

# 基于 Hausdorff 分形导数 Richards 方程的 土壤入渗率和水文模型类型\*

陈文, 梁英杰, 杨旭

(水文水资源与水利工程科学国家重点实验室(河海大学), 南京 210098;  
河海大学 力学与材料学院 软物质力学研究所, 南京 211100)

(我刊编委陈文来稿)

**摘要:** 基于 Hausdorff(豪斯道夫)分形导数 Richards 方程,推导了土壤入渗率与时间的关系.该模型仅有两个参数,其中 Hausdorff 分形导数的阶数  $\alpha$  能够表征水分在土壤中扩散环境的力学特征,刻画土壤结构的非均质性质,而土壤孔径分布指标  $\lambda$  决定了不同水文模型的类型.通过两个算例,观察到当 Hausdorff 导数的分形维  $\alpha \neq 1$  时,入渗率表现出一定的记忆性,即  $\alpha$  的值越小,入渗率随时间的变化越慢,记忆性越强;且同时反映出水分入渗的扩散环境愈加偏离经典模型的理想状态.土壤孔径分布指标  $\lambda$  的值越小,土壤水分渗透的速率越慢,该参数是反映土壤渗流特征的一个基本指标.

**关键词:** Hausdorff 分形导数; Richards 方程; 反常渗透; 土壤入渗率;  
径流曲线数模型

**中图分类号:** O35; TV11; O175      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.380101

## 引言

土壤水渗流是分析区域水文环境和计算流域水量平衡的主要参考指标,其运动特性在描述植物的蒸腾,浅层地下水的蒸发、入渗补给和地下水污染物的治理等方面起着关键性作用<sup>[1-2]</sup>.其中土壤水的入渗问题是非饱和土壤渗流领域的基本问题,广泛存在于污染物扩散、土石坝渗流、泥沙运输、边坡稳定性等领域,具有重要的研究意义<sup>[3-6]</sup>.

目前, Richards 方程是描述土壤水入渗规律的基本方程<sup>[7]</sup>.该方程于 1931 年,由 Richards 利用 Darcy(达西)定律研究多孔介质中毛细管传导作用时推导得到<sup>[8]</sup>.然而,该方程仅适用于各向同性的土壤以及不可压缩流体,且不能用于非 Boltzmann(玻尔兹曼)尺度的渗流,即统计上粒子集的位移均值不满足时间的均方根函数<sup>[9]</sup>.从扩散的物理角度解释,非均质土壤中粒子的运移不满足 Brown(布朗)运动的特征,实际为反常扩散过程<sup>[10]</sup>.

为解决以上这些问题,近年来研究人员提出了描述土壤水渗流反常扩散过程的几种新模

\* 收稿日期: 2017-04-17; 修订日期: 2017-05-31

基金项目: 111 引智计划(B12032); 中央高校基本科研业务费(2017B01114)

作者简介: 陈文(1967—),男,教授,博士,博士生导师(E-mail: chenwen@hhu.edu.cn);  
梁英杰(1988—),男,讲师,博士(通讯作者. E-mail: liangyj@hhu.edu.cn);  
杨旭(1990—),男,博士生(E-mail: yangxu@hhu.edu.cn).

型<sup>[9, 11-13]</sup>。目前,分数阶导数和分形导数是常用于描述反常扩散的数学物理方法。例如, Pachepsky 等<sup>[9]</sup>基于分数阶导数,提出了一种时间分数阶 Richards 方程,但是该方程包含分数阶卷积积分,计算复杂;且不能通过非 Boltzmann 尺度变换转化为常微分方程。随后 Gerolymatou 等<sup>[11]</sup>对该模型做了改进,提出了一种分数阶积分方程。最近, Sun (孙洪广)等<sup>[13]</sup>发现分数阶导数不能很好地模拟这类问题,运用 Hausdorff 分形导数推导了分形 Richards 方程,该模型在非 Boltzmann 尺度变换下可以转化为常微分方程,能够较好地拟合试验数据,并合理解释了各种非 Darcy 渗流现象。

