

Duffing 系统在双参数平面上的分岔演化过程*

张艳龙¹, 王 丽², 石建飞¹

(1. 兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070;
2. 兰州城市学院 数学学院, 兰州 730070)

摘要: 给出了参数空间上最大 Lyapunov 指数的计算方法,数值计算了 Duffing 系统在双参数平面上的最大 Lyapunov 指数.结合单参数最大 Lyapunov 指数、分岔图、相图以及时间历程图,讨论了 Duffing 系统在双参数平面上的分岔以及随系统控制参数变化的分岔演化过程.结果发现在双参数平面上系统发生叉式分岔,出现具有缺边现象的两个不同区域,该区域内系统对初值有较强的敏感性,存在两吸引子共存现象;系统运动经过周期跳跃曲线时振动幅值突然减小;系统外激励频率较小时常引起颤振运动.此外,在两个具有缺边现象的区域内,随刚度系数的不断增加,系统出现了倍周期分岔曲线环,而且倍周期分岔曲线环内不断嵌套新的倍周期分岔曲线环,导致系统最终经倍周期分岔序列进入混沌状态,随着控制参数的变化,系统在双参数平面上的动力学特性变得非常复杂.

关键词: Duffing 系统; Lyapunov 指数; 双参数特性; 分岔; 周期跳跃

中图分类号: O322; O241.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.380089

引 言

非线性动力学系统随系统参数的变化而出现分岔和混沌是非常普遍的现象^[1-3].部分学者运用不同的方法对不同系统进行了双参数特性分析,研究系统随双参数变化时的分岔特性,如:文献[4]对两自由度碰撞振动系统的多参数分岔以及各参数之间的匹配律进行了研究,得到系统在参数平面上的各种分岔曲线以及不同类型周期运动的参数区域;文献[5]分析了单自由度齿轮系统在双参数平面上的分岔与混沌行为,得到了系统在参数平面上各种周期运动以及混沌运动的参数区域;文献[6]对耦合发电机系统的分岔和双参数特性进行了研究,发现不同控制参数对系统动力学行为的影响特性有所差异;文献[7-8]对多参数非常规分岔以及多参数分岔的分形结构进行了一定的研究,发现随机脉冲信号集合的两个特征参数之间存在非线性变换关系,即随机信号的双参数统计分布具有非整数维分形特征;文献[9-10]利用特征值理论研究系统在双参数平面上的分岔,得到系统在参数平面上的各种分岔曲线.对于 Duffing 系统,大多学者研究系统随单参数变化时的分岔(包括随机分岔)与混沌过程^[11-16],由于多参数系统在实际振动过程中其运动特性不可能只受单参数的影响,而是各参数同时变化相互匹配的结果,从而得到 Duffing 系统在参数大范围变化时的动力学特性以及参数匹配对系统动力

* 收稿日期: 2017-04-07; 修订日期: 2017-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(11302092; 11362008)

作者简介: 张艳龙(1981—),男,副教授,博士生,硕士生导师(E-mail: zhangyl@mail.lzjtu.cn);
王丽(1979—),女,副教授,硕士(通讯作者. E-mail: wangl@lzcw.edu.cn).

学特性的影响,但目前对于参数空间系统最大 Lyapunov 指数(top Lyapunov exponent, TLE, 其值的大小用变量 L_{TLE} 表示)的计算鲜有文献报道.本文以含阻尼 Duffing 振子强迫振动系统为模型,数值计算 Duffing 系统在双参数平面 ω - a_1 上 TLE 的分布特性,得到系统在双参数平面上的各种分岔曲线,并结合系统单参数分岔图、相图和时间历程图等研究系统在双参数平面上的分岔混沌过程以及各参数之间的匹配对系统双参数分岔的影响,并通过改变系统参数来控制系统的动力学特性.

1 参数空间 TLE 计算

参数空间 TLE 计算的基本思想是将参数空间离散而建立胞空间,计算每一个胞所对应的 TLE.

由微分方程控制的系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad (t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m), \quad (1)$$

式中, \mathbf{x} 为状态向量, $\boldsymbol{\mu}$ 为参数向量.

在 M 维参数空间 \mathbf{R}^m 中,对系统(1),将各坐标轴 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 分别等分成间距为 h_i 的很多小段,坐标轴 i 的每一小段用整数 z_i 表示,在一定范围内参数空间就被划分为一系列的在 i 方向边长为 h_i 的 M 维长方体,每个长方体称为一个胞,用 M 维胞矢量 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_M)$ 来表征.对于给定的胞 $\mathbf{z}(n)$,一般采用中心点法,即找出其中心点 $\boldsymbol{\mu}^d(n)$,用该中心点代替整个胞的特性来参与计算,其中

$$\mu_i^d(n) = h_i z_i(n), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

$$h_i = (\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}) / N_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

式中 N_i, h_i 分别表示 μ_i 对应离散胞个数和胞的宽度; $\mu_i^{\max}, \mu_i^{\min}$ 分别表示研究区域内 μ_i 的最大、最小值.

