_1$ 、移动载荷  $Q$ 、磁感应强度幅值  $B_{0y}$  和移动载荷长度  $L_0$  的变化关系曲线图。

图3给出了电流密度  $J_0$  影响下的幅频响应图,图中给定基本参数取值如下:  $B_{0y} = 0.01\ \text{T}$ ,  $L_0 = 0.1\ \text{m}$ ,  $Q = 500\ \text{N/m}$ ,  $F_1 = 1\ 000\ \text{N}$ 。由图可见,当给定调谐参数  $\varepsilon\sigma$  的取值范围,随着调谐参数从负值逐渐增大到正值,系统呈现由单解到三解再到五解的变化趋势。 $J_0$  对系统整体多值性的影响不明显,但随着  $J_0$  的增大,稳态解5个值区域逐渐减小。

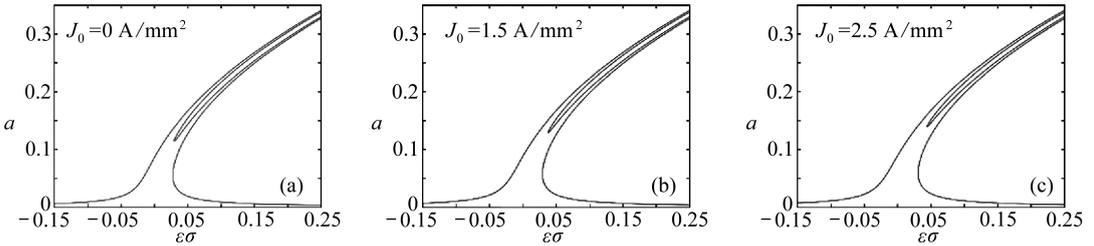


图3  $J_0$  影响下的幅频响应图

Fig. 3 The amplitude-frequency response curves under the influence of  $J_0$

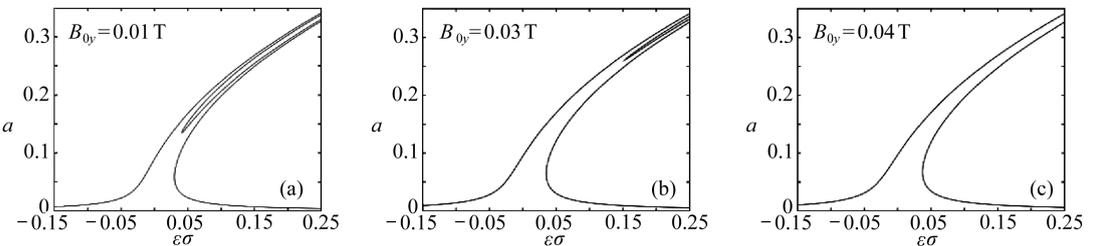


图4  $B_{0y}$  影响下的幅频响应图 ( $Q = 500\ \text{N/m}$ )

Fig. 4 The amplitude-frequency response curves under the influence of  $B_{0y}$  ( $Q = 500\ \text{N/m}$ )

图4、图5分别给出了磁感应强度  $B_{0y}$ 、移动载荷  $Q$  影响下的幅频响应图,图中给定基本参数取值如下:  $F_1 = 1\ 000\ \text{N}$ ,  $J_0 = 2\ \text{A/mm}^2$ ,  $L_0 = 0.1\ \text{m}$ 。由图可见,当给定调谐参数  $\varepsilon\sigma$  的取值范围,系统5个稳态解的区域逐渐减小,3个解的区域逐渐增大,到最后完全呈现单解和三解的状态。与此同时,被激发的右偏的硬特性共振带有变宽的趋势,多值区域呈现相应减小的变

化趋势。

图 6 给出了移动载荷  $Q$  影响下的振幅-拉力激励响应图,图中给定基本参数取值如下:  $J_0 = 2 \text{ A/mm}^2, L_0 = 0.2 \text{ m}, B_{0y} = 0.01 \text{ T}$ , 由图可见,随着移动载荷  $Q$  的增大,振动幅值有增大的趋势,移动载荷  $Q$  的改变对多值性有较大影响,随着  $Q$  增大,系统 5 个解的区域逐渐减小,3 个解的区域增大,当  $Q > 800 \text{ N/m}$  时出现单解,总体上移动载荷的增大,对系统的多值区域也有抑制作用。