另一方面,目前已有多个描述土壤水渗流的经典经验模型,例如径流曲线数(SCS-CN)模型<sup>[14]</sup>和新安江模型<sup>[15]</sup>等。但是,这些模型的物理机理尚不明确。建立这些水文模型的物理机理是长期以来的研究难点。最近, Hooshyar 和 Wang<sup>[16]</sup>基于 Richards 方程,通过具体的初边值条件,推导了土壤入渗率与土壤孔径分布指标的关系,并给出了 SCS-CN 模型的物理解释。该工作是从物理角度解释水文模型的一个突破性进展。然而,该方法是基于经典的 Richards 方程,仅适用于几种特殊情况下土壤中水分的渗流。

基于 Sun 等<sup>[13]</sup>和 Hooshyar, Wang<sup>[16]</sup>的工作,本文尝试采用分形 Richards 方程,推导出适用面较广的非均质土壤入渗率,并分析其与现有水文模型的关系,其中分形导数的阶数刻画土壤的非均质性。

本文第 1 节介绍了 Hausdorff 分形导数 Richards 方程;第 2 节基于 Hausdorff 分形导数 Richards 方程推导了土壤入渗率;第 3 节结合两个算例,分析了入渗率的性质;第 4 节对本文的工作进行了总结。

## 1 Hausdorff 分形 Richards 方程

Richards 方程可以描述水在多孔介质中的垂向运动。从扩散的角度, Richards 方程具有以下表达式:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}, \quad (1)$$

其中土壤水扩散率  $D(\theta)$  定义为

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{\partial \Psi_m(\theta)}{\partial \theta}, \quad (2)$$

式中  $z$  为距基准面的距离,取向向下为正,  $\theta$  为土壤含水率,  $K(\theta)$  为土壤导水率,  $\Psi_m(\theta)$  为土壤基质势。

根据 Hausdorff 分形导数的定义<sup>[17]</sup>,可得如下时间分形导数 Richards 方程(简称 Hausdorff 分形 Richards 方程):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}, \quad (3)$$

其中

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{(t + \Delta t)^\alpha - t^\alpha},$$

$0 < \alpha \leq 1$  为时间分形导数的阶数,可以描述粒子扩散轨迹的 Hausdorff 分形维数<sup>[17]</sup>。土壤水扩散率的量纲为  $m^2/s^\alpha$ ,其他变量的量纲均与经典 Richards 方程中的一致。分形 Richards 方程可以刻画土壤水渗透过程中的非 Boltzmann 尺度<sup>[13]</sup>。当  $\alpha = 1$  时,退化为经典的 Richards 方程。当

$\alpha \neq 1$  时,分形 Richards 方程能够刻画土壤含水率随时间的非指数函数衰减规律,即比经典 Richards 方程对应的指数衰减慢,称为 Hausdorff 分形导数模型的记忆性。

由式(3)可以注意到,毛细力和重力共同决定渗透过程.在渗透过程的初期阶段,毛细力起关键作用,而重力可以忽略不计,则对应的控制方程为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (4)$$

当扩散率  $D(\theta) = D$  为常值时,式(4)退化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (5)$$

根据不同的初值和边界条件,可以推导出不同形式的土壤入渗率与时间的关系:

$$f = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (z = 0, t), \quad (6)$$

土壤入渗率的初值  $f(t = 0) = f_0$ .

