

基于激励滑模控制的分数阶神经网络的 修正投影同步研究*

张平奎¹, 杨绪君²

(1. 重庆幼儿师范高等专科学校 继续教育学院, 重庆 404047;
2. 西南大学 电子信息工程学院, 重庆 400715)

摘要: 研究了分数阶神经网络的修正投影同步问题.首先通过选取合适的激励控制器来辅助设计滑模控制器,然后通过设计选取了合适的切换平面和有效的趋近率,并根据滑模控制理论和分数阶微分方程的基本理论,建立了使驱动系统和响应系统实现修正投影同步的激励滑模控制器.最后,通过数值仿真实例,验证了所得结果的有效性和可行性.

关键词: 分数阶神经网络; 修正投影同步; 激励控制; 滑模控制

中图分类号: O175.13

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380098

引 言

分数阶微积分(fractional calculus)作为微积分的一个分支,是普通的整数阶微分与积分向任意实数阶微分与积分的推广.与传统的整数阶模型相比,分数阶微分模型提供了一种能够描述实际材料与过程中内在记忆与遗传特性的有效工具^[1-2].现今,分数阶动力系统已在电解质极化、黏弹性系统、电磁波、系统控制、医学等领域中得到广泛应用.

近年来,分数阶神经网络的动力学行为迅速发展成热点课题.许多学者在神经网络模型中引入分数阶导数算子,研究了分数阶神经网络的稳定性、同步性、耗散性等问题^[3-8].在文献[3]中,作者用 Caputo 微分算子的分形元件代替原有的电容,提出了分数阶 Hopfield 神经网络模型,并分析了模型的稳定性.在文献[5]中,作者讨论了环型结构和中心结构的分数阶神经网络模型,研究了模型的稳定性,并讨论了模型的分岔和混沌现象,建立了分岔条件.在文献[7]中,作者通过建立一个分数阶微分不等式,研究了一类分数阶神经网络的 α -稳定性和 α -同步性,并构建了几个判定网络模型的 α -稳定性和 α -同步性的充分性判据.众所周知,分数阶神经网络的同步性分析与控制在通信和信号处理、非线性系统辨识、航天飞行器控制、图像数据加密等领域展现了巨大的应用潜力.因此,许多研究论文着力于研究分数阶神经网络的同步性分析与控制器设计^[9-15].在文献[9]中,作者通过运用 Lyapunov 直接方法,建立了分数阶忆阻神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性和同步性判据.在文献[10]中,通过运用自适应控制理论和反馈

* 收稿日期: 2017-04-13; 修订日期: 2017-06-28

基金项目: 国家自然科学基金(11501065)

作者简介: 张平奎(1964—),男(E-mail: sxsfpqc@163.com);

杨绪君(1989—),男,博士生(通讯作者. E-mail: ller2010@163.com).

理论,作者研究了时滞分数阶神经网络的自适应同步性问题.在文献[12]中,作者通过数学分析和不等式技巧的运用,建立了判定分数阶神经网络的投影同步的判据.在文献[15]中,作者根据 Hölder(霍尔德)不等式、Gronwall(格朗沃尔)不等式,运用输出反馈控制策略,研究了时滞分数阶忆阻神经网络的拟一致同步问题.

另一方面,由于滑模变结构控制对系统外加干扰和建模动态等具有很强的鲁棒性和完全的自适应性,以及具有降阶、解耦、响应速度快、动态特性好和容易实现等优点^[16],因此备受专家学者的重视.近年来,一些学者采用滑模控制的方法研究了分数阶混沌系统的同步性问题^[17-24],获得了很多优秀成果.在文献[17-22]中,作者通过不同的技巧设计选取了适当的滑模控制器,研究了一系列分数阶混沌系统的镇定性、同步性、无源性等问题,并通过一些具体的系统诸如分数阶 Chen 系统、分数阶 Lorenz 系统、分数阶 Rössler 系统等仿真验证了控制器的有效性.在文献[23]中,作者运用激励控制理论和滑模控制理论,研究了分数阶非线性混沌系统的修正投影同步问题.并在数值例子中,仿真验证了分数阶 Lorenz 超混沌系统的同步性,并分析了系统的健壮性.在文献[24]中,作者通过设计一个带有分数阶积分项的滑模控制器,建立了判定一类分数阶神经网络投影同步的充分性判据.不同于已有的工作,本文旨在设计适当的激励滑模控制器,研究分数阶神经网络的修正投影同步问题.

1 预备知识

分数阶微积分是整数阶微积分的发展与推广,其定义有多种形式.目前,广泛应用的分数阶定义有 Grünwald-Letnikov 定义、Riemann-Liouville 定义和 Caputo 定义.由于 Caputo 定义的导数具有很好的物理意义,因此,本文采用 Caputo 导数定义.

