文章编号:1000-0887(2018)01-0104-09

变系数分数阶对流扩散方程的一种算子矩阵方法*

朱晓钢, 聂玉峰

(西北工业大学 应用数学系, 西安 710129)

摘要: 研究带 Caputo 分数阶导数的变系数对流扩散方程的数值解法.基于 Chebyshev cardinal 函数,推导 Riemann-Liouville 分数阶积分的一个有效算子矩阵,以之为基础,提出了变系数分数阶对流扩散方程的一种新的算子矩阵法.该方法将方程的求解转化成矩阵的代数运算,具有计算量小和易于编程等特点.给出数值算例并与一些现有的方法进行比较,结果表明该方法是收敛的且在计算精度上占有优势.

关 键 词: 分数阶微积分; Chebyshev cardinal 函数; 分数阶对流扩散方程; 算子矩阵方法
中图分类号: O241.8　　**文献标志码:** A　　DOI:10.21656/1000-0887.380041

引　　言

分数阶偏微分方程,即含分数阶导数的多变量微分方程,是一类近十几年兴起的数学模型,它们能准确地刻画自然界中的分数维物理过程,如反常扩散,弥补整数阶偏微分方程在描述相似现象时出现的与实验结果不一致、参数繁多和意义不清晰的缺陷,受到了国内外学者的青睐和关注.一些是从实际问题中抽象出的分数阶模型现已成为模拟和解决复杂问题的强有力的工具之一,应用范围涵盖了物理、化学[1]、生物[2]、地理和金融等领域.目前,分数阶偏微分方程的理论尚不完善,定性分析仍然非常少,分数阶导数的非局部性质和其独特的弱奇异积分结构直接造成了此类方程紧凑解析解的缺失和理论求解的困难,这严重制约了实际应用的进一步拓展.因此,发展稳定和高效的数值方法是当前的迫切需要.

考虑变系数分数阶对流扩散方程

$$\frac{\partial^\alpha y(x,t)}{\partial t^\alpha}+\kappa(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}-\upsilon(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad x\in\Lambda,\ 0<t\leqslant T.\tag{1}$$

给定初边值条件如下:

$$y(x,0)=\psi(x),\qquad x\in\Lambda,\tag{2}$$

$$y(0,t)=g_0(t),\ y(\ell,t)=g_1(t),\qquad 0<t\leqslant T,\tag{3}$$

此处, $0<\alpha\leqslant 1$, $\Lambda=[0,\ell]$, $\kappa(x)$, $\upsilon(x)$ 是关于 x 的非负函数且不同时恒等于零, $\partial^\alpha y(x,$

* **收稿日期:** 2017-02-23; **修订日期:** 2017-03-19
基金项目: 国家自然科学基金(11471262; 11501450)
作者简介: 朱晓钢(1987—),男,博士生(E-mail: zhuxg590@yeah.net);
聂玉峰(1968—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: yfnie@nwpu.edu.cn).

$t)/\partial t^{\alpha}$ 是 $y(x,t)$ 关于 t 的 α 阶 Caputo 分数阶导数,其定义将在后文中叙述.

分数阶对流扩散方程是经典对流扩散方程的扩展,常用于模拟复杂系统中的反常扩散过程.关于方程组(1)~(3),已经有不少的数值工作,对于 $\kappa(x)=0,\upsilon(x)\neq 0$ 的情形,Zhuang 和 Liu 提出了隐式有限差分方法[3],Jiang 等给出了有限元方法[4],Lin 等则采用 Legendre 多项式建立了谱 Galerkin 方法[5],此外,还有间断有限元法[6]、样条配点法[7]、紧致差分和无网格方法等[8-9].对于 $\kappa(x)\neq 0,\upsilon(x)\neq 0$ 的情形,Izadkhah 等讨论了求解变系数分数阶对流扩散方程的 Gegenbauer 谱方法[10],Saadatmandi 等将未知函数展开成 Sinc 函数和 Legendre 多项式的有限项和,构造了 Sinc-Legendre 配点法[11],Ghandehari 和 Ranjbar 则将方程转化为等价的优化问题,提出求解常系数对流扩散方程的一种新方法(NLPM)[12].最近几年,以分数阶微积分的算子矩阵为基础的算子矩阵方法获得了长足的发展,最典型的是 Haar 小波算子矩阵法[13],这类方法将原方程化简成代数方程组进行求解,因而,非常适合于带记忆效应的分数阶偏微分方程.基于 Jacobi、Chebyshev 和 Legendre 多项式的算子矩阵法参见文献[14-16],它们被用于分数阶对流扩散及扩散波方程的求解,且均具备较高的计算精度.鉴于上述工作,本文基于 Chebyshev cardinal 函数来推导 Riemann-Liouville 分数阶积分的算子矩阵,并运用分数阶微积分的基本性质构造求解方程组(1)~(3)的一种高效算子矩阵法,该方法计算量小,简便易行.最后给出 4 个典型的算例,数值结果及与已知方法的比较展示了其在计算精度上的优势.

