

基于微分几何的蛇板系统动力学建模 与运动规划*

姚其家, 戈新生

(北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 100192)

摘要: 研究了蛇板系统的动力学建模与运动规划问题,提出一种遗传算法与 Gauss 伪谱法相结合的混合优化策略.首先,基于微分几何中的 Riemann(黎曼)流形与仿射映射理论,建立蛇板系统在其构型流形上的 Euler-Lagrange(欧拉-拉格朗日)方程.蛇板的构型空间对应流形空间,速度空间对应流形切空间,力矩空间对应流形余切空间,惯量矩阵提供了流形空间上的一个 Riemann 度量.构造适当的基底描述蛇板系统的许可速度,可以使蛇板系统的运动方程得到简化.然后,利用 Gauss 伪谱法将蛇板系统运动规划问题离散为非线性规划问题,利用序列二次规划算法求解蛇板系统的运动轨迹与最优控制输入,其中, Gauss 伪谱法的初值通过遗传算法得到.最后,通过数值仿真,蛇板系统的运动轨迹与实际情况吻合,最优控制输入也能很好地满足约束条件,验证了该混合优化策略的有效性.

关键词: 运动规划; 微分几何; 蛇板系统; Gauss 伪谱法; 最优控制

中图分类号: TH113

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380107

引 言

蛇板,又叫作活力板、陆地冲浪板等,自 20 世纪 90 年代被发明以来逐渐风靡全球.蛇板可以看成是对滑板的一种改进,乘客可以依靠自身的扭动和摆动产生前向的动力,不再需要用脚蹬地或依靠重力前行.

蛇板是一类典型的带有非完整约束的多体系统,其动力学与控制问题引起了国内外学者的广泛研究.Ostrowski 等^[1-3]利用 Lagrange 方法建立了蛇板系统的动力学模型,并将蛇板系统的运动规划问题描述为无漂移非完整系统的最优控制问题.蛇板系统运动方程中 Lagrange 乘子的约化处理方法是采用 Lagrange 方法求解该问题时的一个难点.Lewis^[4]基于微分几何理论推导了非完整系统在 Riemann 流形上的 Euler-Lagrange 方程形式.Bullo 等^[5-6]将文献[4]的方法应用于蛇板系统的动力学建模,并对蛇板系统的可控性与运动规划问题进行了研究.此外,Asnafi 等^[7]和 Shammas 等^[8]也都对蛇板系统的动力学与控制问题进行了研究,主要集中在两个方面,一是对 Lagrange 乘子采取不同的约化处理方法,二是对运动规划问题采取不同的步态规划技术.国内方面,刘延柱等^[9]介绍了蛇板的前进机理.丁洁玉等^[10]采用连续 Galerkin 方法

* 收稿日期: 2017-04-21; 修订日期: 2017-05-23

基金项目: 国家自然科学基金(11472058)

作者简介: 姚其家(1991—),男,硕士生(E-mail: qijia_yao@126.com);

戈新生(1957—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: gebim@vip.sina.com).

求解蛇板系统简化模型微分-代数方程组,该变分积分法在每个离散的时间间隔上都能保持能量不变.最近,中科院沈阳自动化研究所郭宪等^[11-12]利用文献[4]的方法建立了蛇形机器人系统动力学与控制统一模型并进行了实体验证,取得了不错的效果.

近年来,伪谱法成为求解最优控制问题的重要方法之一.伪谱法属于一类直接优化方法,采用全局插值多项式在一系列配置点处近似描述状态变量和控制变量,将连续的最优控制问题离散为代数约束形式的参数优化问题,即非线性规划问题^[13].根据配置点的不同,可以将伪谱法分为 Legendre 伪谱法、Gauss 伪谱法、Radau 伪谱法以及 Chebyshev 伪谱法 4 种.Elnagar 等^[14]首次将伪谱法转化理论应用于动态系统的最优控制,Benson 等^[15-16]提出 Gauss 伪谱法并证明了 Gauss 伪谱法协态变量映射定理,使用该方法求得的解满足传统间接法的一阶最优必要条件.Huntington 等^[17]采用 Gauss 伪谱法对航天器编队轨迹优化问题进行了研究.国内方面,廖一寰等^[18]基于 Gauss 伪谱法和直接打靶法求解了空间机器人载体无扰运动规划问题.孙勇等^[19]采用改进的 Gauss 伪谱法研究了高超声速飞行器再入轨迹优化问题,改进的伪谱法具有自适应性和更高的求解效率.董雪仰等^[20]利用自适应 Gauss 伪谱法求解了航天器太阳帆板展开过程的姿态最优控制问题.