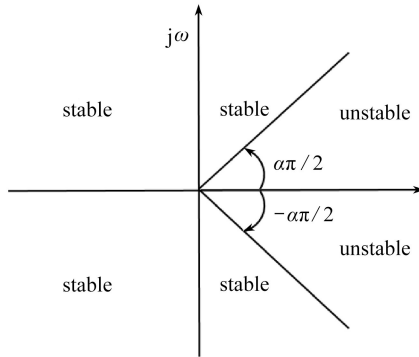


图 1 α 阶分数阶线性系统的稳定区域

Fig. 1 Stability regions of the α order fractional-order nonlinear system

定义 1^[1] 函数 $\mathbf{x}(t) \in C^{m+1}([0, +\infty), \mathbf{R})$ 的 α ($\alpha > 0$) 阶 Caputo 导数的定义为

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = D^{-(m-\alpha)} \mathbf{x}^{(m)}(t),$$

其中, D^α 表示 α 阶导数算子, $m = [\alpha]$, m 是不小于 α 的最小整数. $\mathbf{x}^{(m)}$ 是整数阶意义下的 m 阶导数. $D^{-\alpha}$ 表示 α 阶 Riemann-Liouville 积分算子, 其定义如下:

$$D^{-\beta} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\beta-1)} \mathbf{x}(\tau) d\tau, \quad \beta > 0,$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. 特别地, 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 有 $D^\alpha \mathbf{x}(t) = D^{-(1-\alpha)} \dot{\mathbf{x}}(t)$.

引理 1^[25] 考虑如下分数阶系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

其中, $0 < \alpha < 1, \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{A} \in R^{n \times n}$. 则

- 1) 系统(1)是渐近稳定的, 当且仅当对矩阵 \mathbf{A} 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$ 都成立.
- 2) 系统(1)是稳定的, 当且仅当对矩阵 \mathbf{A} 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda)| \geq \alpha\pi/2$ 都成立.

当 $0 < \alpha < 1$ 时, 稳定区域如图 1 所示.

引理 2^[26] 设 $0 < \alpha < 1, \mathbf{x} \in R^n$, 则对任意时间常数 $t > 0$, 有

$$D^\alpha \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) \leq 2\mathbf{x}^T(t) D^\alpha \mathbf{x}(t).$$

2 模型描述

为了研究修正投影同步问题, 驱动系统定义为如下分数阶神经网络模型:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{J}, \tag{2}$$

其中, $0 < \alpha < 1, \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n, x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态; $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ($a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$) 是衰减系数矩阵; $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ 是连接权矩阵; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T, f_i(x_i)$ 表示第 i 个神经元的激活函数; $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T$ 是外部输入向量.

相应的响应系统设计为

$$D^\alpha \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{y}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{H} + \mathbf{u}(t), \tag{3}$$

其中, $\mathbf{y}(t) \in R^n$ 是响应系统的状态向量, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ 是需要设计的控制器.

现在, 定义误差向量为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}\mathbf{x}(t), \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ($\eta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$) 表示缩放矩阵.

那么, 由系统(2)和系统(3), 可得同步误差系统为

$$D^\alpha \mathbf{e}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{e}(t) - (\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\mathbf{A})\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\eta}\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{H} - \boldsymbol{\eta}\mathbf{J} + \mathbf{u}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{e}(t) + \mathbf{F} + \mathbf{u}(t), \tag{5}$$

其中

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\mathbf{A})\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\eta}\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{H} - \boldsymbol{\eta}\mathbf{J}.$$

定义 2 如果存在缩放矩阵 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ($\eta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$) 使得驱动系统(2)和响应系统(3)的任意解 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}\mathbf{x}(t)\| = 0 \tag{6}$$

成立, 则称驱动系统(2)和响应系统(3)可实现全局渐进修正投影同步. 其中, $\|\cdot\|$ 表示向量的 Euclid 范数.

注 1 完全同步、反同步和投影同步均是修正投影同步的特殊情况.

注 2 当 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ 时, 驱动系统(2)和响应系统(3)可实现全局渐进完全修正投影同步; 当 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1)$ 时, 驱动系统(2)和响应系统(3)可实现全局渐进完全修正投影反同步; 当 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(0, 0, \dots, 0)$ 时, 响应系统(3)是全局渐进稳定的.

3 激励滑模控制器设计

滑模控制研究的主要思想是设计适当的切换函数和变结构控制率, 使系统的状态轨线在有限的时间内到达所设计的切换平面, 实现滑动模态运动, 保证滑模运动渐进稳定并具有良好的动态特性. 接下来, 通过两个基本步骤来设计激励滑模控制器: (a) 选取一个合适的激励

控制器帮助设计滑模控制器; (b) 建立一个滑模控制器实现系统(2)和系统(3)的修正投影同步。

为了估计误差动力的非线性部分, 设 $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) - \mathbf{F}$, 则误差系统(5)可写为

$$D^\alpha \mathbf{e}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{e}(t) + \boldsymbol{\psi}(t). \quad (7)$$

根据激励控制设计理论, 控制准则可设计为

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{K}\mathbf{v}(t), \quad (8)$$