1　预备知识

1.1　分数阶微积分

一个实函数 $y(x)$ 属于空间 $C_{\nu}[0,\infty)$,$\nu\in\mathbf{R}$, 如果存在一个大于 ν 的实数 μ 使得 $y(x)=x^{\mu}y_0(x)$,$y_0(x)\in C[0,\infty)$, 同样地, $y(x)$ 属于空间 $C_{\nu}^{m}[0,\infty)$ 当且仅当 $y^{(m)}(x)\in C_{\nu}[0,\infty)$,$m\in\mathbf{Z}_{+}$.设 $y(x)\in C_{\nu}[0,\infty)$,$\nu\geqslant -1$, Riemann-Liouville 分数阶积分的定义是

$$J_x^{\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{y(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},\qquad \alpha>0,$$

特别地,当 $\alpha=0$ 时, $J_x^0y(x)=y(x)$.

设 $y(x)\in C_{-1}^{m}[0,\infty)$, Caputo 分数阶导数的定义如下:

$$D_x^{\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x\frac{y^{(m)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}},$$

即 $D_x^{\alpha}y(x)=J_x^{m-\alpha}y^{(m)}(x)$, 其中, $m-1<\alpha<m$,$m\in\mathbf{Z}_{+}$, 特别地,当 $\alpha=m$ 时, $D_x^{m}y(x)=y^{(m)}(x)$.若 $\alpha,\beta\geqslant 0$, 分数阶积分算子 $J_x^{\mu}(\mu=\alpha,\beta)$ 和分数阶导数算子 D_x^{α} 满足一些基本性质[17]:

$$\begin{cases}J_x^{\alpha}J_x^{\beta}y(x)=J_x^{\alpha+\beta}y(x),\\ J_x^{\alpha}J_x^{\beta}y(x)=J_x^{\beta}J_x^{\alpha}y(x),\\ J_x^{\alpha}D_x^{\alpha}y(x)=y(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}D_x^{k}y(0_+)\frac{x^k}{k!}.\end{cases}\tag{4}$$

1.2　Chebyshev cardinal 函数

Chebyshev cardinal 函数是定义在区间[-1,1]上的一类 cardinal 函数,其定义是[18]

$$\varphi_k(z)=\frac{T_{M+1}(z)}{T_{M+1,z}(z_k)(z-z_k)},\qquad k=1,2,\cdots,M+1,$$

其中 $T_{M+1}(z)$ 为 $[-1,1]$ 上 $M+1$ 次第一类 Chebyshev 多项式, $T_{M+1}(z)=\cos[(M+1)\arccos z]$, $T_{M+1,z}(z)$ 为 $T_{M+1}(z)$ 关于变量 z 的一阶导数, z_k 是 $T_{M+1}(z)$ 的零点,即

$$z_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2M+2}\right),\qquad k=1,2,\cdots,M+1.$$

它们满足 Kronecker 性质 $\varphi_k(z_l)=\delta_{lk}$, 且关于权函数 $1/\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上两两正交,即

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_k(x)\varphi_l(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi/(M+1), & l=k,\\ 0, & l\neq k.\end{cases}$$

对函数对做变换 $x=\ell z/2+\ell/2$, 那么定义在 Λ 上的函数 $y(x)$ 可近似成截断的线性组合

$$y(x)\cong\sum_{k=1}^{M+1}y(x_k)\varphi_k(x),\tag{5}$$

x_k 是 $z_k(k=1,2,\cdots,M+1)$ 的移位零点;若定义域是 $[0,T]$, 将变换更换为 $x=Tz/2+T/2$.