## 2 土壤入渗率

为便于推导入渗率,采用式(5)的另一种等价形式<sup>[16]</sup>:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}, \quad (7)$$

其中  $\tau$  为土壤相对缺水率,  $\tau$  与土壤含水率  $\theta$  之间的关系为

$$\tau = 1 - \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (8)$$

其中  $\theta_r$  和  $\theta_s$  分别为残余含水率和饱和含水率。

考虑文献[16]中的初边值条件,推导土壤入渗率:

$$\tau = \tau_0, \quad z = l, t = 0, \quad (9)$$

$$\tau = 0, \quad z = 0, t, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad z = l, t, \quad (11)$$

其中  $l = l_0 \tau^{-1/\lambda}$ ,  $\lambda$  为孔径分布指标,是一个平均意义上的概念。

根据经典的分离变量法,可以求得方程(7)的解

$$\tau = \left( \frac{\pi^2 D}{2\lambda l_0^2} t^\alpha + 1 \right)^{-\lambda/2} \left( \frac{\theta_s - \theta_0}{\theta_s - \theta_r} \right) \sin \left( \frac{\pi}{2l(t)} z \right). \quad (12)$$

结合式(6)、(8),土壤入渗率的表达式为

$$f = \frac{D\pi(\theta_s - \theta_0)}{2l_0} \left( \frac{\pi^2 D}{2\lambda l_0^2} t^\alpha + 1 \right)^{-\lambda/2-1/2}. \quad (13)$$

运用入渗率的初值,式(13)可以简化为

$$f = f_0 \left( \frac{\pi f_0}{\lambda l_0 (\theta_s - \theta_0)} t^\alpha + 1 \right)^{-\lambda/2-1/2}. \quad (14)$$

当时间分形导数的阶数  $\alpha = 1$  时,式(14)对应的结果与 Hooshyar 和 Wang<sup>[16]</sup> 给出的结果一致.孔径分布指标  $\lambda$  的取值决定了相应水文模型的入渗率。

例如当  $\lambda = 3$  时,式(14)为径流曲线数(SCS-CN)模型的推广,简称分形 SCS-CN 模型:

$$f = f_0 \left( \frac{f_0}{S} t^\alpha + 1 \right)^{-2}, \tag{15}$$

$S$  为潜在土壤水保持率。

### 3 算例分析

为考察时间分形导数的阶数  $\alpha$  对土壤入渗率的影响,根据式(13),图 1 给出了 4 组不同  $\alpha$  值对应的入渗率随时间的变化曲线,其中  $\lambda = 3, D = 1, l_0 = 1, \theta_s - \theta_0 = 1$ ; 同时考察了不同孔径分布指标  $\lambda$  对土壤入渗率的影响.根据式(13),图 2 给出了 4 组不同  $\lambda$  值对应的入渗率随时间的变化曲线,其中时间分形导数的阶数  $\alpha = 0.6, D = 1, l_0 = 1, \theta_s - \theta_0 = 1$ .

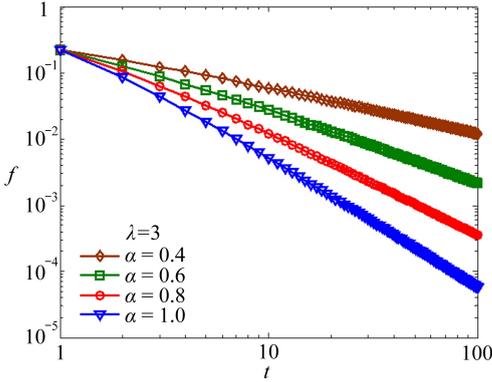


图 1 不同分形导数的阶数对应土壤入渗率随时间的变化曲线

Fig. 1 Curves of soil infiltration rate vs. time for different fractal derivative order values

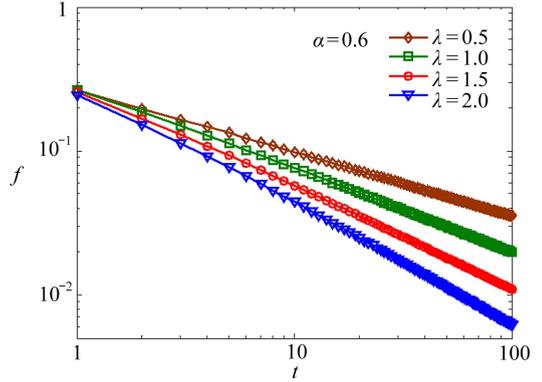


图 2 不同孔径分布指标对应土壤入渗率随时间的变化曲线

Fig. 2 Curves of soil infiltration rate vs. time for different pore size distribution index values