其中, $\mathbf{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T$ 是常值增益, $\mathbf{v}(t) \in R^n$ 是满足如下条件的控制输入向量:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}^+(t), & S(\mathbf{e}) \geq 0, \\ \mathbf{v}^-(t), & S(\mathbf{e}) < 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $S(\mathbf{e}) = S(\mathbf{e}(t))$ 是切换平面. 于是, 误差系统为

$$D^\alpha \mathbf{e}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{e}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t). \quad (10)$$

本文设计如下滑模平面:

$$S(\mathbf{e}) = \mathbf{P}\mathbf{e}(t), \quad (11)$$

其中 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

根据滑模控制理论, 当系统(10)进行滑模运动时, 切换平面和导数须满足如下条件:

$$S(\mathbf{e}) = 0, \quad \dot{S}(\mathbf{e}) = 0. \quad (12)$$

滑模控制系统的运动由两部分组成, 第一部分是系统在初始点进入切换平面的运动阶段, 即到达段; 第二部分是系统在切换平面上的运动阶段, 即滑模段. 要想使系统过渡过程有良好的品质, 就必须使这两个阶段都具有良好的品质. 为了改善到达段的品质, 可以通过设计趋近率来实现. 为了使系统(10)的状态轨线良好地滑动到切换平面, 本文选取如下等速趋近率:

$$D^\alpha S(\mathbf{e}) = -\lambda \operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})) - \mu S(\mathbf{e}), \quad (13)$$

其中, $\lambda > 0, \mu > 0$, 且

$$\operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})) = \begin{cases} -1, & S(\mathbf{e}) < 0, \\ 0, & S(\mathbf{e}) = 0, \\ 1, & S(\mathbf{e}) > 0. \end{cases}$$

由 Caputo 分数阶导数的性质可得, $\dot{S}(\mathbf{e}) = D^{1-\alpha} D^\alpha S(\mathbf{e})$, 也就是说 $\dot{S}(\mathbf{e}) = 0$ 等价于 $D^\alpha S(\mathbf{e}) = 0$. 于是, 由式(10)~(12), 有

$$\begin{aligned} D^\alpha S(\mathbf{e}) &= \mathbf{P}D^\alpha \mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(-\mathbf{C}\mathbf{e}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t)) = \\ &= -\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{e}(t) + \mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{v}(t) = -\lambda \operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})) - \mu \mathbf{P}\mathbf{e}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

即

$$\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{v}(t) = (\mathbf{P}\mathbf{C} - \mu \mathbf{P}\mathbf{I})\mathbf{e}(t) - \lambda \operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})), \quad (15)$$

其中, \mathbf{I} 是合适维的单位矩阵. 于是, 控制输入向量为

$$\mathbf{v}(t) = (\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{C} - \mu \mathbf{P}\mathbf{I})\mathbf{e}(t) - (\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}\lambda \operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})), \quad (16)$$

激励控制准则为

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{C} - \mu \mathbf{P}\mathbf{I})\mathbf{e}(t) - \mathbf{K}(\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}\lambda \operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})), \quad (17)$$

需要设计的控制器为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \boldsymbol{\psi}(t) - \mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{C} - \mu \mathbf{P}\mathbf{I})\mathbf{e}(t) - \mathbf{K}(\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}\lambda \operatorname{sgn}(S(\mathbf{e})) - \\ &= (\boldsymbol{\eta}\mathbf{A} - \mathbf{C}\boldsymbol{\eta})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{H} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (18)$$

4 稳定性分析

定理 1 给定常数 $\varepsilon > 0$, 如果存在适当的向量 \mathbf{P} 和 \mathbf{K} 使得

$$P^T P (-C + K(PK)^{-1}(PC - \mu PI)) - \varepsilon \frac{P^T P P^T P}{4} \leq 0, \tag{19}$$

$$|\arg(\text{eig}(K(PK)^{-1}(PC - \mu PI) - C))| > \alpha\pi/2 \tag{20}$$

成立,则驱动系统(2)和响应系统(3)可以实现修正投影同步.

证明 首先,为了检验可达性,选取如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} S^T(e)S(e).$$

根据引理 2,可得

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) &\leq S^T(e)D^\alpha S(e) = \\ &e^T(t)P^T P D^\alpha e(t) = e^T(t)P^T P (-Ce(t) + Kv(t)) = \\ &e^T(t)P^T P (-Ce(t) + K(PK)^{-1}(PC - \mu PI)e(t) - K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e))) = \\ &e^T(t)P^T P (-C + K(PK)^{-1}(PC - \mu PI))e(t) - \\ &e^T(t)P^T PK(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e)). \end{aligned} \tag{21}$$

为了方便起见,设 $K(t) = K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e))$, 则

$$\begin{aligned} e^T(t)P^T PK(t) &= \left(\frac{P^T P}{2} e(t)\right)^T K(t) + K^T(t) \frac{P^T P}{2} e(t) \leq \\ &\varepsilon e^T(t) \frac{P^T P P^T P}{2} e(t) + \frac{1}{\varepsilon} K^T(t)K(t). \end{aligned} \tag{22}$$

于是,由式(21)和(22)可得

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) &\leq e^T(t)P^T P (-C + K(PK)^{-1}(PC - \mu PI))e(t) - \\ &\varepsilon e^T(t) \frac{P^T P P^T P}{2} e(t) - \frac{1}{\varepsilon} K^T(t)K(t) = \\ &e^T(t) \left(P^T P (-C + K(PK)^{-1}(PC - \mu PI)) - \varepsilon \frac{P^T P P^T P}{4} \right) e(t) - \\ &\frac{1}{\varepsilon} K^T(t)K(t) < 0, \end{aligned} \tag{23}$$

因此,滑模运动可以实现.