本文基于微分几何理论研究蛇板系统的动力学建模与运动规划问题,提出一种遗传算法和 Gauss 伪谱法相结合的混合优化策略.首先,将蛇板系统的构型空间看作一个 Riemann 流形,选择适当的基底构成蛇板系统的速度分布空间,引入伪速度描述蛇板系统的许可速度,基于微分几何中的仿射映射理论建立蛇板系统的运动方程.然后,将蛇板系统运动规划问题描述为 Bolza 型最优控制问题,利用 Gauss 伪谱法将连续的最优控制问题离散为非线性规划问题,利用序列二次规划算法求解蛇板系统的运动轨迹与最优控制输入,其中,Gauss 伪谱法的初值通过遗传算法得到.文末给出仿真算例.

1 蛇板系统动力学建模

1.1 蛇板系统构型空间

蛇板的板面分为前后两个部分,中间用轴联结,前后板可以绕水平的联结轴作相对转动(见图 1).前后轮通过轮架安装在板的下方,轮架可以绕倾斜的转轴自由转动^[9].

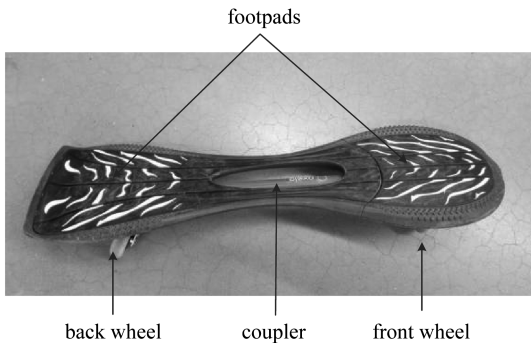


图 1 蛇板

Fig. 1 The snakeboard toy

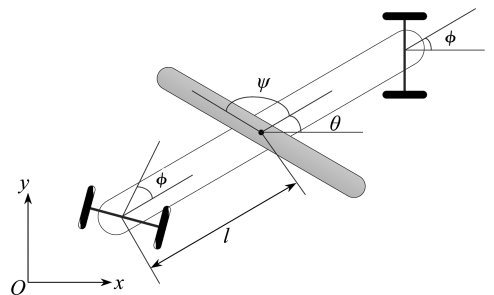


图 2 蛇板系统模型

Fig. 2 The model for the snakeboard system

假定蛇板系统的质心位于主板的几何中心,前后轮的运动反向对称,简化模型如图 2 所示.蛇板系统的构型空间由 $Q = SE(2) \times S^1 \times S^1$ 给出,构型坐标表示为 $\mathbf{q} = [x, y, \theta, \psi, \phi]^T \in Q$,

其中, (x, y) 表示主板中心相对惯性系的位置坐标, θ 表示主板中心相对惯性系的姿态角, ψ 表示转子与主板之间的相对转角, ϕ 表示前后轮与主板之间的相对转角. 将系统的构型空间 Q 看作一个 Riemann 流形, 那么系统的惯量矩阵 M 构成流形上的一个 Riemann 度量:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I + I_r + I_w & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中, m 表示蛇板系统的总质量; I, I_r 和 I_w 分别表示主板、转子和前后轮的转动惯量.

1.2 蛇板系统速度空间

蛇板系统前后轮不允许侧滑, 将该约束表示成一阶外微分的形式^[1]:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin(\phi - \theta) dx + \cos(\phi - \theta) dy + l \cos \phi d\theta, \\ \omega_2 = -\sin(\phi + \theta) dx + \cos(\phi + \theta) dy - l \cos \phi d\theta, \end{cases} \quad (2)$$

其中, l 表示主板中心到前后轮的距离.

蛇板系统的构型空间 Q 对应 5 维流形, 蛇板系统任意构型处的速度对应流形切空间 TQ 中的切向量. 由于速度空间存在 2 个约束, 如式(2), 所以可行速度空间 D 为切空间 TQ 的一个 3 维子空间. 引入向量场 V_x 和 V_y 描述蛇板系统连体坐标系相对惯性系的坐标转换:

$$\begin{cases} V_x = \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \sin \theta, \\ V_y = -\frac{\partial}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial y} \cos \theta. \end{cases} \quad (3)$$

则满足约束条件式(2)的许可速度可以表示成向量场 X_1, X'_2 和 X'_3 的线性组合^[5]:

$$\begin{cases} X_1 = lV_x \cos \phi - \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \phi, \\ X'_2 = \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X'_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{cases} \quad (4)$$

对式(4) Schmidt 正交化, 注意到 X'_3 与 X_1 和 X'_2 正交, 选取 $X_3 = X'_3$, 并利用式(5)对 X'_2 进行修正:

$$X_2 = c_1^{-1}(\langle X_1, X_1 \rangle X'_2 - \langle X_1, X'_2 \rangle X_1), \quad (5)$$

其中, 符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示定义在度量 M 上的内积; c_1 可以是任意的非零函数, 为了方便计算, 这里取 $c_1(\phi) = ml^2 \cos^2 \phi + (I + I_r + I_w) \sin^2 \phi$.