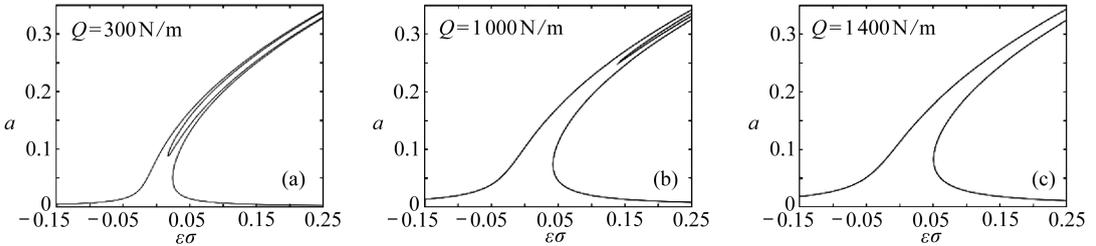


图 5  $Q$  影响下的幅频响应图 ( $B_{0y} = 0.01 \text{ T}$ )

Fig. 5 The amplitude-frequency response curves under the influence of  $Q$  ( $B_{0y} = 0.01 \text{ T}$ )

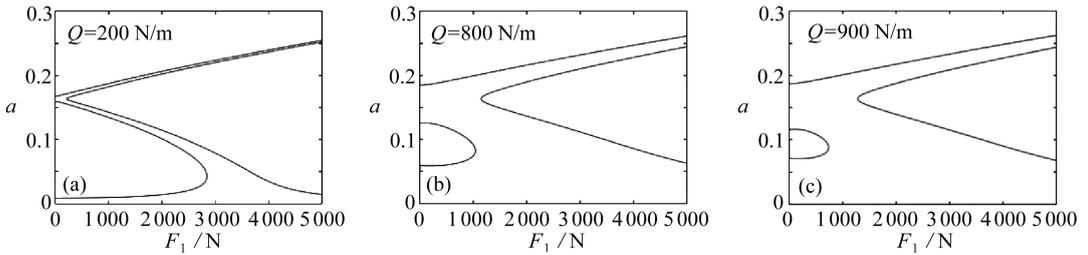


图 6  $Q$  影响下的振幅-拉力激励响应图

Fig. 6 The amplitude-tension response curves under the influence of  $Q$

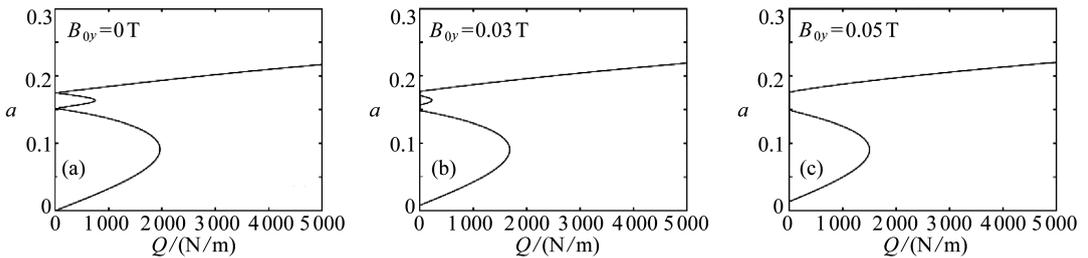


图 7  $B_{0y}$  影响下的振幅-移动载荷响应图

Fig. 7 The amplitude-moving load response curves under the influence of  $B_{0y}$

图 7 给出了磁感应强度  $B_{0y}$  影响下的振幅-移动载荷响应图,由图可见,磁感应强度的微小改变,对解的多值性有明显影响.随着磁感应强度的增大,系统的五解和三解的区域逐渐减小,而单解区域呈现增大的趋势,由此可见,增大磁感应强度抑制解的多值性。

图 8 给出了调谐参数  $\varepsilon\sigma$  影响下的振幅-磁感应强度曲线图,给定变量取值为  $F_1 = 500 \text{ N}, J_0 = 0 \text{ A/mm}^2, Q = 500 \text{ N/m}, L_0 = 0.1 \text{ m}$ .如图 8 所示,随着调谐参数逐渐增大,图像逐渐内缩成环形并向上脱离,所有图形均关于  $B_{0y} = 0 \text{ T}$  呈现左右对称分布.随着调谐参数的增大,系统由

单解到出现三解,再出现五解.振动幅值在  $B_{0y} = 0$  T 附近变化剧烈,在远离  $B_{0y} = 0$  T 的区域振幅变化较平缓.