接下来分析稳定性.

将式(17)代入式(7)可得如下误差动力系统:

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= -Ce(t) + K(PK)^{-1}(PC - \mu PI)e(t) - K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e)) = \\ &(K(PK)^{-1}(PC - \mu PI) - C)e(t) - K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e)). \end{aligned} \tag{24}$$

当 $S(e) > 0$ 时,

$$-K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e)) = -\lambda K(PK)^{-1};$$

当 $S(e) < 0$ 时,

$$-K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e)) = \lambda K(PK)^{-1}.$$

即 $-K(PK)^{-1}\lambda \text{sgn}(S(e))$ 是线性系统(24)的有界输入.则误差动力系统(24)的渐近稳定性质和如下系统的渐近稳定性质等价:

$$D^\alpha e(t) = (K(PK)^{-1}(PC - \mu PI) - C)e(t). \tag{25}$$

根据引理 1, 误差动力系统(25)是渐近稳定的充分必要条件是

$$|\arg(\text{eig}(K(PK)^{-1}(PC - \mu PI) - C))| > \alpha\pi/2. \tag{26}$$

综上,给定常数 $\varepsilon > 0$,只要选取适当的向量 \mathbf{P} 和 \mathbf{K} 使得条件(19)和(20)成立,即可以实现驱动系统(2)和响应系统(3)的修正投影同步.证毕.

5 数值例子

接下来通过预估-校正算法^[27]的思想,设计两个数值仿真例子来验证所得结果的有效性.

例 1 对于驱动系统设计如下:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{J}, \quad (27)$$

其中

$$\alpha = 0.95, \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \tanh(\mathbf{x}(t)), \mathbf{J} = (0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2.2 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 1.5 & 1.2 \\ -4.5 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

相应的响应系统设计为

$$D^\alpha \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{y}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{H} + \mathbf{u}(t), \quad (28)$$

其中

$$\alpha = 0.95, \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) = \sin(\mathbf{y}(t)), \mathbf{H} = (0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.4 & -1.6 & -0.6 \\ 1.4 & -2.4 & 2.4 \\ 3.4 & -2.6 & 2.4 \end{bmatrix}.$$

控制参数 \mathbf{P} 和 \mathbf{K} 分别取为 $\mathbf{P} = [1 \ 1 \ 2]$, $\mathbf{K} = [-1 \ 2 \ 1]^T$.取 $\lambda = 0.2, \mu = 5, \varepsilon = 1$,容易验证条件(19)和(20)成立.因此,根据定理 1 可知,驱动系统(27)和响应系统(28)可实现修正投影同步.数值仿真选取如下初始值条件:

$$(x_{10}, x_{20}, x_{30})^T = (-0.2, 0.4, -0.6)^T,$$

$$(y_{10}, y_{20}, y_{30})^T = (0.4, -1.2, 1.6)^T.$$

当 $\boldsymbol{\eta}$ 的取值为 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(1, 1, 1)$ 时,图 2~图 4 给出了系统(27)和(28)的状态的相图和时间响应曲线,图 5 给出了误差系统的状态的时间响应曲线.

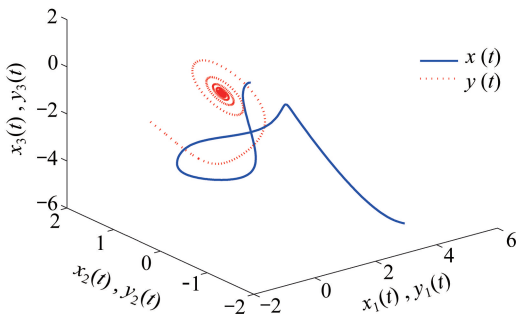


图 2 未施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态相图

Fig. 2 Phase diagrams of drive system (27) and response system (28) without control

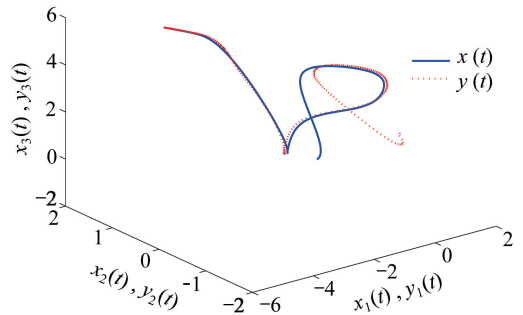


图 3 施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态相图

Fig. 3 Phase diagrams of drive system (27) and response system (28) with control

当 $\boldsymbol{\eta}$ 的取值为 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, -1, -1)$ 时,图 6、图 7 给出了系统(27)和(28)的状态的相图和时间响应曲线,图 8 给出了误差系统的状态的时间响应曲线.