2 Riemann-Liouville 分数阶积分的算子矩阵

设基向量

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{M+1}(x)],$$

若有 $(M+1)\times(M+1)$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}_{M+1}^{\alpha}$ 使得

$$J_x^{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}\cong\boldsymbol{P}_{M+1}^{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(x),\tag{6}$$

则称该矩阵为 Riemann-Liouville 分数阶积分的 Chebyshev cardinal 算子矩阵.由于

$$J_x^{\alpha}\varphi_k(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi_k(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},\qquad k=1,2,\cdots,M+1,$$

对 $J_x^{\alpha}\varphi_k(x)$ 按照式(5)进行展开,有表达式

$$J_x^{\alpha}\varphi_k(x)\cong\sum_{l=1}^{M+1}p_{kl}\varphi_l(x),\qquad k=1,2,\cdots,M+1,\tag{7}$$

将上式整理成矩阵乘积形式,可知满足式(6)的算子矩阵 $\boldsymbol{P}_{M+1}^{\alpha}$ 的结构如下:

$$\boldsymbol{P}_{M+1}^{\alpha}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,M+1}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,M+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{M+1,1} & p_{M+1,2} & \cdots & p_{M+1,M+1}\end{pmatrix}.$$

下面介绍如何计算加权系数 p_{kl}.

首先,借助移位零点,基函数可以改写成

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{T_{M+1,x}(x_k)(x-x_k)}T_{M+1}\left(\frac{2}{\ell}x-1\right)=\frac{2^{2M+1}}{\ell^{M+1}T_{M+1,x}(x_k)}\prod_{j=1,\,j\neq k}^{M+1}(x-x_j),$$

这是由于 $2^{-M}T_{M+1}(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{M+1})$.然后,根据式(5)和(7),可知 p_{kl} 实际上为 $J_x^{\alpha}\varphi_k(x)$ 在 $T_{M+1}(z)$ 的第 l 个移位零点 x_l 处的值,于是有

$$p_{kl}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_l}\frac{\varphi_k(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x_l-\xi)^{1-\alpha}}=$$
$$\frac{2^{2M+1}}{\ell^{M+1}T_{M+1,x}(x_k)\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_l}\frac{1}{(x_l-\xi)^{1-\alpha}}\prod_{j=1,\,j\neq k}^{M+1}(\xi-x_j)\mathrm{d}\xi.\tag{8}$$

注意到式(8)含弱奇异积分,直接计算过于复杂,对积分作变换 $\xi = x_l - 0.5x_l(1+\zeta)$[19],有

$$p_{kl} = \frac{2^{2M+1-\alpha} x_l^{\alpha}}{\ell^{M+1} T_{M+1,x}(x_k)\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+\zeta)^{1-\alpha}} \prod_{j=1,\, j\neq k}^{M+1} \left(x_l - \frac{x_l(1+\zeta)}{2} - x_j \right) \mathrm{d}\zeta . \tag{9}$$

通过观察,上述的弱奇异积分是下列形式的特殊积分:

$$\int_{-1}^{1} (1-\zeta)^{\lambda}(1+\zeta)^{\mu} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \qquad \lambda = 0,\ \mu = \alpha - 1.$$

因此,它的值可以通过 Gauss-Jacobi 积分公式来计算[20-21].本文采用文献[20]中的算法求积分节点和系数,并设为 $\{\omega_i\}_{i=1}^{Q}$, $\{A_i\}_{i=1}^{Q}$, $Q \in \mathbf{Z}_+$.那么,根据式(9), 可推得 p_{kl} 的近似公式

$$p_{kl} \cong \frac{2^{2M+1-\alpha} x_l^{\alpha}}{\ell^{M+1} T_{M+1,x}(x_k)\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{Q} A_i \prod_{j=1,\, j\neq k}^{M+1} \left(x_l - \frac{x_l(1+\omega_i)}{2} - x_j \right).$$

计算每个 p_{kl}, 即得算子矩阵 $\boldsymbol{P}_{M+1}^{\alpha}$, 若区间为 $[0,T]$, 只需将式(9)中的 ℓ 替换成 T 即可.