由图 1 可知,当固定土壤孔径分布指标  $\lambda$  时,分形导数阶数  $\alpha$  的值决定了入渗率的衰减速率.当  $\alpha \neq 1$  时,入渗率均表现出一定的记忆性,即  $\alpha$  的值越小,入渗率随时间的变化越慢,记忆性越强;且同时反映出水分入渗的扩散环境越复杂,远离经典模型的均匀介质假设.这里的记忆性一方面指分形导数的值不为 1 时,入渗率比经典 Richards 模型的入渗率衰减慢,另一方面指分形 Richards 模型可以描述一类由入渗介质的非均质性引起的非正常入渗过程,即非 Brown 运动.因此,  $\alpha$  的值是刻画土壤结构的一个重要参数,能够反映土壤的非均质性特征。

由图 2 可知,当固定分形导数的阶数  $\alpha$  时,土壤孔径分布指标  $\lambda$  的值决定了入渗率的衰减速率. $\lambda$  的值越小表明土壤水分渗透的速率越慢.因此,  $\lambda$  的值是反映土壤微结构特征的另一个重要指标。

### 4 结 论

本文基于 Hausdorff 分形 Richards 方程,推导了土壤入渗率与时间的关系.其中分形导数的阶数  $\alpha$  能够表征水分在土壤中扩散环境的复杂程度,刻画了土壤结构的非均质特征.通过两个算例,观察到当  $\alpha \neq 1$  时,土壤入渗率表现出一定的记忆性,即  $\alpha$  的值越小,入渗率随时间的变化越慢,记忆性越强;且同时反映出水分入渗的扩散环境越复杂.此外,土壤孔径分布指标  $\lambda$  的值越小表明土壤水分渗透的速率越慢,也是反映土壤结构特征的另一个重要指标。

笔者注意到,也可以从分数阶 Darcy 定律和分数阶导数 Richards 方程的角度一般化土壤

入渗率与时间的关系.结合具体的试验数据,推导分形导数的阶数与土壤孔径分布的关系以及和现有水文模型的区别与联系,这将是笔者下一步工作的重点.