经过上述处理, 得到蛇板系统速度分布空间 D 的一组正交基底:

$$\begin{cases} X_1 = lV_x \cos \phi - \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \phi, \\ X_2 = a(\phi) V_x - b(\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$a(\phi) = \frac{I_r l \sin \phi \cos \phi}{c_1(\phi)}, \quad b(\phi) = \frac{I_r \sin^2 \phi}{c_1(\phi)}.$$

引入伪速度 v_1 , v_2 和 v_3 , 蛇板系统任意构型处的速度可以由速度分布空间 D 的正交基底表示:

$$\dot{q}_i = v_i X_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

1.3 蛇板系统力矩空间

驱动蛇板运动的广义力包括作用在转子的控制力矩 τ_1 和作用在前后轮的控制力矩 τ_2 . 如 1.2 小节所示, 蛇板系统切空间 TQ 的基底为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \psi}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

余切空间是切空间的对偶空间, 则相应的余切空间 T^*Q 的基底为 $(dx, dy, d\theta, d\psi, d\phi)$, 蛇板系统的力矩空间为余切空间 T^*Q 的二维子空间, 引入向量场 F_1 和 F_2 来表示蛇板系统力矩空间的一组正交基底:

$$\begin{cases} F_1 = d\psi, \\ F_2 = d\phi. \end{cases} \quad (8)$$

定义 $M^\# : T^*Q \rightarrow TQ$ 为余切空间 T^*Q 到切空间 TQ 的正交投影, 利用 $M^\#$ 映射将力矩空间式 (8) 映射到流形切空间上得到向量场式 (9):

$$\begin{cases} Y'_1 = M^\#(F_1) = \frac{1}{I + I_r} \left(\frac{I + I_r + I_w}{I_r} \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ Y'_2 = M^\#(F_2) = \frac{1}{I_w} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{cases} \quad (9)$$

定义 $P : TQ \rightarrow D$ 为切空间 TQ 到速度分布空间 D 上的正交投影, 利用 P 映射将向量场式 (9) 映射到 D 上得到向量场式 (10):

$$\begin{cases} Y_1 = P(Y'_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle Y'_1, X_i \rangle}{\|X_i\|^2} X_i = \frac{c_1(\phi)}{I_r c_2(\phi)} X_2, \\ Y_2 = P(Y'_2) = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle Y'_2, X_i \rangle}{\|X_i\|^2} X_i = \frac{1}{I_r} X_3, \end{cases} \quad (10)$$

其中, 符号 $\|\cdot\|$ 表示定义在度量 M 上的范数; $c_2(\phi) = ml^2 \cos^2 \phi + (I + I_w) \sin^2 \phi$. 经过上述处理, 将蛇板系统的力矩空间映射到速度分布空间 D 上.

1.4 蛇板系统运动方程

定义 $P^\perp : TQ \rightarrow D^\perp$ 表示切空间 TQ 到 D^\perp 上的正交投影, 其中, D^\perp 为 D 相对于度量 M 的正交补映射. 非完整系统在其构型流形上的 Euler-Lagrange 方程可以表示为^[4]

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{q}_i} \dot{q}_i = \lambda + M^\#(F_i) \tau_i, & i = 1, 2, \\ P^\perp(\dot{q}) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中, $\lambda \in D^\perp$ 为 Lagrange 乘子; 符号 ∇ 表示构型空间 Q 上的 Levi-Civita 联络. 将式 (11) 表示成更为紧致的联络形式^[4]:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{q}_i} \dot{q}_i = PM^\#(F_i) \tau_i, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

将式(10)代入式(12),得到蛇板系统的运动方程为

$$\tilde{\nabla}_{\dot{q}_i} \dot{q}_i = \tau_i Y_i, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

其中,符号 $\tilde{\nabla}$ 表示构型空间 Q 上的非完整仿射联络,由仿射联络的性质有^[4]

$$\tilde{\nabla}_{X_\alpha} X_\beta = \sum_{\gamma=1}^3 \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad (14)$$

其中, $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ 表示非完整 Christoffel 符号,定义式为

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{\|X_\gamma\|^2} \langle \nabla_{X_\alpha} X_\beta, X_\gamma \rangle. \quad (15)$$