3　变系数分数阶对流扩散方程的算子矩阵方法

利用上节所得的算子矩阵,构造求解方程组(1)~(3)的一种新的算子矩阵法.在式(1)两端同时作用积分算子 J_t^{α}, 应用性质(4)和初始条件(2),可得与之等价的方程

$$y(x,t) - \psi(x) + \kappa(x) J_t^{\alpha} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \upsilon(x) J_t^{\alpha} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = J_t^{\alpha} f(x,t) . \tag{10}$$

此外,如果在式(1)两端作用的是导数算子 $D_t^{1-\alpha}$, 则有另一种等价形式,即

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \kappa(x) D_t^{1-\alpha} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \upsilon(x) D_t^{1-\alpha} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = D_t^{1-\alpha} f(x,t) .$$

本文方法的构造基于等价方程(10),将二阶导数展开为

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \cong \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(t) , \tag{11}$$

对式(11)关于 x 积分两次,由边界条件(3)得

$$y(x,t) \cong g_0(t) + x \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} + \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_l(t) \int_0^x \int_0^w \varphi_k(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}w . \tag{12}$$

再取 $x = \ell$, 由式(12)可以推出

$$\left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} \cong \frac{g_1(t) - g_0(t)}{\ell} - \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_l(t) \int_0^{\ell} \int_0^w \varphi_k(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}w ,$$

记作 $H(t)$, 并代入式(12),得 $y(x,t)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} y(x,t) &\cong g_0(t) + xH(t) + \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_l(t) \int_0^x \int_0^w \varphi_k(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}w = \\ &\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) g_0(t) + \frac{x}{\ell} g_1(t) + \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_l(t) \int_0^x \int_0^w \varphi_k(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}w - \\ &\frac{x}{\ell} \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_l(t) \int_0^{\ell} \int_0^w \varphi_k(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}w . \end{aligned} \tag{13}$$

然后,对式(13)关于 x 求导,导出 $y(x,t)$ 关于 x 的一阶导数,即

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \cong H(t) + \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{l=1}^{N+1} c_{kl} \varphi_l(t) \int_0^x \varphi_k(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$\frac{g_1(t)-g_0(t)}{\ell}+\sum_{k=1}^{M+1}\sum_{l=1}^{N+1}c_{kl}\varphi_l(t)\int_0^x\varphi_k(s)\mathrm{d}s-$$
$$\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{M+1}\sum_{l=1}^{N+1}c_{kl}\varphi_l(t)\int_0^\ell\int_0^w\varphi_k(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}w. \tag{14}$$

记$\otimes$为 Kronecker 乘积, $\boldsymbol{\Phi}(t),\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是时间和空间方向的基向量, $\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_1$ 分别是由函数 $\psi(x),g_0(t),g_1(t)$ 在 $T_{M+1}(z),T_{N+1}(z)$ 的移位零点上的值构成的列向量,以及系数向量

$$\boldsymbol{C}=[c_{11},c_{12},\cdots,c_{1,N+1},c_{21},c_{22},\cdots,c_{2,N+1},c_{31},\cdots,c_{M+1,N+1}]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{F}=[f(x_1,t_1),f(x_1,t_2),\cdots,f(x_1,t_{N+1}),f(x_2,t_1),f(x_2,t_2),\cdots,$$
$$f(x_2,t_{N+1}),\cdots,f(x_{M+1},t_{N+1})]^{\mathrm{T}},$$

那么,式(11)、(13)和(14)能通过算子矩阵近似地表示成矩阵的乘积形式,即

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\cong\boldsymbol{\Phi}(x)\otimes\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{C}, \tag{15}$$

$$y(x,t)\cong\boldsymbol{\Phi}(x)((\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}})^2\otimes\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{C}-\frac{x}{\ell}\boldsymbol{\Phi}(\ell)((\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}})^2\otimes\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{C}+$$
$$\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{g}_0+\frac{x}{\ell}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{g}_1, \tag{16}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\cong\boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{C}-$$
$$\frac{1}{\ell}\boldsymbol{\Phi}(\ell)((\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}})^2\otimes\boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{\Phi}(t)\left(\frac{\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_0}{\ell}\right). \tag{17}$$