参数空间离散为胞空间后,以每一个胞的中心点 $\boldsymbol{\mu}^d(n)$ 为参数值,利用单参数 TLE 算法计算每一个胞所对应的 TLE,得到系统在整个参数空间的 TLE 分布特性.在计算过程中,对于 TLE 等于零的分岔点来说,由于数值计算精度,其 TLE 不可能完全等于零,故采用变步长思想和逐步逼近方法计算系统在参数空间分岔点所对应的分岔胞.

本文以周期激励 Duffing 系统为模型,选用二维参数平面,即 $\boldsymbol{\mu}$ 为二维参数向量,参数平面被分成 $1\,000 \times 1\,000$ 个胞,计算精度设定为 10^{-6} ,利用变步长 Runge-Kutta 法对上述算法编写 C 语言程序并计算,对于计算得到的数据用 MATLAB、GRAPHER 等软件出图,得到 Duffing 系统在双参数平面上的分岔特性.当 $\boldsymbol{\mu}$ 为多维参数向量时,该方法同样适用.

2 系统在双参数平面上的分岔特性

研究如下 Duffing 方程:

$$\ddot{x} + a\dot{x} - bx + cx^3 = a_1 \cos(\omega t + \tau), \quad (4)$$

式中无量纲参数 a 为阻尼系数, b 为刚度系数, c 为非线性项系数, a_1 为外激励幅值, ω 为外激励角频率, τ 为初相位.为了分析系统动力学行为与系统参数之间的匹配规律、参数平面上系统的特殊分岔现象以及分岔曲线的演变过程,选取系统参数 $a = 0.5, b = 0.05, c = 0.5$, 令 a_1 和 ω 为参数变量,给定大参数范围 $a_1 \in [0.05, 10], \omega \in [0.05, 4]$, 计算系统在 ω - a_1 参数平面上 TLE 的分布图,如图 1 所示.本文仿真的双参数平面上的 TLE 分布图中浅灰色区域为系统 TLE 小于零的稳定周期区域;黑色实线或虚线表示系统 TLE 近似等于零;深灰色区域为系统 TLE

大于零的混沌区域.对于 TLE 近似等于零的分岔胞,参考文献[17],通过计算该分岔胞的特征值初步判断该分岔胞的分岔类型,再结合单参数分岔图进行分析验证,从而得到在图 1 中当参数经过该实线或虚线时,系统发生分岔或跳跃:实线 $PBi(i = 1, 2, 3)$ 为叉式分岔曲线,其中 $PB1$ 和 $PB2$ 相交;虚线 $S1$ 为周期跳跃曲线.

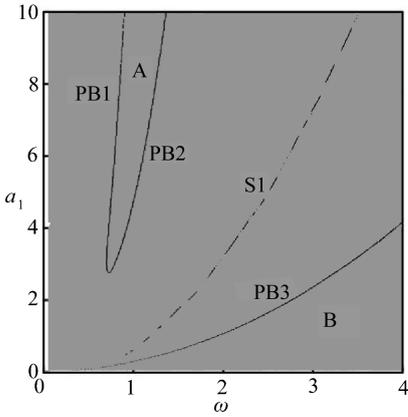
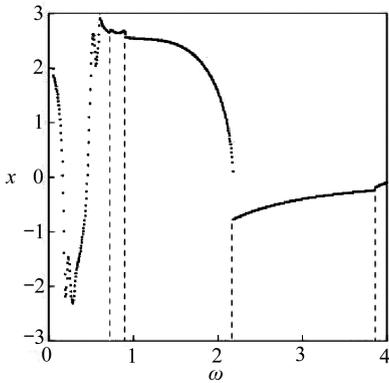


图 1 系统在参数平面 ω - a_1 上 TLE 的分布 ($b = 0.05$)

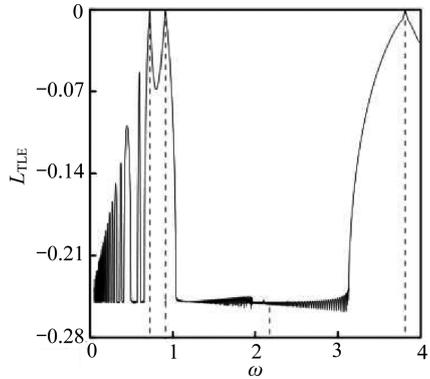
Fig. 1 Distribution of the system TLE on 2-parameter plane ω - a_1 ($b = 0.05$)

图 1 中,当 a_1 较大时,随着 ω 的增加,系统在 $PB1$ 上发生叉式分岔,系统单参数分岔图出现“缺边现象”(系统单参数分岔图在某一初值条件下表现为一条曲线,而在多初值条件下表现为两条曲线,即系统出现吸引子共存现象,对初值有较强的敏感性,后文将结合图 3 进行分析),系统进入 A 区域,后经 $PB2$ 发生逆叉式分岔,该“缺边现象”消失,系统退出 A 区域进入稳定的周期一运动,在 A 区域内系统存在两不同周期一吸引子共存的现象.当系统参数经过虚线 $S1$ 时,系统振动幅值发生跳跃,当 a_1 较小时,随 ω 的增加,系统经过周期跳跃曲线 $S1$ 后,在 $PB3$ 上同样发生叉式分岔,出现“缺边现象”,系统进入 B 区域;由于叉式分岔的出现,系统在 A、B 区域内对初值具有较强的敏感性,在不同初值下系统轨线有可能运动到不同的吸引子上.