将式(6)代入式(15),得到非零 Christoffel 符号为

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}_{13}^1 = \frac{(I + I_r + I_w - ml^2) \cos \phi \sin \phi}{c_1(\phi)}, \\ \tilde{\Gamma}_{23}^1 = \frac{I_r ml^2 \cos \phi}{c_1(\phi)^2}, \\ \tilde{\Gamma}_{13}^2 = -\frac{2ml^2 \cos \phi}{c_2(\phi)}, \\ \tilde{\Gamma}_{23}^2 = -\frac{I_r ml^2 \cos \phi \sin \phi}{c_1(\phi) c_2(\phi)}. \end{array} \right. \quad (16)$$

将式(6)、(7)、(10)、(14)和(16)代入式(13),得到蛇板系统运动方程的具体表达形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = lv_1 \cos \phi \cos \theta + \frac{I_r l \cos \phi \sin \phi \cos \theta}{c_1(\phi)} \dot{\psi}, \\ \dot{y} = lv_1 \cos \phi \sin \theta + \frac{I_r l \cos \phi \sin \phi \sin \theta}{c_1(\phi)} \dot{\psi}, \\ \dot{\theta} = -v_1 \sin \phi - \frac{I_r \sin^2 \phi}{c_1(\phi)} \dot{\psi}, \\ \dot{v}_1 = -\frac{(I + I_r + I_w - ml^2) \cos \phi \sin \phi}{c_1(\phi)} v_1 \dot{\phi} - \frac{I_r ml^2 \cos \phi}{c_1(\phi)^2} \dot{\psi} \dot{\phi}, \\ \dot{\psi} = \frac{2ml^2 \cos \phi}{c_2(\phi)} v_1 \dot{\phi} + \frac{I_r ml^2 \cos \phi \sin \phi}{c_1(\phi) c_2(\phi)} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{c_1(\phi)}{I_r c_2(\phi)} \tau_1, \\ \dot{\phi} = \frac{1}{I_w} \tau_2. \end{array} \right. \quad (17)$$

这里需要指出的是,计算过程中伪速度 $v_2 = \dot{\psi}$, $v_3 = \dot{\phi}$ 使蛇板系统的运动方程得到进一步简化.

2 最优控制方法

2.1 最优控制问题

不失一般性,将蛇板系统运动规划问题描述为 Bolza 型最优控制问题.选取作用在转子和前后轮的控制力矩为系统的控制变量,即 $\mathbf{u} = [\tau_1, \tau_2]^T$.选取 $\mathbf{x} = [x, y, \theta, v_1, \psi, \phi, \dot{\psi}, \dot{\phi}]^T$ 为系统的状态变量,则系统的状态方程表示为

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = lx_4 \cos x_6 \cos x_3 + \frac{I_r l \cos x_6 \sin x_6 \cos x_3}{c_1(x_6)} x_7, \\
\dot{x}_2 = lx_4 \cos x_6 \sin x_3 + \frac{I_r l \cos x_6 \sin x_6 \sin x_3}{c_1(x_6)} x_7, \\
\dot{x}_3 = -x_4 \sin x_6 - \frac{I_r \sin^2 x_6}{c_1(x_6)} x_7, \\
\dot{x}_4 = -\frac{(I + I_r + I_w - ml^2) \cos x_6 \sin x_6}{c_1(x_6)} x_4 x_8 - \frac{I_r ml^2 \cos x_6}{c_1(x_6)^2} x_7 x_8, \\
\dot{x}_5 = x_7, \\
\dot{x}_6 = x_8, \\
\dot{x}_7 = \frac{2ml^2 \cos x_6}{c_2(x_6)} x_4 x_8 + \frac{I_r ml^2 \cos x_6 \sin x_6}{c_1(x_6) c_2(x_6)} x_7 x_8 + \frac{c_1(x_6)}{I_r c_2(x_6)} u_1, \\
\dot{x}_8 = \frac{1}{I_w} u_2.
\end{cases} \quad (18)$$

根据最优控制理论,选取控制力矩的二阶范数作为系统的优化性能指标,相应的目标函数表示为

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt. \quad (19)$$

约束条件包括边界条件约束和不等式路径约束.边界条件约束包括蛇板系统运动过程初末端的位形约束:

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f. \quad (20)$$

不等式路径约束包括蛇板系统姿态角的范围约束与控制输入受限:

$$|\theta(t)| \leq \theta_m, |\psi(t)| \leq \psi_m, |\phi(t)| \leq \phi_m, |u_i(t)| \leq u_m, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

其中, $\theta_m, \psi_m, \phi_m > 0$ 表示角度坐标上界; $u_m > 0$ 表示控制力矩上界.