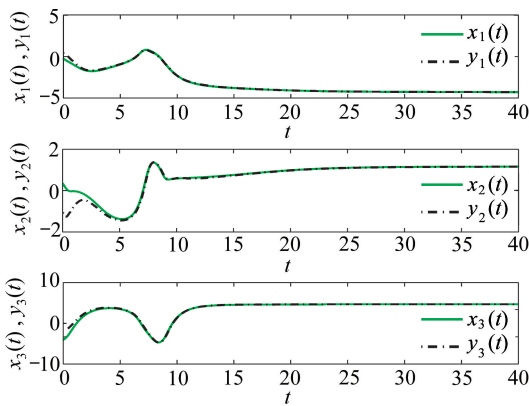


图4 施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态响应轨线

Fig. 4 Time responses of drive system (27) and response system (28) with control

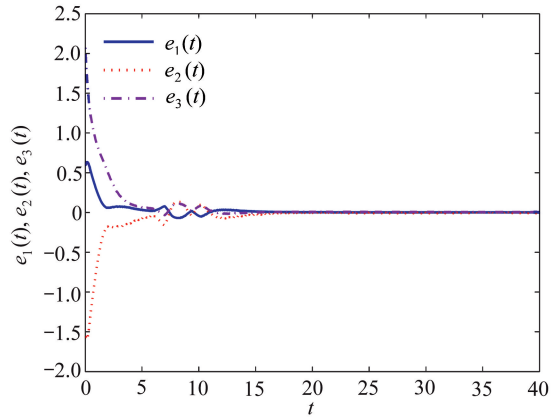


图5 误差系统的状态响应轨线

Fig. 5 Time responses of the error system

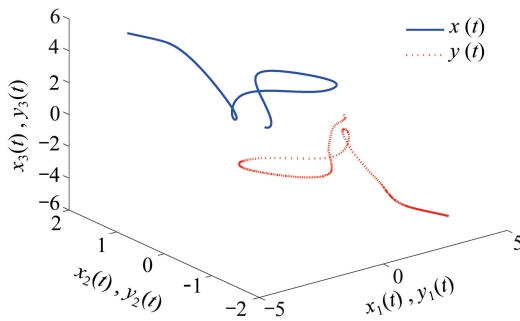


图6 施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态相图

Fig. 6 Phase diagrams of drive system (27) and response system (28) with control

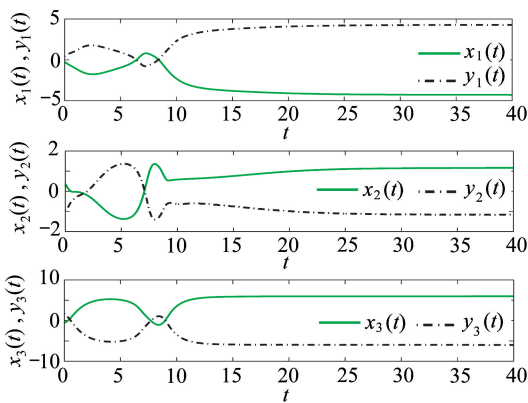


图7 施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态响应轨线

Fig. 7 Time responses of drive system (27) and response system (28) with control

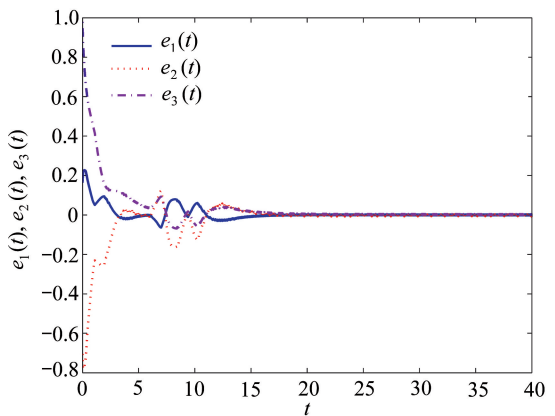


图8 误差系统的状态响应轨线

Fig. 8 Time responses of the error system

当 η 的取值为 $\eta = \text{diag}(2, 2, 2)$ 时,图9给出了系统(27)和(28)的状态的相图,图10给

出了误差系统的状态的时间响应曲线。

当 $\boldsymbol{\eta}$ 的取值为 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-2, -2, -2)$ 时,图 11 给出了系统(27)和(28)的状态的相图,图 12 给出了误差系统的状态的时间响应曲线。