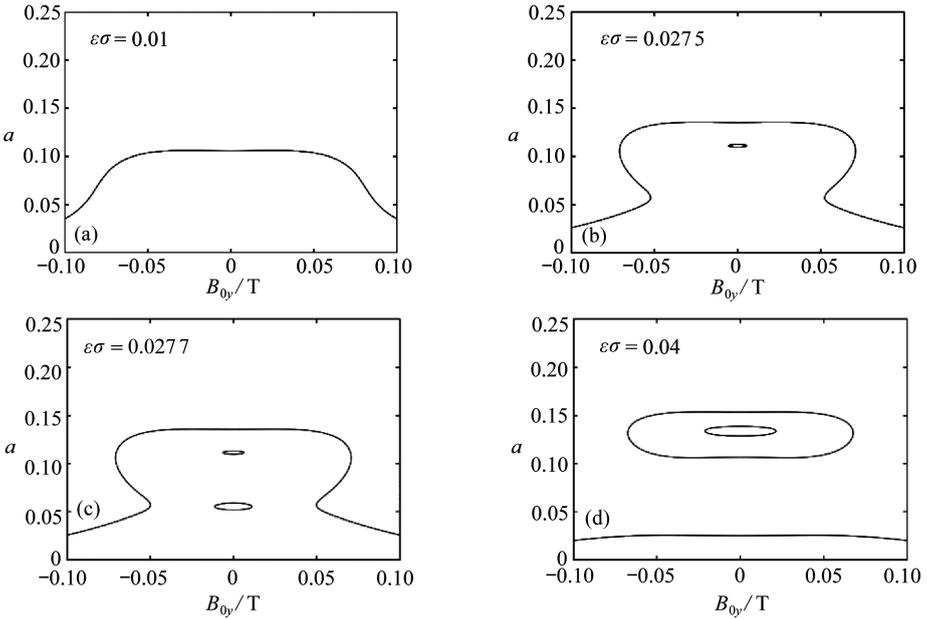


图 8 振幅-磁感应强度曲线图

Fig. 8 The amplitude-magnetic induction intensity curves

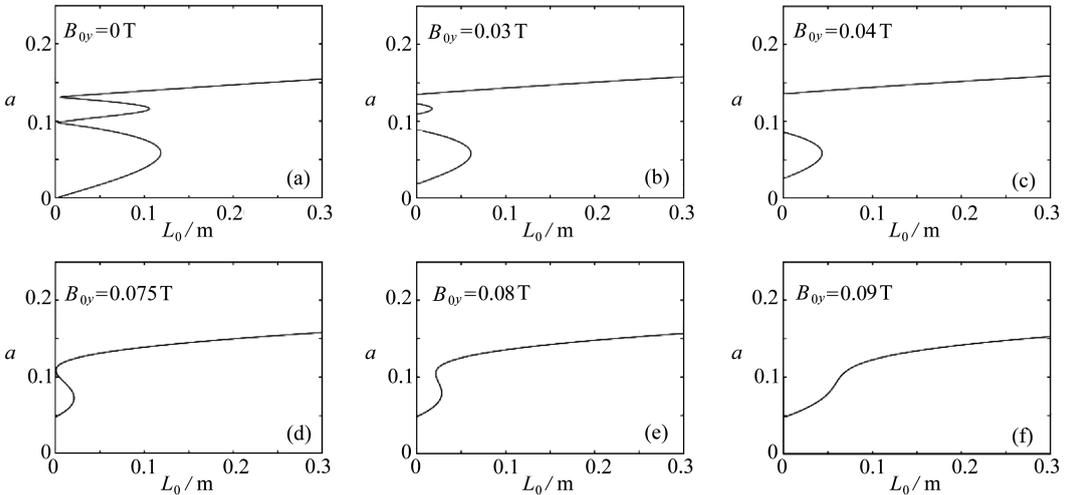


图 9  $B_{0y}$  影响下的振幅-移动载荷长度曲线图 ( $\epsilon\sigma = 0.01$ )