(a) $\omega \in (0.05, 4.0)$ 时的分岔图

(a) The bifurcation diagram, $\omega \in (0.05, 4.0)$



(b) TLE 图

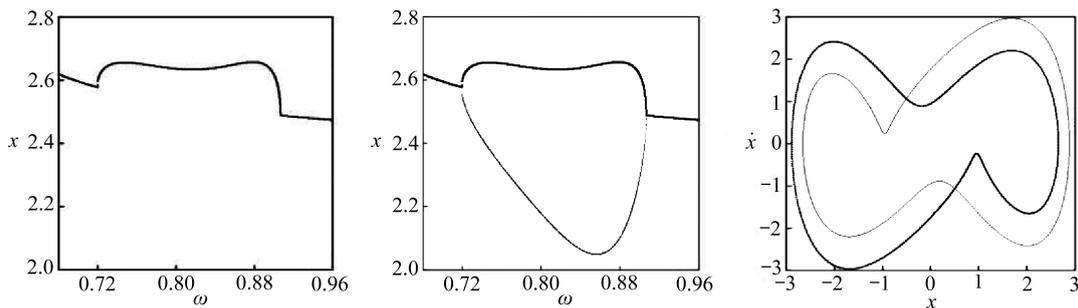
(b) The TLE diagram

图 2 系统在参数 $a_1 = 3.84$ 时的分岔图和 TLE 图

Fig. 2 The system bifurcation diagram and the corresponding TLE diagram, $a_1 = 3.84$

下面结合单参数分岔具体分析其分岔过程:保持其他参数与图 1 一致,取 $a_1 = 3.84$,计算系统随 ω 变化时的单参分岔图和相应 TLE 如图 2(a) 和 2(b) 所示,对比两图发现其分岔点位置与图 1 相吻合.当 $\omega < 0.719$ 时,系统为周期一运动(有一定的颤振性,后文将结合图 6 进行分析),随着 ω 增大至 $\omega = 0.719$ 时,周期一运动不稳定,系统发生叉式分岔,单参数分岔图出现“缺边现象”,对应图 1 中的分岔曲线 $PB1$,系统进入 A 区域;当 $\omega = 0.907$ 时,系统发生逆叉式分岔,该“缺边现象”消失,对应图 1 中的分岔曲线 $PB2$,系统退出 A 区域而进入稳定的周期一运动;当激励频率增加到 $\omega = 2.177$ 时,系统发生跳跃,对应图 1 中的跳跃曲线 $S1$;随着外激

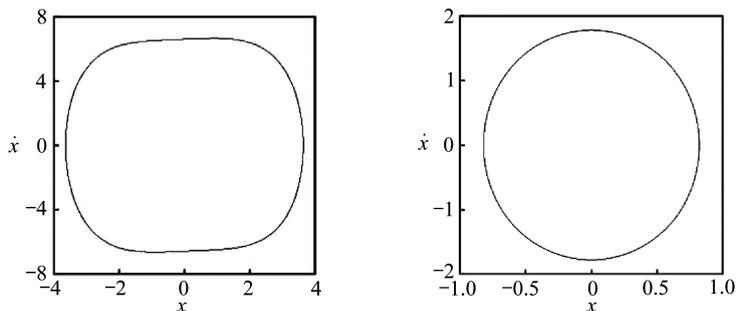
励频率 ω 增加至 $\omega = 3.843$ 时系统再次发生叉式分岔,单参数分岔图出现“缺边现象”,对应图 1 中的分岔曲线 PB3,系统进入 B 区域。



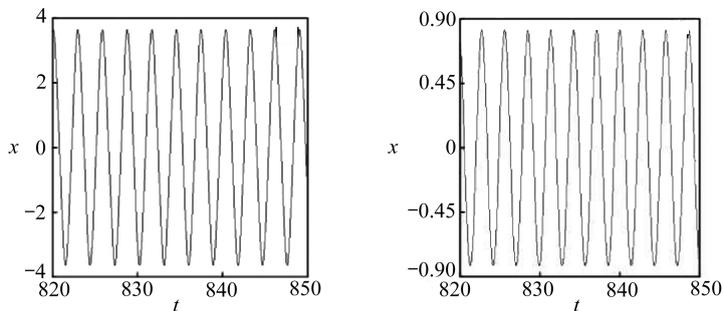
(a) $\omega \in (0.68, 0.96)$ 时局部放大分岔图
 (a) The local enlarged bifurcation diagram, $\omega \in (0.68, 0.96)$
 (b) 与图 3(a) 相应的多初值分岔图
 (b) The multiple initial value bifurcation diagram corresponding to fig. 3(a)
 (c) $\omega = 0.812$ 时系统在不同初值条件下的相图
 (c) The phase diagram under different initial conditions, $\omega = 0.812$