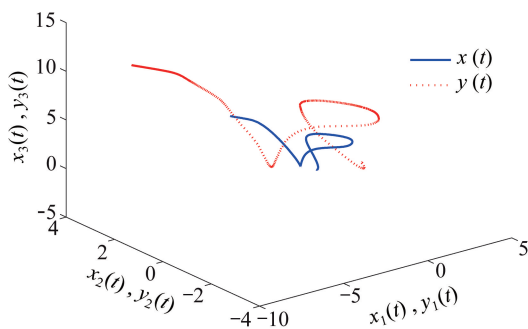


图 9 施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态相图

Fig. 9 Phase diagrams of drive system (27) and response system (28) with control

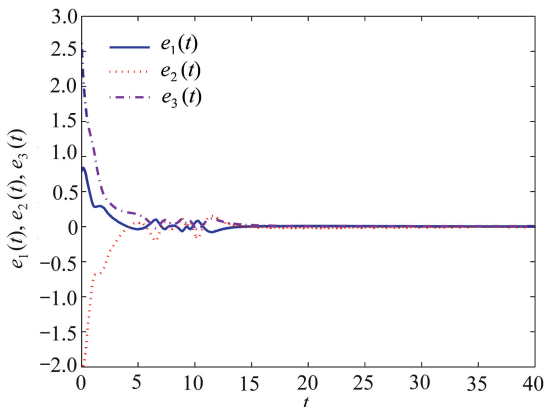


图 10 误差系统的状态响应曲线

Fig. 10 Time responses of the error system

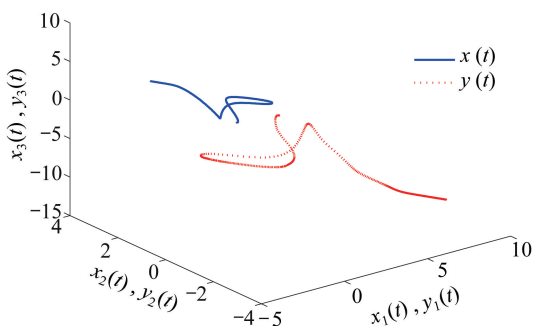


图 11 施加控制时,驱动系统(27)和响应系统(28)的状态相图

Fig. 11 Phase diagrams of drive system (27) and response system (28) with control

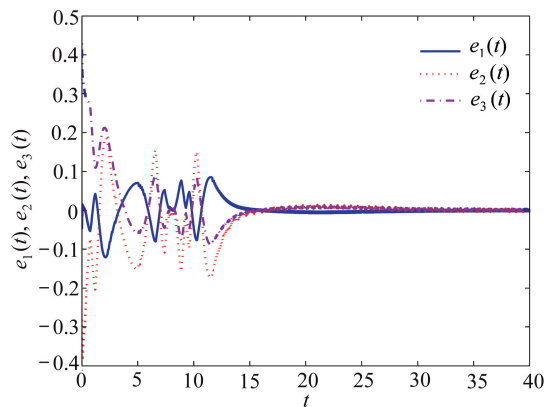


图 12 误差系统的状态响应曲线

Fig. 12 Time responses of the error system

例 2 对于驱动系统设计如下:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{J}, \quad (29)$$

其中

$$\alpha = 0.98, \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \tanh(\mathbf{x}(t)), \mathbf{J} = (0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4.5 & 3 & 2.2 \\ -1.5 & 2.2 & 1.2 \\ -4 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

相应的响应系统设计为

$$D^\alpha \mathbf{y}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{y}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{H} + \mathbf{u}(t), \quad (30)$$

其中

$$\alpha = 0.98, \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) = \sin(\mathbf{y}(t)), \mathbf{H} = (0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1.5 & -0.8 \\ 1.5 & -1.6 & 1.4 \\ 3 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

控制参数 \mathbf{P} 和 \mathbf{K} 分别取为 $\mathbf{P} = [1 \ 1 \ 2], \mathbf{K} = [-2 \ 1 \ 2]^T$. 取 $\lambda = 0.05, \mu = 5, \varepsilon = 1$, 容易验证条件(29)和(30)成立. 因此, 根据定理 1 可知, 驱动系统(29)和响应系统(30)可实现修正投影同步. 数值仿真选取如下初始值条件:

$$(x_{10}, x_{20}, x_{30})^T = (0.5, -0.8, 1.8)^T,$$

$$(y_{10}, y_{20}, y_{30})^T = (-0.5, 1.5, -2.5)^T.$$

当 $\boldsymbol{\eta}$ 的取值为 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(1, 1, 1)$ 时, 图 13~图 15 给出了系统(29)和(30)的状态的相图和时间响应曲线.

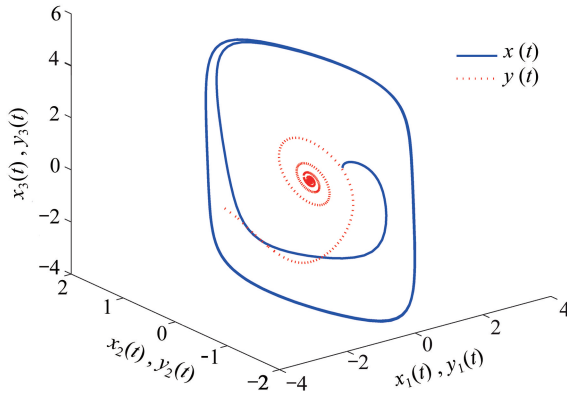


图 13 未施加控制时, 驱动系统(29)和响应系统(30)的状态相图

Fig. 13 Phase diagrams of drive system (29) and response system (30) without control