Fig. 9 The amplitude-moving load length curves under the influence of  $B_{0y}$  ( $\epsilon\sigma = 0.01$ )

图 9、10 分别给出了磁感应强度  $B_{0y}$  和调谐参数  $\epsilon\sigma$  影响下的振幅-移动载荷长度曲线图,图中取变量  $F_1 = 500$  N,  $J_0 = 2$  A/mm<sup>2</sup>,  $Q = 500$  N/m.由图 9 所示,当给定移动载荷长度规定的取值范围,增大磁感应强度  $B_{0y}$ ,系统 5 个解的区域减小,并逐渐退化到五解区域消失,最终当移动载荷长度增大到一定数值时,系统呈现只具有单值稳态解的情况.由图 10 所示,改变调谐参数,对系统解的个数的影响非常明显,随着调谐参数增大,系统单解区域逐渐减小,到完全呈

现多解状态.由此可见,增大磁感应强度抑制解的多值性,而增大调谐参数促进解的多值性.

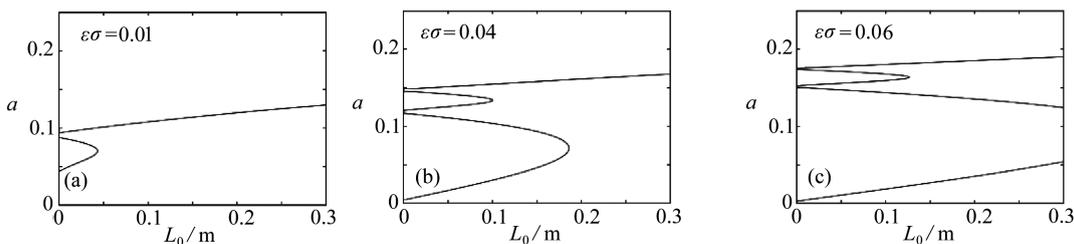


图 10  $\varepsilon\sigma$  影响下的振幅-移动载荷长度曲线图 ( $B_{0y} = 0.01 \text{ T}$ )

Fig. 10 The amplitude-moving load length curves under the influence of  $\varepsilon\sigma$  ( $B_{0y} = 0.01 \text{ T}$ )

## 5 结 论

本文研究了处于磁场环境中受移动载荷作用轴向运动载流梁的参强联合共振,依据 Galerkin 积分法推得了梁在移动载荷作用下的磁弹性横向振动微分方程,进而应用多尺度法得出共振幅频响应方程.通过数值计算,分析了轴向拉力、磁感应强度、电流密度、调谐参数、移动载荷、移动载荷长度等参数对非线性参强联合共振特征的影响,计算结果表明:

1) 系统的参强联合共振幅频响应应具有复杂且明显的多值变化现象.

2) 在给定的移动载荷长度的取值范围内,幅值的大小随着磁感应强度的增大有减小的趋势,并且磁感应强度抑制解的个数.

3) 当其他参数值给定时,系统多值区域随着移动载荷的增大,呈现减小趋势.

## 参考文献 (References):

- [1] 胡宇达, 张立保. 轴向运动导电磁梁的磁弹性振动方程[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(1): 70-77. (HU Yuda, ZHANG Libao. Magneto-elastic vibration equations for axially moving conductive and magnetic beams[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(1): 70-77. (in Chinese))
- [2] 胡宇达, 张金志. 轴向运动载流导电板磁热弹性耦合动力学方程[J]. 力学学报, 2013, **45**(5): 792-796. (HU Yuda, ZHANG Jinzhi. Magneto-thermo-elastic coupled dynamics equations of axially moving carry current plate in magnetic field[J]. *Chinese Journal of Theoretical & Applied Mechanics*, 2013, **45**(5): 792-796. (in Chinese))
- [3] 胡宇达. 轴向运动导电薄板磁弹性耦合动力学理论模型[J]. 固体力学学报, 2013, **34**(4): 417-425. (HU Yuda. Magneto-elastic coupled dynamics theoretical model of axially moving current-conducting thin plate[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2013, **34**(4): 417-425. (in Chinese))
- [4] 朴江民, 胡宇达. 磁场中旋转运动圆环板主共振分岔及混沌研究[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1181-1197. (PIAO Jiangmin, HU Yuda. Principal resonance bifurcation and chaos of rotating annular plates in magnetic fields[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(11): 1181-1197. (in Chinese))
- [5] TANG Y Q, ZHANG D B, GAO J M. Parametric and internal resonance of axially accelerating viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions[J]. *Nonlinear Dy-*