2.2 Gauss 伪谱法

本文采用 Gauss 伪谱法离散上述最优控制问题.蛇板系统最优控制问题的时间区间为 $[t_0, t_f]$, 而采用 Gauss 伪谱法需要将时间区间转换到 $[-1, 1]$, 对时间变量 t 作如下变换:

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0}. \quad (22)$$

取 K 个 Legendre-Gauss (LG) 点 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, K)$ 以及 $\tau_0 = -1$ 作为离散节点, 构成 $K + 1$ 个 Lagrange 插值多项式的基函数 $L_i(\tau) (i = 0, 1, \dots, K)$ 来近似状态变量, 即

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^K L_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i), \quad (23)$$

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}. \quad (24)$$

用 Lagrange 插值多项式 $\tilde{L}_i(\tau) (i = 1, 2, \dots, K)$ 作为基函数来近似控制变量, 但节点仅选用配点, 即

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^K \tilde{L}_i(\tau) \mathbf{U}(\tau_i), \quad (25)$$

$$\tilde{L}_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}. \quad (26)$$

将终端状态表示成离散状态变量和控制变量的积分形式,再利用 Gauss 积分近似得到

$$\mathbf{X}(\tau_f) = \mathbf{X}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mu_k f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau; t_0, t_f), \quad (27)$$

其中, $\mu_k = \int_{-1}^1 L_k(\tau) d\tau$ 为 Gauss 权重.

状态方程的导数通过对式(23)求导近似,即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{L}_i(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) = \sum_{i=0}^K D_{ki} \mathbf{X}(\tau_i), \quad (28)$$

其中,微分矩阵 $\mathbf{D} \in R^{K \times (K+1)}$ 由式(29)确定^[15]:

$$D_{ki} = \sum_{l=0, l \neq i}^K \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^K (\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^K (\tau_i - \tau_j)}. \quad (29)$$

将式(28)代入状态方程(18)得到状态方程在配点处的离散表达形式:

$$\sum_{i=0}^K D_{ki} \mathbf{X}_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau; t_0, t_f) = 0, \quad (30)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, K$.

用 Gauss 积分近似最优控制问题中目标函数式(19)的积分项,得到离散形式的近似目标函数为

$$J = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mu_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k. \quad (31)$$

通过上述过程,将蛇板系统最优控制问题离散为以下非线性规划问题,即通过求解离散控制变量 \mathbf{U} , 使得性能指标(31)最小,并满足状态方程约束(30)、终端状态约束(27)、边界条件约束(20)和不等式路径约束(21).

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{U}, \\ \text{min } J, \\ \text{subject to } C_1(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau; t_0, t_f) = 0, C_2(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau; t_0, t_f) \leq 0, \end{cases} \quad (32)$$

其中, C_1 表示蛇板系统最优控制问题满足的等式约束条件, C_2 表示不等式约束条件.

2.3 混合优化策略

蛇板系统最优控制问题具有 8 个状态变量和 2 个控制变量,使用 Gauss 伪谱法求解,需要赋初值的变量较多.如果变量初值选取不当,往往导致问题收敛不到可行解或陷入局部最小化而得不到全局最优解.针对这一问题,本文先利用遗传算法初步定位全局最优解.遗传算法通过 MATLAB 遗传算法工具箱实现.

选定变量初值,利用 Gauss 伪谱法将蛇板系统运动规划问题离散为代数约束形式的非线性规划问题.非线性规划问题采用序列二次规划算法进行求解,序列二次规划算法通过 MATLAB 软件包 SNOPT 实现.

3 数值仿真

蛇板系统的质量几何参数分别为

$$m = 1 \text{ kg}, l = 1 \text{ m}, I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_r = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_w = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

在 MATLAB 环境下进行数值仿真,计算在 CPU 为 2.5 GHz/Core i3,内存 4.0G 的 Windows10 计算机上进行,设置蛇板的运动时间 $t = 1 \text{ s}$.

算例 1 系统的初始和终端位形分别为

$$\mathbf{q}_0 = [0, 0, 0, 0, 0], \mathbf{q}_f = [-0.1, 1, \pi/2, -\pi, 0].$$

采取前文所述的混合优化策略,对蛇板系统最优控制问题进行仿真实验.表 1 给出了目标函数和计算机运算时间随选取的 LG 配点个数的变化情况,其中,“-”表示相当长的时间内计算结果没有收敛.从表中可以看出,随着 LG 配点数量的增多,离散的非线性规划问题对原有最优控制问题的还原度越高,得到的解越接近最优解.当 LG 配点数量增大到一定程度时,解的精度不再有大幅提高,考虑到计算过程中存在截断误差,目标函数会有微小波动,但影响不大.相反地,随着 LG 配点数量的增多,计算机的运算时间呈指数倍增长.通过上述分析,优化过程 LG 配点个数的选取需要从计算精度和计算效率两方面来综合考虑.

