

浅水机械激波*

钟万勰¹, 吴 锋¹, 孙 雁²

(1. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116023;

2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 采用位移法和 Lagrange 坐标探索水跃问题,通过分析表明,在水平位移与竖向坐标无关的基本假定下,因垂直运动动能的存在,水跃不会是强间断,而是一个在间断面附近抖动的连续解,强间断是该连续解的极限。

关键词: 浅水波; 激波; 位移法; 乘法摄动; 作用量

中图分类号: O352

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.380078

引 论

激波问题众所关注,著名著作[1]讲述了激波的多个方面,而在浅水波方面,其水跃实际上也是激波^[2],因为水不是气体而是不可压缩的,热力学的影响可以忽略,因此著作[1]称其为机械激波(mechanical shock wave),当然也是强间断,并且也用了一些篇幅讲解间断面两端 Hugoniot 条件等,本文力图论证水跃是多尺度问题。

浅水波是水动力学方面的一个重要论题,钱塘江潮水天下闻名,关键是其水跃的传播,名著[2]用了许多篇幅讲述了水跃,水跃是流体激波,对此可以用作典型问题加以数值求解和论证。

1838年, Russell(罗素)在河道中观察到了孤立波,但其理论却历经多年争论^[3],直到1895年 KdV 方程的发表,方才建立了其浅水波的理论成因,并被广泛接受,虽然不太理想,浅水波理论常常采用 Saint Venant 的浅水方程,也称 Saint Venant equation (SVE),现在有许多文章的计算莫基于 SVE 理论,但 SVE 理论不能得到孤立波解,说明概括性不够。

文献[4-6]在质点位移空间 Lagrange 坐标下也论述了孤立波,在位移空间建立方程,易于建立对应的变分原理,在变分原理基础上推导有限元法是本基本手段,之后又出版了关于浅水波的著作^[7],主要关注的是非线性方程的波,浅水波一般要求水深 $h \ll \lambda$, 其中 λ 是波长,浅水波的基本假定主要是:变形前是垂直线,则变形后依然是垂直线^[5-6,8],该基本假定适用于一般的浅水波,因为一般的浅水波波长比较长,当然,也适用于孤立波。

* 收稿日期: 2017-04-05; 修订日期: 2017-06-13

基金项目: 国家自然科学基金(11472076;51609034); 中国博士后科学基金(2016M590219)

作者简介: 钟万勰(1934—),男,教授,中科院院士(通讯作者, E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn);

吴锋(1985—),男,副教授(E-mail: wufeng_chn@163.com);

孙雁(1965—),女,副教授(E-mail: sunyan@sjtu.edu.cn)。

本文要转向激波问题.既然称为激波,其意思就是强间断,其变量本身就是间断的,不只是变量的微商间断.其控制微分方程的最高阶微商一般是齐次的;但流体力学中还有边界层理论,由于黏性系数非常小,其最高阶微商的系数非常小,于是就出现了边界层理论,这是 Prandtl 的重要贡献之一.对应地就出现了应用数学的奇异摄动法(singular perturbation method),其主要是由中国留美学者贡献的.对此,著作[5]的 5.7 小节有奇异乘法摄动的解法描述.

著作[5-6]也讲述了浅水波理论,对于平底一维水槽按最小作用量变分原理,给出了非线性偏微分方程:

$$\ddot{u}(x,t) - \ddot{u}_{xx} h^2/3 - gh(u_{xx} - 3u_x u_{xx}) = 0, \quad (1)$$

这是位移法的浅水波基本方程.其中采用了位移法 Lagrange 函数的方法,与传统以 Euler 流速为未知函数的方法不同.方程(1)是从动力系统的最小作用量变分原理导出的,而水平位移 $u(x,t)$ 是泛函的自变函数.尤其要注意的是方程中有 \ddot{u}_{xx} ,它是该方程的最高阶次微商项,而且因为存在该项,不会出现间断解,这是微分方程在质方面的变化.浅水波的 SVE 理论相当于将方程(1)中的 \ddot{u}_{xx} 忽略成为