**致谢** 本文作者衷心感谢美国中佛罗里达大学的王定保教授提供的论文资料.

### 参考文献(References):

- [1] 杜世鹏,王船海,王裕充,等.基于饱和-非饱和和流动理论的土壤水运动模拟[J].水力发电,2015,41(1):11-14.(DU Shipeng, WANG Chuanhai, WANG Yuchong, et al. Soil water simulation based on saturated and unsaturated flow theory[J]. *Water Power*, 2015, 41(1): 11-14. (in Chinese))
- [2] 曾刚.非饱和土渗透方法及渗流参数反演[D].硕士学位论文.宜昌:三峡大学,2013.(ZENG Gang. Permeate method of unsaturated soil and seepage parameters inversion[D]. Master Thesis. Yichang: China Three Gorges University, 2013. (in Chinese))
- [3] MIKKELSEN P S, HÄFLIGER M, OCHS M, et al. Pollution of soil and groundwater from infiltration of highly contaminated stormwater—a case study[J]. *Water Science and Technology*, 1997, 36(8/9): 325-330.
- [4] PAVCHICH M P, STUL'KEVICH A V. Piezometric observations and the determination of integral parameters for local and general infiltration in a dam-base system[J]. *Power Technology and Engineering*, 2001, 35(9): 486-490.
- [5] MASSELINK G, RUSSELL P. Flow velocities, sediment transport and morphological change in the swash zone of two contrasting beaches[J]. *Marine Geology*, 2006, 227(3/4): 227-240.
- [6] ANDO Y, SUDA K, KONISHI S, et al. Rigid plastic FE slope stability analysis combined with rain fall water infiltration[J]. *Japanese Geotechnical Society Special Publication*, 2015, 1(3): 23-28.
- [7] ZENG Xubin, DECKER M. Improving the numerical solution of soil moisture-based Richards equation for land models with a deep or shallow water table[J]. *Journal of Hydrometeorology*, 2010, 10(1): 308-319.
- [8] RICHARDS L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. *Journal of Applied Physics*, 1931, 1(5): 318-333.
- [9] PACHEPSKY Y, TIMLIN D, RAWLS W. Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils[J]. *Journal of Hydrology*, 2003, 272(1/4): 3-13.
- [10] FILIPOVITCH N, HILL K M, LONGJAS A, et al. Infiltration experiments demonstrate an explicit connection between heterogeneity and anomalous diffusion behavior[J]. *Water Resources Research*, 2016, 52(7): 5167-5178.
- [11] GEROLYMATOU E, VARDOULAKIS I, HILFER R. Modelling infiltration by means of a nonlinear fractional diffusion model[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2006, 39(18): 4104-4110.
- [12] ABD E G E A, MILCZAREK J J. Neutron radiography study of water absorption in porous building materials: anomalous diffusion analysis[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2004, 37(16): 2305-2313.
- [13] SUN Hongguang, MEERSCHAERT M M, ZHANG Yong, et al. A fractal Richards' equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media[J]. *Advances in Water Resources*, 2013, 52(4): 292-295.
- [14] MISHRA S K, SINGH V P. *Soil Conservation Service Curve Number (SCS-CN) Methodology*

- [M]. Netherlands: Springer, 2003.
- [15] ZHAO Renjun. The Xinjiang model applied in China[J]. *Journal of Hydrology*, 1992, **135** (1/4): 371-381.
- [16] HOOSHYAR M, WANG Dingbao. An analytical solution of Richards' equation providing the physical basis of SCS curve number method and its proportionality relationship[J]. *Water Resources Research*, 2016, **52**(8): 6611-6620.
- [17] CHEN W. Time-space fabric underlying anomalous diffusion[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, **28**(4): 923-929.

## Soil Infiltration Rates and Hydrology Model Classifications Based on the Hausdorff Fractal Derivative Richards Equation

CHEN Wen, LIANG Yingjie, YANG Xu

(State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering  
(Hohai University), Nanjing 210098, P.R.China;

Institute of Soft Matter Mechanics, College of Mechanics and Materials,  
Hohai University, Nanjing 211100, P.R.China)

(Contributed by CHEN Wen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The time-dependent soil infiltration rate was derived based on the Hausdorff fractal derivative Richards equation. This model requires only 2 parameters, among which the Hausdorff derivative order characterizes the underlying water transport environment property in heterogeneous soil, while the pore size distribution index categorizes different hydrological models. Two applications show that a fractal order  $\alpha \neq 1$  of the Hausdorff derivative indicates the history-dependent process. Namely, a lower  $\alpha$  exhibits slower decay of the infiltration rate with time evolution, reflecting stronger memory and further departure from the classical integer-order models. It is also observed that a smaller pore size distribution index indicates slower decay of the infiltration rate, making a fundamental index of soil infiltration.

**Key words:** Hausdorff fractal derivative; Richards equation; anomalous infiltration; soil infiltration rate; soil conservation service curve number method

---

引用本文/Cite this paper:

陈文, 梁英杰, 杨旭. 基于 Hausdorff 分形导数 Richards 方程的土壤入渗率和水文模型类型[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 77-82.

CHEN Wen, LIANG Yingjie, YANG Xu. Soil infiltration rates and hydrology model classifications based on the Hausdorff fractal derivative Richards equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 77-82.