表 1 选取不同 LG 配点个数时最优解的相关参数

Table 1 The relevant parameters of the optimum solution for different number of LG points

number of LG points K	5	10	15	20	24	27	30
cost function J	740.427 4	723.211 7	739.966 7	740.508 3	740.655 4	740.652 3	-
computation time $t_{\text{CPU}} / \text{s}$	1.477	5.426	14.664	67.857	130.233	467.287	-

优化过程选取 24 个 LG 配点,仿真结果如图 3~5 所示.图 3 为蛇板系统两个位置坐标 x 和 y 随时间变化的曲线,满足初末时刻的边界条件约束,从图中可以看出,蛇板系统的质心运动轨迹呈 S 形,这与日常生活中蛇板运动的实际情况相吻合.图 4 为蛇板系统 3 个角度坐标 θ, ψ 和 ϕ 随时间变化的曲线,满足初末时刻的边界条件约束以及姿态角的范围约束.图 5 为作用在蛇板系统转子和前后轮的控制力矩的最优控制输入规律,满足控制力矩的输入受限.整个优化过程用时 130 s 左右,目标函数最优值 $J = 740.655 4$.

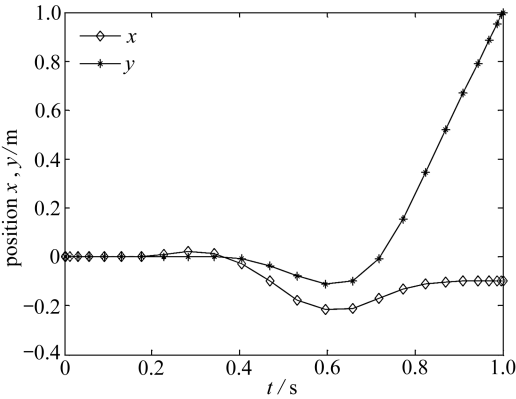


图 3 蛇板系统位置坐标的时间历程(算例 1)
Fig. 3 Time histories of 2 position coordinates of the system (example 1)

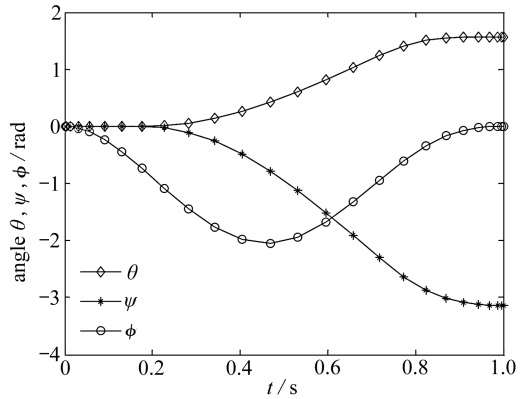


图 4 蛇板系统角度坐标的时间历程(算例 1)
Fig. 4 Time histories of 3 angle coordinates of the system (example 1)

算例 2 系统的初始和终端位形分别取

$$\mathbf{q}_0 = [0, 0, 0, 0, 0], \mathbf{q}_f = [-0.5, 0.5, -\pi/4, \pi/2, \pi].$$

仿真结果如图 6~8 所示.图 6 为蛇板系统两个位置坐标 x 和 y 随时间变化的曲线.图 7 为蛇板系统 3 个角度坐标 θ, ψ 和 ϕ 随时间变化的曲线.图 8 为作用在蛇板系统转子和前后轮的控制力矩的最优控制输入规律.优化过程同样选取 24 个 LG 配点,整个优化过程用时 105 s 左右,目标函数最优值 $J = 184.617 7$.从仿真结果可以看出,以作用在转子和前后轮的控制力矩作

为控制输入信号,蛇板系统的姿态和运动均可控,且姿态运动轨迹和最优控制输入都符合蛇板系统的运动规划要求.另外还需要指出的是,算例1的目标函数值要比算例2大许多,这是由于算例1的动作要比算例2难完成得多,控制力矩也相应地更大.