图 3 图 2(a) 的局部放大分岔图和相图

Fig. 3 The local enlarged bifurcation diagrams and the phase diagram in fig. 2(a)



(a) 系统在跳跃前 $\omega = 2.176$ 时的相图
 (a) The phase diagram before the jump, $\omega = 2.176$
 (b) 系统在跳跃后 $\omega = 2.178$ 时的相图
 (b) The phase diagram after the jump, $\omega = 2.178$



(c) 与图 4(a) 相应的时间历程图
 (c) The time response diagram corresponding to fig. 4(a)
 (d) 与图 4(b) 相应的时间历程图
 (d) The time response diagram corresponding to fig. 4(b)

图 4 当 $a_1 = 3.84$ 时系统在跳跃曲线 S1 前后的相图和对应的时间历程图

Fig. 4 The phase diagrams and the corresponding time response diagrams before and after jumping curve S1, $a_1 = 3.84$

图 3(a) 为系统在叉式分岔曲线 PB1 和 PB2 附近局部放大单参数分岔图,图 3(b) 为系统在相同参数条件下对应的多初值分岔图(框内黑色粗线和细线分别为系统在 $(t, x, \dot{x}) = (0.0, 1.735, -0.055)$ 和 $(t, x, \dot{x}) = (0.0, 0.662, 0.012)$ 初值条件下稳态后的分岔图),由图可知经叉式分岔后,当 $0.719 < \omega < 0.907$ 时系统在多初值条件下其缺失的边重新出现.图 3(c) 为以 ω 区域范围内 $\omega = 0.812$ 为例时系统在 A 区域内不同初值条件下的相图(框中黑色粗线和细线分别为系统在 $(t, x, \dot{x}) = (0.0, 2.65, 0.50)$ 和 $(t, x, \dot{x}) = (0.0, 2.00, -0.50)$ 初值条件下稳态后的相轨图),可见 A 区域内系统在不同初值条件下得到的相图具有反对称特性,存在两吸引子共存现象,与图 3(b) 的两条叉式分岔曲线相对应.由于在不同初值条件下系统运动轨迹不同,所以系统稳定性有所降低.

图 4 为系统在跳跃曲线 S1 前后的相图和对应时间历程图,其中图 4(a) 和 4(b) 分别为系统跳跃前后的相图,图 4(c) 和 4(d) 分别为跳跃前后的时间历程图,由图可知在跳跃前后系统仍为周期一运动,但其相轨图明显缩小,振动幅值也突然降低,系统振动稳定性有所增强.图 5(a) 和 5(b) 分别为系统在叉式分岔曲线 PB3 附近的局部放大分岔图和相应多初值分岔图,由图可见,系统经叉式分岔后在多初值条件下其缺失的边重新出现,系统在 B 区域同样存在吸引子共存的现象.

图 2(a) 中,当激励频率 ω 较小时,系统虽为周期一运动但其振动幅值变化幅度较大,保持其他参数不变,取激励频率 ω 为 0.06, 0.1, 0.2, 分别计算其相图和相应时间历程图如图 6(a) ~ (c) 和 6(d) ~ (f) 所示.