$$\ddot{u}(x,t) - gh(u_{xx} - 3u_x u_{xx}) = 0 \quad (2)$$

而求解的,当然这是位移法的,因此孤立波不会出现.为何说 $\ddot{u}_{xx} h^2/3$ 是小量呢? 因为如按线性方程理论,波速是 $c_0 = \sqrt{gh}$ 、波长为 λ 的行波可写为 $e^{i\lambda^{-1} \cdot 2\pi(x-c_0 t)} u_0$,若圆频率为 ν ,则有 $\lambda/c_0 = 2\pi/\nu$. $\ddot{u}_{xx} h^2/3$ 与 \ddot{u} 相比,有

$$|(\ddot{u}_{xx} h^2/3)/\ddot{u}| = \frac{(2\pi)^2}{3} (h/\lambda)^2 \approx 13(h/\lambda)^2, \quad (3)$$

其中 h/λ 是浅水理论的重要参数,一般远小于 1,因此 $\ddot{u}_{xx} h^2/3$ 相对于 \ddot{u} 是小量.

采用方程(1)寻求行波解,因此孤立波就得以呈现,而且其波速与 Russell 的实验也符合得很好.关于这些方程的推导与求解在文献[4-7,9]已有详细论述,表明方程(1)的合理性.本文要探索机械激波,方程(1)与(2)数值解的比较,看到其机械激波的成因,它是多尺度问题的极限.

按文献[4-6]的推导, $\ddot{u}_{xx} h^2/3$ 项的出现是因为考虑了垂直运动的动能,该项是小量,可用典型的奇异小参数摄动求解.本来按 SVE 理论方程(2)求解会出现强间断解,因为有了该项方程成为方程(1),动力学求解就成为了小参数奇异摄动,不会出现间断解;在 SVE 理论的间断面附近,会出现边界层.这将是下节的课题.

1 最小作用量变分原理的积分与奇异摄动解

按引论应当求解基本非线性偏微分方程(1);然而以往长时期,关于浅水波问题,占统治地位的是 SVE 理论.它是会出现浅水波的机械激波的.按 SVE 理论的方程(2)求解,会出现强间断的解,记其解函数为 $u_s(x,t)$. $u_s(x,t)$ 满足方程(2).虽然该方程也是在位移法的框架下推导的,与传统方程会有所不同,但本质相同,即没有高阶偏微商项.

现在要按基本非线性偏微分方程(1)求解.两者之间的差别就在于出现了高阶偏微商 $\ddot{u}_{xx} h^2/3$,它代表垂直方向动能的贡献.文献[6]中已经一再指出,正是该项的出现,必然会有奇异摄动.在著作[5]的 5.7 小节,就一个简单方面的问题讲了如何采用乘法摄动进行求解.

因为方程(1)出现了高阶偏微商 $\ddot{u}_{xx} h^2/3$ 的小参数项,所以应先进行方程(2)的求解,以得到 $u_s(x,t)$.非线性双曲型偏微分方程的求解,还会出现浅水机械激波的强间断解,显然并非易事.然而问题重要,结合一维 Riemann 问题的激波解,已经有一些文章发表,做了这方面的课

题,虽然重要,但本文的要点却不在于此,而是要面对含有高阶偏微商 $\ddot{u}_{xx} h^2/3$ 的小参数项的方程(1),此时浅水机械激波的强间断解会发生变化,不会出现强间断,而是在强间断的附近小范围内会出现与间断解 $u_s(x,t)$ 相对应的抖动,依然是连续解.只要将网格分细而对方程(1)进行数值积分,就会出现这样的现象.因为基本方程是从最小作用量变分原理推导的,即使水底不平也可用,虽然方程还要复杂些,例如用时间有限元法逐步积分.

对比方程(2)的强间断解,因为高阶微商项的出现,改变了微分方程的性质,这就为进行数值研究提供了可能.这样,为高阶微分方程(1)的奇异摄动分析提供了可能与方向.以往确定激波的位置,其数值方法是一个挺麻烦的问题.往往是运用差分法,在预先划分好的网格上加一些人工阻尼,以确定激波位置.而浅水波方程的机械激波却加上了垂直方向动能,它本来就是有的而不是人为加的,成为高阶微分方程,可用最小作用量变分原理数值法硬积分的办法让它呈现出来.好在有最小作用量变分原理,保证了动力学解的合理性.因为有小参数的高阶微商项,网格要划分更细些,让高频震荡能够显现出来.