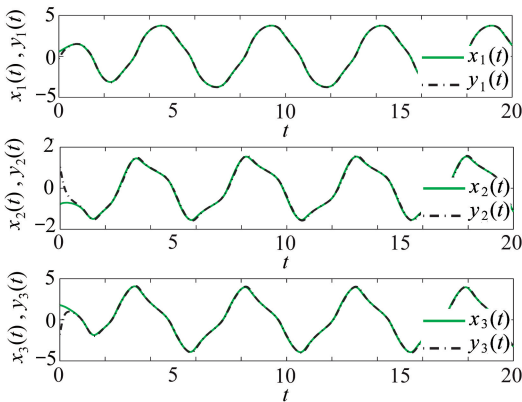


图 14 施加控制时, 驱动系统(29)和响应系统(30)的状态响应曲线

Fig. 14 Time responses drive system (29) and response system (30) with control

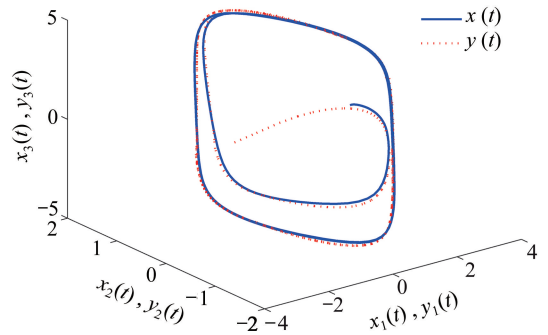


图 15 施加控制时, 驱动系统(29)和响应系统(30)的状态相图

Fig. 15 Phase diagrams of drive system (29) and response system (30) with control

当 $\boldsymbol{\eta}$ 的取值为 $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-3, -3, -3)$ 时, 图 16 给出了系统(29)和(30)的状态的相图.

当 η 的取值为 $\eta = \text{diag}(4, 4, 4)$ 时, 图 17 给出了系统 (29) 和 (30) 的状态的相图。

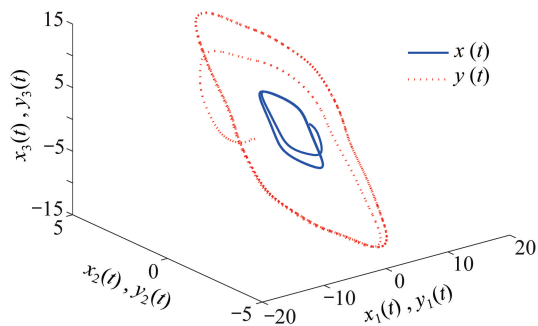


图 16 施加控制时, 驱动系统 (29) 和响应系统 (30) 的状态相图,
 $\eta = \text{diag}(-3, -3, -3)$

Fig. 16 Phase diagrams of drive system (29) and response system (30) with control,
 $\eta = \text{diag}(-3, -3, -3)$

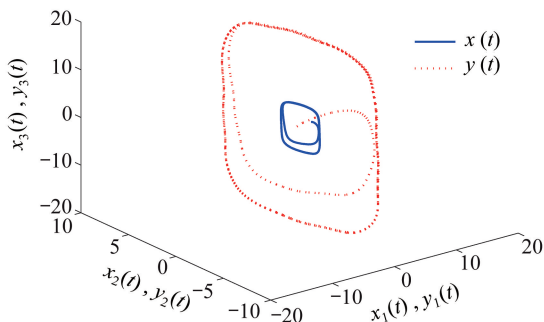


图 17 施加控制时, 驱动系统 (29) 和响应系统 (30) 的状态相图,
 $\eta = \text{diag}(4, 4, 4)$

Fig. 17 Phase diagrams of drive system (29) and response system (30) with control,
 $\eta = \text{diag}(4, 4, 4)$

6 结 论

本文基于激励控制理论、滑模控制理论和分数阶微分方程基本理论, 设计了合适的激励滑模控制器, 研究了分数阶神经网络的修正投影同步, 建立了判定驱动-响应误差系统稳定性判据. 最后, 通过数值例子仿真验证了所得结果的有效性. 众所周知, 在实际应用中, 时滞、扰动等广泛存在于非线性系统应用领域中, 而研究带有时滞、扰动等因素的分数阶非线性系统的滑模控制是一项具有挑战性的工作. 因此, 在将来的研究工作中, 笔者将进一步拓展研究模型, 针对带有时滞和参数不确定性的分数阶神经网络的滑模控制进行深入的研究。

参考文献 (References):