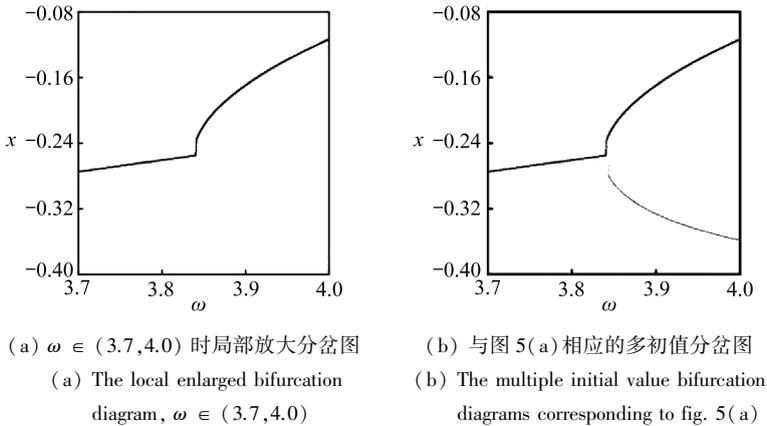
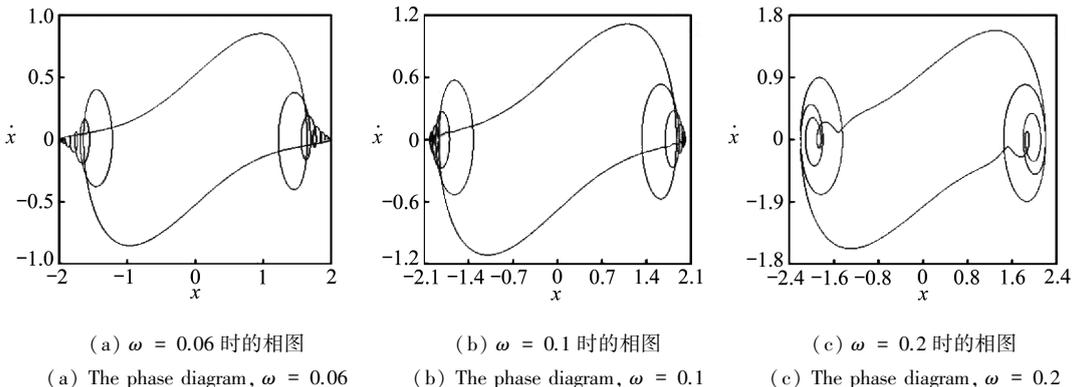
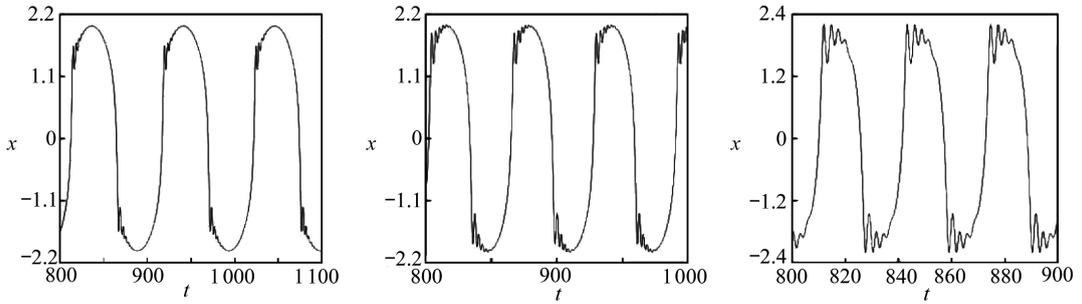


图 5 图 2(a) 的局部放大分岔图

Fig. 5 The local enlarged bifurcation diagrams of the system in fig. 2(a)





(d) 与图 6(a) 相应的时间历程图

(d) The time response diagram corresponding to fig. 6(a)

(e) 与图 6(b) 相应的时间历程图

(e) The time response diagram corresponding to fig. 6(b)

(f) 与图 6(c) 相应的时间历程图

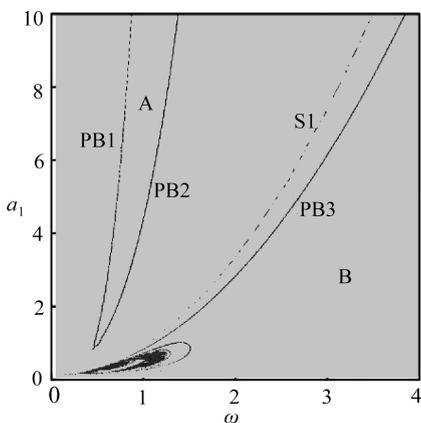
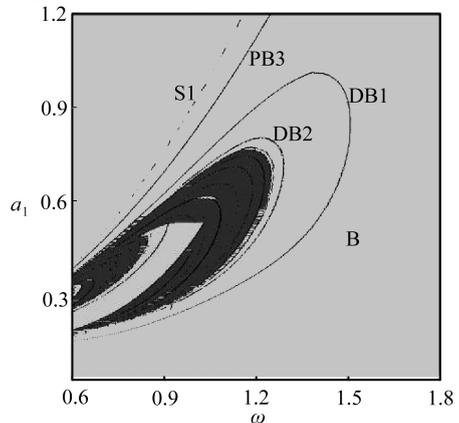
(f) The time response diagram corresponding to fig. 6(c)

图 6 $a_1 = 3.84$ 时系统在外激励频率较小时的颤振运动Fig. 6 The system flutter motion when the external excitation frequency is relatively small, $a_1 = 3.84$

结合图 2 和图 6 可以发现 Duffing 振子在外激励频率 ω 较小时具有一定的颤振运动,而且频率越小颤振性越强,频率越大颤振性越弱,当频率 ω 增加到一定的值之后振子的颤振运动消失.经计算发现,当激励频率 ω 取较小值,其他参数变化时,系统仍具有颤振性,可见这种颤振运动是由激励频率 ω 较小引起的.系统在低频段运动时,虽其 TLE 始终小于零,但颤振运动仍使系统的稳定性有所降低.