既然已经可以加密网格进行数值求解,那为何还要奇异摄动理论呢?这是因为一概加密网格数值求解也未免太笨了.过去按 SVE 理论的方程(2)求解,得到典型问题的 $u_s(x,t)$ 解为何不用.在流体动力学中,边界层理论就是当做无黏性流动的补充而提出的;在远离边界层处的外域,就采用普通的无黏性流动的 Euler(欧拉)解,而在边界层附近才局部加以修正,得到了被当今普遍接受的一套方法论.

既然可设法寻求方程(2)的 SVE 解 $u_s(x,t)$ (相当于流体力学有了外域的 Euler 解),其实这一步也是很难做的,直至今日,间断面的定位还是计算流体力学的一个困难问题.根据奇异摄动理论的乘法摄动(参见文献[5]的 5.7 小节),方程(1)奇异摄动理论的解,应当就是

$$u(x,t) \approx p(x,t)u_s(x,t), \quad (4)$$

其中 $p(x,t)$ 就是摄动的乘子函数,待求.不过其性质却是可以预先加以描述的.注意,按方程(1), $u(x,t)$ 是可以加密网格而硬积分求解的.这里有一个问题:微分方程(1)用硬积分求解,出现了多尺度现象;多尺度时的解,其波长是否依然能保持 $h/\lambda \ll 1$? 回答是难以保证.

奇异摄动理论,关注最高阶微商项的小参数 ε , 当然要小.至于 ε 究竟是多少,那要看具体问题而定.按著作[10],浅水波课题要求 $h/\lambda \ll 1$, 其中 λ 是波长课题的典型长度.

现在给出一数值计算的实例,初始时水面为

$$\eta_0(x) = 0.4 \tanh(0.1(25 - x)) - 0.6 + h_0, \quad (5)$$

水底为 $z = -h$, $h = 1$ m, 水密度为 1000 kg/m^3 , 重力加速度设为 $g = 10 \text{ m/s}^2$. 边界条件为 $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $L = 200$ m, 采用 800 个均匀网格剖分,用时间有限元计算,时间步长取 $\Delta t = 0.05$ s, h_0 分别取 1.0, 0.8, 0.6, 0.4 m 计算, h_0 是上游水深.

该算例的解是在 (x, z, t) 空间的曲面,不同 h_0 对应不同时刻的水面如图 1 所示,其中 η 表示水面.从图 1 的各图皆看到,最前沿波与上游的连接(实心点处)是切线连续的.

图 2 为水面在 (x, t) 面的投影.从图 2 可见,由于高阶小量的存在,改变了方程的性质,不再出现强间断解,然而波出现了散射现象,波峰在 (x, t) 面的散射,与解析分析中的特征线分布十分相似.图 2 中,最前沿的波面用虚线标记了,其虚线的斜率即最前沿波的波速,即为 c_w . 激波前沿看上去是直线,而实际上还是有弯曲的, c_w 随时间变化,不同时刻的波速列于表 1.

表 1 表明, c_w 随时间 t 增大而增大,而又与静水区水深 h_0 成反比,并且总是大于上游静水区的浅水波速 $\sqrt{gh_0}$. 后波的波速大于前波的波速,必然发生压缩波,然而并没有出现 SVE 中

的激波,而是高频震荡波,这是高阶小量的作用.