- namics*, 2016, **83**(1/2): 401-418.
- [6] 陈贵清, 董保珠, 邱家俊. 水电机组两相线间短路时的参、强联合共振研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2012, **46**(7): 1207-1212. (CHEN Guiqing, DONG Baozhu, QIU Jiajun. Combined parametric and forced resonance of hydro-generator under short circuit between two phases [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2012, **46**(7): 1207-1212. (in Chinese))
- [7] 杨志安, 李自强. 电机轴承转子多频激励系统参-强联合共振[J]. 机械强度, 2013, **35**(5): 695-699. (YANG Zhian, LI Ziqiang. Parametric and forced resonance of the bearing rotor multifrequencies excitation of a motor [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2013, **35**(5): 695-699. (in Chinese))
- [8] 胡宇达, 孙建涛, 张金志. 横向磁场中轴向变速运动矩形板的参数振动[J]. 工程力学, 2013, **30**(9): 299-304. (HU Yuda, SUN Jiantao, ZHANG Jinzhi. Parametric vibration of axially accelerating rectangular plate in transverse magnetic field [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(9): 299-304. (in Chinese))
- [9] MUSEROS P, MOLINER E, MARTÍNEZ-RODRIGO M D. Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(2): 326-345.
- [10] YAU J D, YANG Y B. Vertical accelerations of simple beams due to successive loads traveling at resonant speeds [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2006, **289**(1/2): 210-228.
- [11] WANG H P, LI J, ZHANG K. Vibration analysis of the maglev guideway with the moving load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **305**(4/5): 621-640.
- [12] HU Y D, WANG T. Nonlinear free vibration of a rotating circular plate under the static load in magnetic field [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(3): 1825-1835.
- [13] HU Y D, WANG T. Nonlinear resonance of the rotating circular plate under static loads in magnetic field [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2015, **28**(6): 1277-1284.
- [14] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 152-172. (LIU Yanzhu, CHEN Liqun. *Nonlinear Oscillations* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 152-172. (in Chinese))
- [15] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 85-105. (CHEN Yushu. *Nonlinear Oscillations* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002: 85-105. (in Chinese))
- [16] NAYFEH A H, MOOK D T. *Nonlinear Oscillations* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1979: 152-172.

# Combined Parametric and Forced Resonance of Axially Moving and Current-Carrying Beams Under Moving Loads

RONG Yantian, HU Yuda

(*College of Civil Engineering and Mechanics;*

*Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and*

*Large Structures of Hebei Province, Yanshan University,*

*Qinhuangdao, Hebei 066004, P.R.China)*

**Abstract:** The combined parametric and forced resonance of axially moving beams subjected to moving loads in magnetic field environment was investigated. For an axially moving and current-carrying beam, the mechanical model under moving load in the magnetic field was established. The Hamiltonian variational principle was applied to formulate the nonlinear magnetoelastic vibration equations. By means of the Galerkin integral method and the multiscale method, the nonlinear primary parametric amplitude-frequency response equations were achieved with the moving load as a variable. The curves of the amplitude changing with the tuning parameters, the tension disturbance, the moving load, the magnetic induction intensity and the moving load length were drawn. The influences of the axial tension, the moving load and other parameters on the dynamic behaviors of the parametric system were analyzed through numerical calculation. The results show that the system presents typical nonlinear vibration characteristics; moreover, the moving load and the magnetic field control the occurrence of the multi-value amplitude phenomenon.

**Key words:** current-carrying beam; combined parametric and forced resonance; magnetic field; moving load; multiscale method

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11472239)

---

引用本文/Cite this paper:

戎艳天, 胡宇达. 移动载荷作用下轴向运动载流梁的参强联合共振[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 266-277.

RONG Yantian, HU Yuda. Combined parametric and forced resonance of axially moving and current-carrying beams under moving loads[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 266-277.