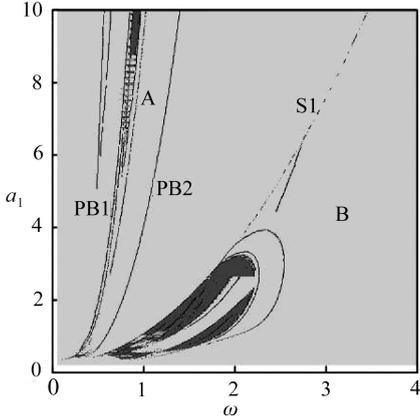
3 刚度系数对系统双参数特性的影响

鉴于文章篇幅,本文只分析了刚度系数对系统双参数特性的影响,并重点分析所发现的复杂动力学特性,发现系统动力学行为与系统参数之间的匹配规律.保持其他参数与图 1 一致,取刚度系数 $b = 0.33$ 计算系统在 ω - a_1 参数平面上的 TLE 如图 7(a) 所示.对比图 1,随刚度系数 b 的增加,曲线 PB1 和 PB2 不断向下延伸,使得 A 区域的面积不断增大,曲线 PB3 不断向上和向左移动,B 区域的面积也不断增大,在 B 区域内系统出现了深灰色混沌区域和倍周期分岔曲线环.图 7(b) 为其局部放大图,其中曲线 DB1 和 DB2 为周期倍化分岔曲线,深灰色混沌区域被倍周期分岔曲线环包围,倍周期分岔曲线环内不断嵌套新的倍周期分岔曲线环,导致系统最终经倍周期分岔序列进入混沌状态,此时系统在双参数平面上的分岔特性变得非常复杂.

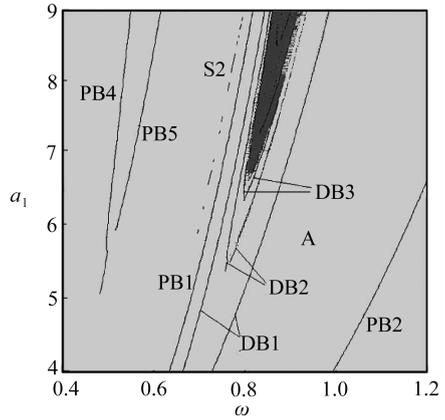
(a) $b = 0.33$ 

(b) 图 7(a) 的局部放大图

(b) The local enlarged diagram of fig. 7(a)



(c) $b = 0.73$

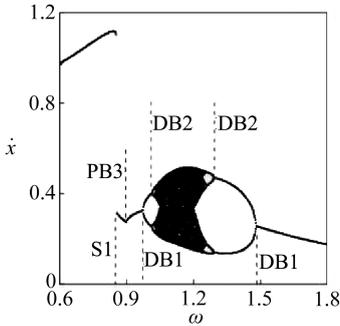


(d) 图 7(c) 的局部放大图

(d) The local enlarged diagram of fig. 7(c)

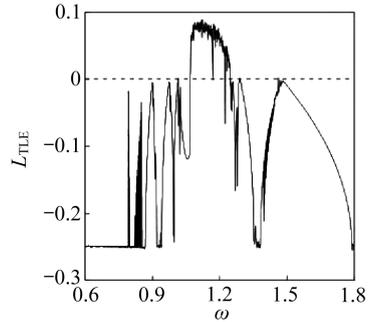
图 7 系统在参数平面 $\omega-a_1$ 上 TLE 的分布

Fig. 7 Distributions of the system TLE on 2-parameter plane $\omega-a_1$



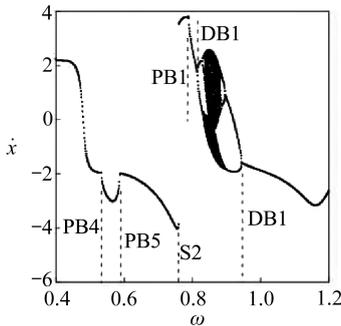
(a) 图 7(b) 中 $a_1 = 0.7$ 时系统随 ω 变化的分岔图

(a) The bifurcation diagram for $a_1 = 0.7$ in fig. 7(b)



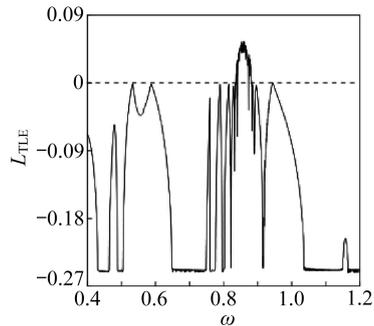
(b) 与图 8(a) 相应的 TLE 图

(b) The TLE diagram corresponding to fig. 8(a)



(c) 图 7(d) 中 $a_1 = 8.0$ 时系统随 ω 变化的分岔图

(c) The bifurcation diagram for $a_1 = 8.0$ in fig. 7(d)



(d) 与图 8(c) 相应的 TLE 图

(d) The TLE diagram corresponding to fig. 8(c)