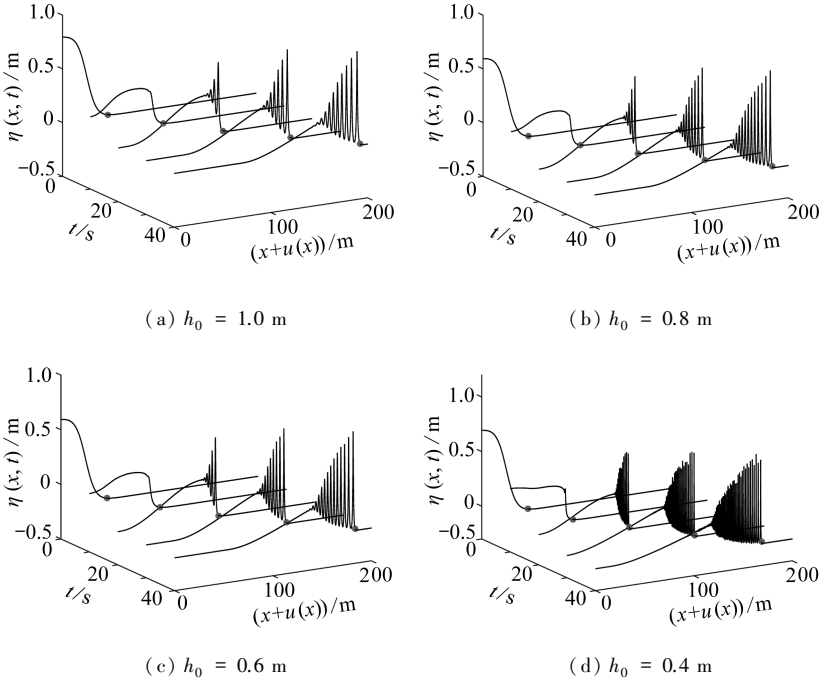


图 1 不同时刻的水面

Fig. 1 Water surfaces at different moments

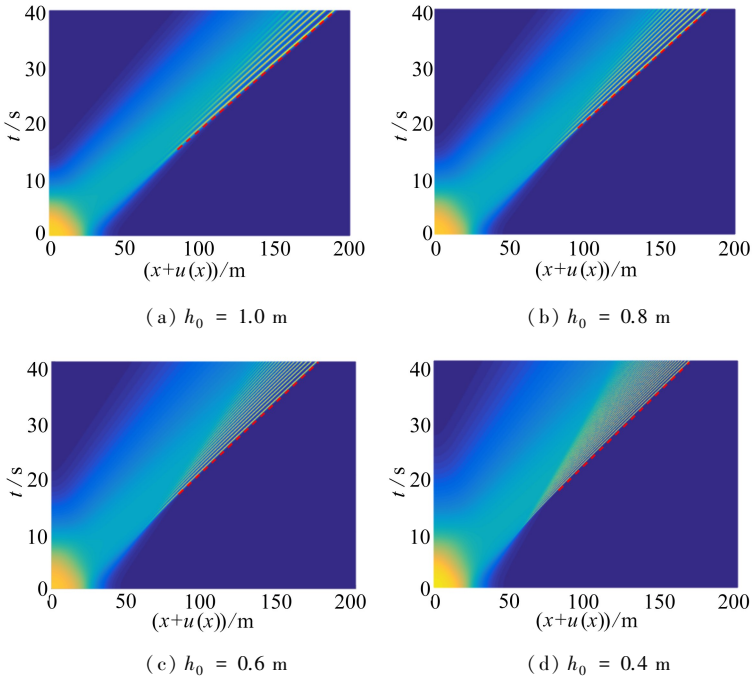


图 2 水面在 (x, t) 面的投影

Fig. 2 The projections of the water surfaces on the (x, t) plane

表 1 最前波面不同时刻的波速,及上游静水区域的波速对比

Table 1 Comparison between the wave speed of the front and that of the disturbed region

h_0 / m	$\sqrt{gh_0} / (\text{m/s})$	$c_w / (\text{m/s})$				
		$t = 15 \text{ s}$	$t = 20 \text{ s}$	$t = 25 \text{ s}$	$t = 30 \text{ s}$	$t = 35 \text{ s}$
1.0	3.16	4.17	4.21	4.25	4.27	4.35
0.8	2.83	3.91	3.99	4.04	4.07	4.20
0.6	2.45	3.69	3.85	3.90	3.95	3.99
0.4	2.00	3.52	3.73	3.79	3.85	3.88