将式(15)、(16)和(17)代入方程(10),并在时间和空间方向分别选择 $T_{N+1}(z),T_{M+1}(z)$ 的移位零点 $t_n,x_k,n=1,2,\cdots,N+1,k=1,2,\cdots,M+1$, 作为配置节点,运用 J_t^α 的算子矩阵 $\boldsymbol{P}_{N+1}^\alpha$, 有

$$\boldsymbol{e}_k^{M+1}((\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}})^2\otimes\boldsymbol{e}_n^{N+1}\cdot\boldsymbol{C}-\frac{x_k}{\ell}\boldsymbol{\Phi}(\ell)((\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}})^2\otimes\boldsymbol{e}_n^{N+1}\cdot\boldsymbol{C}-$$
$$\frac{\boldsymbol{\kappa}(x_k)}{\ell}\boldsymbol{\Phi}(\ell)((\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}})^2\otimes\boldsymbol{e}_n^{N+1}(\boldsymbol{P}_{N+1}^\alpha)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}+$$
$$\boldsymbol{\kappa}(x_k)\boldsymbol{e}_k^{M+1}(\boldsymbol{P}_{M+1}^1)^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_n^{N+1}(\boldsymbol{P}_{N+1}^\alpha)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}-$$
$$\boldsymbol{\upsilon}(x_k)\boldsymbol{e}_k^{M+1}\otimes\boldsymbol{e}_n^{N+1}(\boldsymbol{P}_{N+1}^\alpha)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_k^{M+1}\otimes\boldsymbol{e}_n^{N+1}(\boldsymbol{P}_{N+1}^\alpha)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}(x_k,t_n), \tag{18}$$

其中, $\boldsymbol{e}_n^{N+1},\boldsymbol{e}_k^{M+1}$ 分别是秩为 $N+1$ 和 $M+1$ 的单位矩阵的第 n,k 个行向量,

$$\boldsymbol{G}(x_k,t_n)=\boldsymbol{\kappa}(x_k)\boldsymbol{e}_n^{N+1}(\boldsymbol{P}_{N+1}^\alpha)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\boldsymbol{g}_0-\boldsymbol{g}_1}{\ell}\right)+\boldsymbol{e}_k^{M+1}\boldsymbol{\psi}-\left(1-\frac{x_k}{\ell}\right)\boldsymbol{e}_n^{N+1}\boldsymbol{g}_0-\frac{x_k}{\ell}\boldsymbol{e}_n^{N+1}\boldsymbol{g}_1,$$

此处, $n=1,2,\cdots,N+1,k=1,2,\cdots,M+1$, 且使用了基函数的 Kronecker 性质,即 $\boldsymbol{\Phi}(t_n)=\boldsymbol{e}_n^{N+1}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(x_k)=\boldsymbol{e}_k^{M+1}$.通过式(18)解出加权系数向量 $\boldsymbol{C}$, 再代入式(16),即得方程组(1)~(3)的数值解.数值格式(18)囊括了所求问题的各项参数,系数矩阵与具体问题紧密关联.由于它是一种便捷的矩阵法,考虑到对内存的需求, N,M 的取值应综合权衡实际计算和精度要求.

4 数值算例

本节给出 4 个数值算例,前 3 个计算区域均设为 $[0,\ell]\times[0,T]=[0,1]\times[0,1]$, 误差采用

$$e_2(t,M)=\sqrt{\frac{\ell}{M+1}\sum_{k=1}^{M+1}|y(x_k,t)-y_{\mathrm{N}}(x_k,t)|^2},$$

$$e_{\infty}(t,M)=\max_{1\leqslant k\leqslant M+1}|y(x_k,t)-y_N(x_k,t)|$$

来衡量，$y(x_k,t)$，$y_N(x_k,t)$ 指节点 x_k 上的真实解和数值解，算子矩阵的计算统一选择 50 个积分节点和系数。本文方法（简称 CCOMM）与 Legendre 算子矩阵法（LOMM）[16]、紧致差分法（CFDM）[8]、NLPM[12] 及立方的三角 B-样条配点法（CTBM）[7] 比较以说明其优越性。