图 8 系统分岔图和相应 TLE 图

Fig. 8 The system bifurcation diagrams and the corresponding TLE diagrams

继续增加参数 b 的值,当 $b = 0.73$ 时,系统在 $\omega-a_1$ 参数平面上 TLE 的分布如图 7(c) 所示, B 区域中深灰色混沌区域和各种分岔曲线环不断扩大和延伸,叉式分岔曲线 PB3 不断退化消失;在 A 区域内系统出现了与 B 区域相似的深灰色混沌区域和倍周期分岔曲线环,其局部放

大图如图 7(d) 所示, 曲线 DB1、DB2 和 DB3 为倍周期分岔曲线, 系统在倍周期分岔曲线内不断嵌套倍周期分岔曲线, 导致系统最终经倍周期分岔序列进入混沌状态. 由图 7(b) 和 7(d) 可知, 系统在经叉式分岔曲线进入 A、B 区域之前均出现了跳跃曲线 S2 和 S1, 可见跳跃曲线对系统在双参数平面上的分岔演变过程有着重要的影响. 此外在叉式分岔曲线 PB1 左边系统又出现了新的叉式分岔曲线 PB4 和 PB5, 如图 7(d) 所示, 使得系统在局部参数匹配下的分岔特性变得更为丰富.

在图 7(b) 和 7(d) 中分别取截面 $a_1 = 0.7$ 和 $a_1 = 8.0$ 计算系统随 ω 变化的单参数分岔图和相应 TLE 图如图 8 所示, 图 8(a) 和 8(b) 为 $a_1 = 0.7$ 时的分岔图和相应 TLE 图, 图 8(c) 和 8(d) 为 $a_1 = 8.0$ 时的分岔图和相应 TLE 图, 其分岔混沌过程分别与图 7(b) 和 7(d) 相对应. 从而验证了这种方法在计算双参数匹配下系统分岔与混沌的有效性.

由以上分析得知, 随刚度系数 b 的增加, 具有吸引子共存的 A 区域和 B 区域的面积不断扩大, 使得系统在整个参数平面上的稳定性有所降低, 在 A、B 区域内系统均出现了混沌运动和倍周期分岔曲线环, 倍周期分岔曲线环内不断嵌套倍周期分岔曲线环, 导致系统最终由周期运动经倍周期分岔序列进入混沌运动, 使得系统在参数平面上的分岔特性变得极为复杂, 而且随着频率增加系统出现 A、B 区域前均经过一次周期跳跃, 可见周期跳跃对系统在参数平面上的分岔和演变有着极其重要的作用.

4 结 论

数值计算 Duffing 系统在双参数平面上的最大 Lyapunov 指数, 结合单参数分岔图、相图以及时间历程图讨论了系统的双参数分岔特性以及刚度系数对系统双参数分岔演化过程的影响, 得到以下结果:

1) 在一定参数条件下, 得到系统在双参数平面上的周期跳跃曲线 S1 和叉式分岔曲线 $PBi (i = 1, 2, 3)$. 随着 ω 的增加, 当系统参数经过曲线 S1 时系统发生周期跳跃, 跳跃后其振动幅值和相轨图明显缩小, 系统振动稳定性有所增强; 当系统参数经过曲线 PBi 时系统发生叉式分岔, 出现系统单参数分叉图具有缺边现象的两个周期区域, 在多初值条件下系统分岔图上缺失的边重新出现, 使得系统在两个区域内对初值极度敏感, 存在两吸引子共存的现象.

2) 随刚度系数的增加, 在两个区域内系统出现倍周期分岔曲线环, 倍周期分岔曲线环内不断嵌套新的倍周期分岔曲线环, 导致系统最终由周期运动经倍化分岔序列进入混沌运动, 使得系统在双参数平面上的分岔演化过程变得非常复杂, 刚度系数对系统在两个区域内的运动特性有着重要的影响. 此外, 系统在进入两个区域前均出现了周期跳跃曲线, 可见周期跳跃对系统在参数平面上的分岔演化过程具有重要的影响.

3) 当外激励频率较小时, 系统振动具有一定的颤振性, 当系统处于颤振运动时, 其最大 Lyapunov 指数仍小于零, 研究发现这种颤振性是由外激励频率较低引起的, 在工程应用中应特别注意系统在低频时的运动. 系统控制参数在不同匹配之下, 系统表现出不同的动力学特性, 通过控制系统某一参数的变化可以改变系统的动力学行为. 通过计算系统在参数空间的最大 Lyapunov 指数来研究多参数匹配对系统动力学特性的影响具有一定的有效性和可行性.

参考文献 (References):

- [1] SHAW S W, HOLMES P J. A periodically forced piecewise linear oscillator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, 90(1): 129-155.