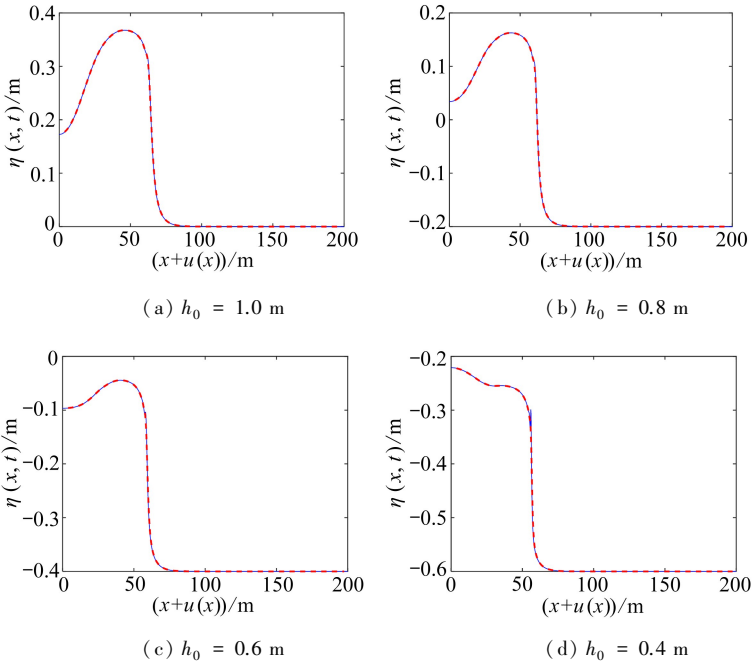


图 3 10 s 时的水面

Fig. 3 The water surfaces at 10 s

图 3、4 分别给出了 10 s 和 20 s 时的水面。图 3、4 中虚线水面是采用滤波的方法对原解进行了滤波处理, 消去高频震荡的短波效应, 这区分出 SVE 理论的强间断解 $u_s(x, t)$ 。滤波的具体步骤为: (a) 对于平滑区不作处理, 对于高频震荡区, 取高频波的波峰和波谷的平均值代替原高频震荡; (b) 如果经过步骤 (a) 后, 水面中仍然存在高频短波效应, 重复步骤 (a), 直至高频短波的效应不明显为止。强间断在 (x, t) 的空间是光滑曲面, 而方程 (4) 的乘法奇异摄动的近似表达式, 是强间断面乘上乘法摄动 $p(x, t)$ 而得到的解。本算例亦绘制了水面的动画演示, 参见文献 [11]。

高频震荡是因为方程中考虑了竖向加速度项而产生的。竖向加速度是真实水波必然存在的, 并非数学上的近似, 因此是合理的, 由此产生的高频震荡, 在自然界中也常常能够观察到, 如钱塘江潮。钱塘江潮在中、小潮期和深槽处, 常常会出现波状涌潮。图 5 即为真实观察到的钱塘江波状涌潮, 其中虚线描述了波状涌潮的面。

如果将图 4 (b) 的局部区域 [89, 101] m 放大, 则得到图 6, 其中横、纵坐标的比例尺度相同。比较图 5 和图 6 可见, 高频震荡实际上很可能就是反应了真实存在的波状涌潮。