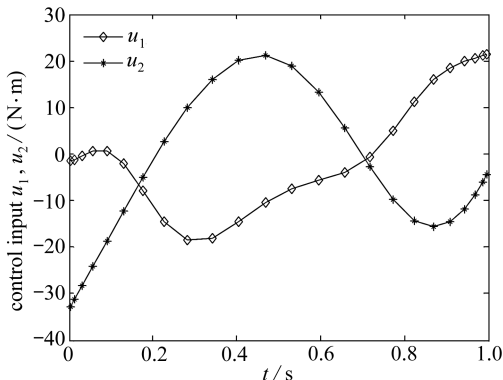


图5 蛇板系统最优控制输入规律(算例1)

Fig. 5 Optimal control input rules for the system (example 1)

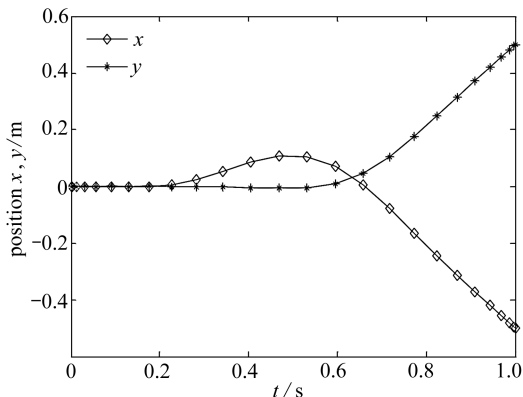


图6 蛇板系统位置坐标的时间历程(算例2)

Fig. 6 Time histories of 2 position coordinates of the system (example 2)

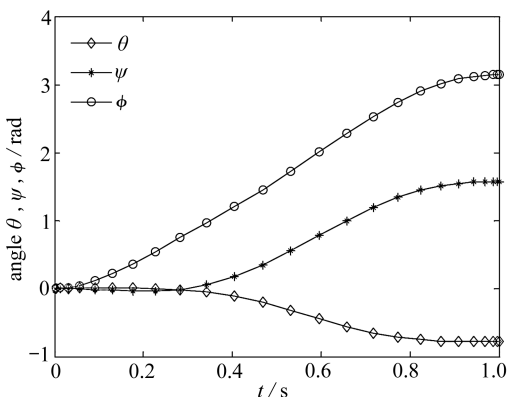


图7 蛇板系统角度坐标的时间历程(算例2)

Fig. 7 Time histories of 3 angle coordinates of the system (example 2)

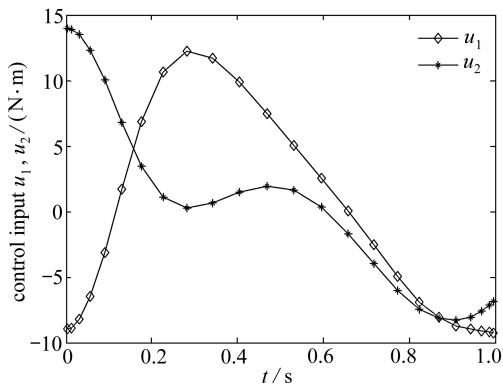


图8 蛇板系统最优控制输入规律(算例2)

Fig. 8 Optimal control input rules for the system (example 2)

4 结 论

本文基于微分几何理论研究了蛇板系统的动力学建模与运动规划问题,主要结论包括以下两点:

- 1) 选择适当的基底构成蛇板系统的速度分布空间,引入伪速度描述蛇板系统的许可速度,得到约化形式的蛇板系统运动方程,该几何建模方法也同样适用于其他含有复杂非完整约束系统的动力学建模。
- 2) 提出一种遗传算法、Gauss 伪谱法、序列二次规划算法串行的混合优化策略,通过数值仿真,蛇板系统的运动轨迹与实际情况吻合,最优控制输入也能很好地满足约束条件,验证了该优化策略的有效性。

参考文献(References):

- [1] OSTROWSKI J P, BURDICK J W. Controllability tests for mechanical systems with constraints and symmetries[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 1997, **7**(2): 101-127.
- [2] OSTROWSKI J P, DESAI J P, KUMAR V. Optimal gait selection for nonholonomic locomotion systems[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1999, **19**(3): 225-237.
- [3] OSTROWSKI J P. Steering for a class of dynamic nonholonomic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(8): 1492-1498.
- [4] LEWIS A D. Simple mechanical control systems with constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(8): 1420-1436.
- [5] BULLO F, ŽEFERAN M. On mechanical control systems with nonholonomic constraints and symmetries[J]. *Systems & Control Letters*, 2002, **45**(2): 133-143.
- [6] BULLO F, LEWIS A D. Kinematic controllability and motion planning for the snakeboard[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2003, **19**(3): 494-498.
- [7] ASNAFI A R, MAHZOON M. Some flower-like gaits in the snakeboard's locomotion[J]. *Non-linear Dynamics*, 2007, **48**(1/2): 77-89.
- [8] SHAMMAS E A, DE OLIVEIRA M. Motion planning for the snakeboard[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2012, **31**(7): 872-885.
- [9] 刘延柱, 苗英恺. 活力板运动的动力学分析[J]. 力学与实践, 2008, **30**(3): 60-62. (LIU Yanzhu, MIAO Yingkai. Dynamic analysis of the motion of vigor board[J]. *Mechanics in Engineering*, 2008, **30**(3): 60-62. (in Chinese))
- [10] 丁洁玉, 潘振宽. 非完整约束多体系统时间离散变分积分法[J]. 动力学与控制学报, 2011, **9**(4): 289-292. (DING Jieyu, PAN Zhenkuan. Time-discrete variational integrator for multibody dynamic systems with nonholonomic constraints [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, **9**(4): 289-292. (in Chinese))
- [11] 郭宪, 马书根, 李斌, 等. 基于微分几何的蛇形机器人动力学与控制统一模型[J]. 中国科学: 信息科学, 2015, **45**(8): 1080-1094. (GUO Xian, MA Shugen, LI Bin, et al. Dynamics-control unified model of a snakelike robot based on differential geometry[J]. *Scientia Sinica: Informationis*, 2015, **45**(8): 1080-1094. (in Chinese))
- [12] 郭宪, 马书根, 李斌, 等. 基于动力学与控制统一模型的蛇形机器人速度跟踪控制方法研究[J].