- [1] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [2] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [3] BORROOMAND A, MENHAJ M B. Fractional-order Hopfield neural networks [C] // *International Conference on Neural Information Processing*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
- [4] YANG Xujun, LI Chuandong, SONG Qiankun, et al. Mittag-Leffler stability analysis on variable-time impulsive fractional-order neural networks [J]. *Neurocomputing*, 2016, **207**: 276-286.
- [5] KASLIK E, SIVASUNDARAM S. Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order neural networks [J]. *Neural Networks*, 2012, **32**: 245-256.
- [6] YANG Xujun, SONG Qiankun, LIU Yurong, et al. Finite-time stability analysis of fractional-order neural networks with delay [J]. *Neurocomputing*, 2015, **152**: 19-26.
- [7] YU Juan, HU Cheng, JIANG Haijun. α -stability and α -synchronization for fractional-order neural networks [J]. *Neural Networks*, 2012, **35**: 82-87.
- [8] YANG Xujun, LI Chuandong, HUANG Tingwen, et al. Mittag-Leffler stability analysis of nonlinear fractional-order systems with impulses [J]. *Applied Mathematics and Computation*,

- 2017, **293**: 416-422.
- [9] CHEN Jiejie, ZENG Zhigang, JIANG Ping. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2014, **51**: 1-8.
- [10] BAO Haibo, PARK J, CAO Jinde. Adaptive synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delay[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **82**: 1343-1354.
- [11] CHEN Liping, WU Ranchao, CAO Jinde, et al. Stability and synchronization of memristor-based fractional-order delayed neural networks[J]. *Neural Networks*, 2015, **71**: 37-44.
- [12] BAO Haibo, CAO Jinde. Projective synchronization of fractional-order memristor-based neural networks[J]. *Neural Networks*, 2015, **63**: 1-9.
- [13] 王利敏, 宋乾坤, 赵振江. 基于忆阻的分数阶时滞复值神经网络的全局渐近稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(3): 333-346. (WANG Limin, SONG Qiankun, ZHAO Zhenjiang. Global asymptotic stability of memristor-based fractional-order complex-valued neural networks with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(3): 333-346. (in Chinese))
- [14] YANG Xujun, LI Chuandong, HUANG Tingwen, et al. Mittag-Leffler stability analysis of nonlinear fractional-order systems with impulses[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **293**: 416-422.
- [15] YANG Xujun, LI Chuandong, HUANG Tingwen, et al. Quasi-uniform synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with delay[J]. *Neurocomputing*, 2017, **234**: 205-215.
- [16] 陈志梅, 王贞艳, 张井刚. 滑模变结构控制理论及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2012. (CHEN Zhimei, WANG Zhenyan, ZHANG Jinggang. *Sliding Mode Variable Structure Control Theory and Application*[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2012. (in Chinese))
- [17] TAVAZOEI M S, HAERI M. Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2008, **387**(1): 57-70.
- [18] YANG Ningning, LIU Chongxin. A novel fractional-order hyperchaotic system stabilization via fractional sliding-mode control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **74**(3): 721-732.
- [19] YIN Chun, ZHONG Shouming, CHEN Wufan. Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, **17**(1): 356-366.
- [20] CHEN Diyi, ZHANG Runfan, SPROTT J C, et al. Synchronization between integer-order chaotic systems and a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode control[J]. *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, **22**(2): 023130.
- [21] DADRAS S, MOMENI H R. Passivity-based fractional-order integral sliding-mode control design for uncertain fractional-order nonlinear systems[J]. *Mechatronics*, 2013, **23**(7): 880-887.
- [22] AGHABABA M P. Design of hierarchical terminal sliding mode control scheme for fractional-order systems[J]. *IET Science, Measurement & Technology*, 2014, **9**(1): 122-133.
- [23] WANG Xingyuan, ZHANG Xiaopeng, MA Chao. Modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems via active sliding mode control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **69**(1/2): 511-517.
- [24] DING Zhixia, SHEN Yi. Projective synchronization of nonidentical fractional-order neural networks based on sliding mode controller[J]. *Neural Networks*, 2016, **76**: 97-105.

- [25] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[C]//*Computational Engineering in Systems Applications*. Lille, France, 1996, **2**: 963-968.
- [26] AGUILA-CAMACHO N, DUARTE-MERMOUD M A, GALLEGOS J A. Lyapunov functions for fractional order systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, **19**(9): 2951-2957.
- [27] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, **29**(1/4): 3-22.

Modified Projective Synchronization of a Class of Fractional-Order Neural Networks Based on Active Sliding Mode Control

ZHANG Pingkui¹, YANG Xujun²

(1. *Institute of Continuing Education, Chongqing Preschool Education College, Chongqing 404047, P.R.China;*

2. *College of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, P.R.China*)

Abstract: The modified projective synchronization of a class of fractional-order neural networks was studied. An appropriate active controller was firstly selected to facilitate the design of the sliding mode controller. Afterwards, a suitable switching plane and 2 effective reaching laws were defined and several criteria were established to ensure the synchronization of the drive-response systems based on the sliding mode control theory and the theory of fractional differential equations. Numerical examples verify the validity and feasibility of the theoretical results.

Key words: fractional-order neural network; modified projective synchronization; active control; sliding mode control

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11501065)

引用本文/Cite this paper:

张平奎, 杨绪君. 基于激励滑模控制的分数阶神经网络的修正投影同步研究[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(3): 343-354.

ZHANG Pingkui, YANG Xujun. Modified projective synchronization of a class of fractional-order neural networks based on active sliding mode control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 343-354.