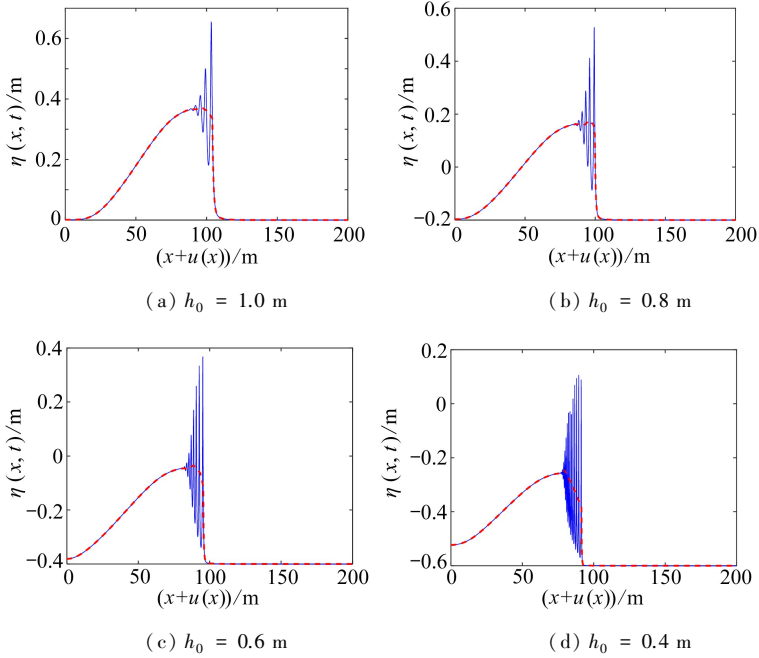


图 4 20 s 时的水面

Fig. 4 The water surfaces at 20 s

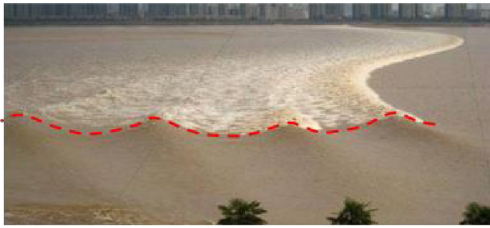


图 5 钱塘江波状涌潮

Fig. 5 The Qiantang wavy tidal bore

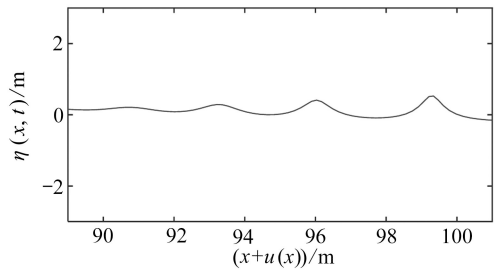


图 6 图 4(b) 的局部放大图

Fig. 6 The partial enlargement of fig. 4(b)

加密网格进行计算,也可用于水底不平的课题.微分方程(1)那是对于平底水域的;水底不平则也会影响微分方程.要将水底不平的微分方程推导出来也挺麻烦.但模型是采用位移法的,对此有最小作用量变分原理.只要将 Lagrange 函数的动能和势能表达清楚,就够了.对于水底不平课题,笔者之前在文献[12-14]中已经进行了分析,当水域为 $0 \leq x \leq L$ 时,动能和势能分别表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[h\rho\dot{u}^2 + \rho h h_x^2 \dot{u}^2 + \rho \dot{u}_x^2 \cdot \frac{1}{3} h^3 + \rho \dot{u}_x \dot{u} h^2 h_x \right] dx, \tag{6}$$

$$U = \int_0^L \frac{\rho g h^2(x)}{2} (u_x^2 - u_x^3) dx + \int_0^L \rho g h \left(-h_x u - \frac{1}{2} h_{xx} u^2 - \frac{1}{6} h_{xxx} u^3 \right) dx, \tag{7}$$

这样,非线性微分方程为

$$\ddot{u} - \frac{1}{3} \ddot{u}_{xx} h^2 - \frac{\partial(\ddot{u} h h_x)}{\partial x} = g \frac{\partial^2}{\partial x^2} (hu) + g \left(\frac{1}{2} h_{xxx} u^2 - 3u_x \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right). \tag{8}$$

直接求解偏微分方程,很麻烦,然而通过最小作用量原理,完全可以处理好其数值解的,而且数值解表现出了高频振动的成分.如果只在微分方程解的范围内,则结果是可信的.但高频区的解不能满足浅水波的基本条件,数值结果与实际真能一致吗?

从钱江潮的实际观测可见到,其激波水跃明显可见.激波对其上游无甚影响,但在激波下游,却存在极其混乱的一段.数值计算的高频规律性并不存在.原因当然是 $h/\lambda \ll 1$ 的条件根本不满足之故.

2 结束语

从热力学的角度看,混乱的度量是熵.激波本来是从空气动力学来的,在激波上游的平稳流到激波下游认为是一个间断,而将内部边界层完全忽略会使得定位发生困难.前文用浅水波动力学变分原理硬积分,倒是可以(在纯动力学范围内)定位;然而 $h/\lambda \ll 1$ 的条件又发生困难.如果将混乱度的熵也考虑进去,则变分原理何在,还是困难.

本文的作用,与其说是解决问题,不如说是经过一番努力,提出了问题.虽然看起来深入了些,却并无把握.以后还需要更有见地的深入研究.