- 自动化学报, 2015, **41**(11): 1847-1856.(GUO Xian, MA Shugen, LI Bin, et al. Velocity tracking control of a snake-like robot with a dynamics and control unified model[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(11): 1847-1856.(in Chinese))
- [13] 唐国金, 罗亚中, 雍恩米. 航天器轨迹优化理论、方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (TANG Guojin, LUO Yazhong, YONG Enmi. *Spacecraft Trajectory Optimization Theory, Method and Application*[M]. Beijing: Science Press, 2012.(in Chinese))
- [14] ELNAGAR G, KAZEMI M A, RGZZAGHI M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(10): 1793-1796.
- [15] BENSON D A. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. PhD Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [16] BENSON D A, HUNTINGTON G T, THORVALDSEN T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, **29**(6): 1435-1439.
- [17] HUNTINGTON G T, RAO A V. Optimal reconfiguration of spacecraft formations using the Gauss pseudospectral method[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, **31**(3): 689-698.
- [18] 廖一寰, 李道奎, 唐国金. 基于混合规划策略的空间机械臂运动规划研究[J]. 宇航学报, 2011, **32**(1): 98-103.(LIAO Yihuan, LI Daokui, TANG Guojin. Motion planning of space manipulator system based on a hybrid programming strategy[J]. *Journal of Astronautics*, 2011, **32**(1): 98-103.(in Chinese))
- [19] 孙勇, 张卯瑞, 梁晓玲. 求解含复杂约束非线性最优控制问题的改进 Gauss 伪谱法[J]. 自动化学报, 2013, **39**(5): 672-678.(SUN Yong, ZHANG Maorui, LIANG Xiaoling. Improved Gauss pseudospectral method for solving nonlinear optimal control problem with complex constraints[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 672-678.(in Chinese))
- [20] 董雪仰, 戈新生. 航天器太阳帆板展开过程最优控制的自适应 Gauss 伪谱法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(6): 655-664.(DONG Xueyang, GE Xinsheng. The adaptive Gauss pseudospectral method for the optimal control of spacecraft solar array deployment[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(6): 655-664.(in Chinese))

Dynamics Modeling and Motion Planning for Snakeboard Systems Based on Differential Geometry

YAO Qijia, GE Xinsheng

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, P.R.China)

Abstract: Dynamics modeling and motion planning for snakeboard systems were investigated, and a hybrid optimization strategy based on the genetic algorithm (GA) and the Gauss pseudospectral method (GPM) was presented. Firstly, the Euler-Lagrange equations for the snakeboard system were derived based on the Riemannian manifold and the affine connection theory in differential geometry. The configuration space of the snakeboard corresponds to the manifold space, the velocity space corresponds to the tangent space, the torque space corresponds to the cotangent space, and the inertia matrix provides a Riemannian measure on the manifold. The set of admissible velocities were represented by the appropriate bases to simplify the kinematics equations. Then the optimal motion planning problem was transformed into a nonlinear programming problem with the GPM. The optimal trajectory and the optimal control inputs were obtained with the sequential quadratic programming (SQP) algorithm. The GA was applied to generate the initial values of the GPM. Finally, through numerical simulation, the optimal trajectory agrees well with actual conditions, and the control inputs match the various constraints closely. The results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: motion planning; differential geometry; snakeboard system; Gauss pseudospectral method (GPM); optimal control

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472058)

引用本文/Cite this paper:

姚其家, 戈新生. 基于微分几何的蛇板系统动力学建模与运动规划[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 29-40.

YAO Qijia, GE Xinsheng. Dynamics modeling and motion planning for snakeboard systems based on differential geometry[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 29-40.