- [2] 夏南, 孟光. 非线性系统周期强迫不平衡响应的稳定性分析[J]. 力学学报, 2001, **33**(1): 128-133. (XIA Nan, MENG Guang. The analysis on the stability of responses of strong nonlinear system subjected to periodic unbalance force[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, **33**(1): 128-133. (in Chinese))
- [3] NORDMARK A B. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, **145**(2): 279-297.
- [4] LUO G W, LV X H, SHI Y Q. Vibro-impact dynamics of a two-degree-of freedom periodically-forced system with a clearance: diversity and parameter matching of periodic-impact motions [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, **65**: 173-195.
- [5] GOU Xiangfeng, ZHU Lingyun, CHEN Dailin. Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair in two-parameter plane[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **79**(3): 2225-2235.
- [6] 吴淑花, 孙毅, 郝建红, 等. 耦合发电机系统的分岔和双参数特性[J]. 物理学报, 2011, **60**(1): 010507. (WU Shuhua, SUN Yi, HAO Jianhong, et al. Bifurcation and dual-parameter characteristic of the coupled dynamos system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(1): 010507. (in Chinese))
- [7] THOTA P, KRAUSKOPF B, LOWENBERG M. Multi-parameter bifurcation study of shimmy oscillations in a dual-wheel aircraft nose landing gear [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **70**(2): 1675-1688.
- [8] 杨娟, 卞保明, 彭刚, 等. 随机信号双参数脉冲模型的分形特征[J]. 物理学报, 2011, **60**(1): 010508. (YANG Juan, BIAN Baoming, PENG Gang, et al. The fractal character of two-parameter pulse model for random signal[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(1): 010508. (in Chinese))
- [9] DAI Guowei. Two global several-parameter bifurcation theorems and their applications [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, **433**(2): 749-761.
- [10] VAN LOI N. On two-parameter global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2015, **122**: 83-99.
- [11] SHAW P K, JANAKI M S, IYENGAR A N S, et al. Antiperiodic oscillations in a forced Duffing oscillator [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2015, **78**: 256-266.
- [12] JOHANNESSEN K. The Duffing oscillator with damping [J]. *European Journal of Physics*, 2015, **36**(6): 065020. DOI: 10.1088/0143-0807/36/6/065020.
- [13] CHU Jifeng, WANG Feng. Prevalence of stable periodic solutions for Duffing equations [J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, **260**(11): 7800-7820.
- [14] RUSINEK R, WEREMCZUK A, KECIK K, et al. Dynamics of a time delayed Duffing oscillator [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, **65**: 98-106.
- [15] 武娟, 许勇. 加性二值噪声激励下 Duffing 系统的随机分岔 [J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 593-599. (WU Juan, XU Yong. Stochastic bifurcations in a Duffing system driven by additive dichotomous noises [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 593-599. (in Chinese))
- [16] 张莹, 都琳, 岳晓乐, 等. 随机参数作用下参激双势阱 Duffing 系统的随机动力学行为分析 [J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1198-1207. (ZHANG Ying, DU Lin, YUE Xiaole, et al. Stochastic nonlinear dynamics analysis of double-well Duffing systems under random parametric excitations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(11): 1198-1207. (in Chinese))

- [17] XIE Dan, XU Min, DAI Honghua, et al. Observation and evolution of chaos for a cantilever plate in supersonic flow[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2014, **50**: 271-291.

Bifurcation Evolution of Duffing Systems on 2-Parameter Planes

ZHANG Yanlong¹, WANG Li², SHI Jianfei¹

(1. *School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University,*
Lanzhou 730070, P.R.China;

2. *School of Mathematics, Lanzhou City University,*
Lanzhou 730070, P.R.China)

Abstract: The calculation method for the top Lyapunov exponents in the parameter space was given. The top Lyapunov exponents of Duffing systems on 2-parameter planes were calculated with the numerical method. Combined with the single-parameter top Lyapunov exponents, the bifurcation diagrams, the phase diagrams and the time response diagrams, the bifurcation and the bifurcation evolution process of Duffing systems on the 2-parameter planes were discussed in view of the change of system parameters. The results show that 2 different regions with the phenomena of missing edges appear when the pitchfork bifurcation occurs. The system has strong sensitivity to initial values in the regions where 2 attractors coexist. The system vibration amplitude decreases suddenly when the system moves through the period jump curve. The system flutter motion often occurs when the excitation frequency is relatively small. In addition, when the stiffness coefficient increases, the period-doubling bifurcation curve cycles constantly exist and nest each other in the 2 regions with the phenomena of missing edges, which makes the system finally evolve into a chaotic state via the period-doubling bifurcation sequences. The dynamic properties of the system are very complex on 2-parameter planes with the change of control parameters.

Key words: Duffing system; Lyapunov exponent; 2-parameter characteristic; bifurcation; periodic jump

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11302092; 11362008)

引用本文/Cite this paper:

张艳龙, 王丽, 石建飞. Duffing 系统在双参数平面上的分岔演化过程[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39** (3): 324-333.

ZHANG Yanlong, WANG Li, SHI Jianfei. Bifurcation evolution of Duffing systems on 2-parameter planes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 324-333.