参考文献(References):

- [1] Courant R, Friedrichs K O. *Supersonic Flow and Shock Waves*[M]. New York: Wiley, 1948.
- [2] Stoker J J. *Water Waves; the Mathematical Theory With Applications*[M]. New York: Interscience Publishers LTD, 1957.
- [3] Remoissenet M. *Waves Called Solitons; Concepts and Experiments*[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 1996: 60-64.
- [4] 钟万勰,姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(1): 151-156. (ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Shallow water solitary waves based on displacement method[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(1): 151-156. (in Chinese))
- [5] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics*[M]. Beijing: High Education Press, 2006. (in Chinese))
- [6] 钟万勰,吴锋. 力-功-能-辛-离散——祖冲之方法论[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2016. (ZHONG Wan-xie, WU Feng. *Force-Work-Energy-Symplecticity-Discretization—ZU Chongzhi's Methodology*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2016. (in Chinese))
- [7] 吴锋. 基于位移的水波数值模拟——辛方法[M]. 大连: 大连理工大学, 2017. (WU Feng. *Numerical Modeling of Water Waves Based on Displacement; Symplectic Method*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2017. (in Chinese))
- [8] 吴锋,钟万勰. 浅水问题的约束 Hamilton 变分原理及祖冲之类保辛算法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(1): 1-13. (WU Feng, ZHONG Wan-xie. The constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and the Zu-type symplectic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 1-13. (in Chinese))
- [9] 姚征,钟万勰. 位移法浅水波方程的解及其特性[J]. 计算机辅助工程, 2016, **25**(2): 1-4, 13. (YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Solutions and characteristics of shallow water equation based on displacement method[J]. *Computer Aided Engineering*, 2016, **25**(2): 1-4, 13. (in Chinese))

- [10] 梅强中. 水波动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984. (MEI Qiang-zhong. *Water Wave Dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [11] 钟万颢, 吴锋, 孙雁. 浅水机械激波[Z/OL]. (2017-6-13)[2017-6-19]. <http://blog.sciencenet.cn/blog-1177086-1060491.html>. (ZHONG Wan-xie, WU Feng, SUN Yan. Shallow water mechanical shock, wave [Z/OL]. (2017-6-13)[2017-6-19]. <http://blog.sciencenet.cn/blog-1177086-1060491.html>. (in Chinese))
- [12] 吴锋, 钟万颢. 浅水动边界问题的位移法模拟[J]. 计算机辅助工程, 2016, **25**(2): 5-13. (WU Feng, ZHONG Wan-xie. Simulation on moving boundaries of shallow water using displacement method[J]. *Computer Aided Engineering*, 2016, **25**(2): 5-13. (in Chinese))
- [13] 吴锋, 钟万颢. 不平水底浅水波问题的位移法[J]. 水动力学研究与进展, 2016, **31**(5): 549-555. (WU Feng, ZHONG Wan-xie. Displacement method for the shallow water wave problems with uneven bottoms[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2016, **31**(5): 549-555. (in Chinese))
- [14] WU Feng, ZHONG Wan-xie. On displacement shallow water wave equation and symplectic solution[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **318**: 431-455.

Shallow Water Mechanical Shock Wave

ZHONG Wan-xie¹, WU Feng¹, SUN Yan²

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment
(Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116023, P.R.China;

2. School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The hydraulic jump problem was studied by means of the displacement method and the Lagrangian coordinates. The discussion and the numerical example show that, under the fundamental assumption that the horizontal displacement is independent of the vertical coordinate, the hydraulic jump is not a type of strong discontinuous solution because of the kinetic energy of the vertical motion, but a continuous solution which fluctuates near the discontinuity. The strong discontinuity can be seen as the limit of the continuous solution.

Key words: shallow water wave; shock wave; displacement method; multiplicative perturbation; action

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472076;51609034); China Postdoctoral Science Foundation(2016M590219)

引用本文/Cite this paper:

钟万颢, 吴锋, 孙雁. 浅水机械激波[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(8): 845-852.

ZHONG Wan-xie, WU Feng, SUN Yan. Shallow water mechanical shock wave[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 845-852.