算例 1 取 $\kappa(x)=0$，$\upsilon(x)=1$，$f(x,t)=\Gamma(2+\alpha)e^x t-e^x t^{1+\alpha}$ 和初边值条件 $\psi(x)=0$，$g_0(t)=t^{1+\alpha}$，$g_1(t)=et^{1+\alpha}$。真实解是 $y(x,t)=e^x t^{1+\alpha}$。表 1 列出了 LOMM、CFDM 和 CCOMM 在不同的分数阶幂下 $t=1$ 时空间配置节点上的最大绝对误差，由该表可以看出，本文方法的计算精度要优于 LOMM 和 CFDM，即使是在配置节点数较少时，也能获得满意的结果。

算例 2 取

$$\kappa(x)=1,\ \upsilon(x)=1,\ f(x,t)=\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+2x-2$$

和初边值条件 $\psi(x)=x^2$，$g_0(t)=t^2$，$g_1(t)=1+t^2$，易验证真实解 $y(x,t)=x^2+t^2$。令 $\alpha=0.5$，$N=M=9$。表 2 列出了 NLPM 和 CCOMM 在 $t=0.5$ 和 $t=1$ 时一些节点上的绝对误差，数据表明：两种方法计算精度均较高，在相同的参数下 CCOMM 的计算误差比 NLPM 小，这进一步说明了本文方法的优越性。

表 1 不同分数阶幂下 LOMM、CFDM 和 CCOMM 在 $t=1$ 时的绝对误差

Table 1 The absolute errors of LOMM, CFDM and CCOMM for $t=1$ with various fractional orders

α	LOMM & $N=M=10$	CFDM & $N=16$, $M=64$	CCOMM & $N=M=10$
0.1	6.289 7E-5	0.003 3	1.466 7E-6
0.2	7.588 8E-5	0.004 5	1.971 6E-6
0.3	6.817 2E-5	0.004 3	1.937 4E-6
0.4	5.418 6E-5	0.003 2	1.642 0E-6
0.5	4.067 5E-5	0.001 5	1.256 4E-6
0.6	2.389 0E-5	8.106 6E-4	8.774 4E-7
0.7	4.423 4E-6	0.003 6	5.528 8E-7
0.8	1.006 8E-5	0.006 9	3.000 6E-7
0.9	6.068 6E-6	0.010 7	1.188 0E-7

表 2 $\alpha=0.5$ 和 $N=M=9$ 时 NLPM 和 CCOMM 的绝对误差

Table 2 The absolute errors of NLPM and CCOMM for $\alpha=0.5$ and $N=M=9$

x	NLPM & $t=0.5$	NLPM & $t=1$	CCOMM & $t=0.5$	CCOMM & $t=1$
0.1	3.745 0E-4	3.160 0E-4	3.894 7E-7	2.707 0E-6
0.2	6.597 0E-4	5.290 0E-4	7.010 6E-7	4.515 7E-6
0.3	8.579 0E-4	6.410 0E-4	9.359 8E-7	5.675 4E-6
0.4	9.874 0E-4	6.780 0E-4	1.093 4E-6	6.352 5E-6
0.5	1.000 0E-3	6.270 0E-4	1.170 2E-6	6.641 9E-6
0.6	8.935 0E-4	4.680 0E-4	1.160 2E-6	6.568 8E-6
0.7	6.405 0E-4	2.010 0E-4	1.054 0E-6	6.082 1E-6
0.8	2.308 0E-4	1.970 0E-4	8.383 9E-7	5.036 5E-6
0.9	1.850 0E-4	4.000 0E-5	4.950 0E-7	3.159 8E-6

算例 3 考虑分数阶扩散方程，取 $\upsilon(x)=1$，$\psi(x)=x(1-x)$，齐次边值条件和源函数，以及

$$y(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin[(2k+1)\pi x]E_{\alpha}[-(2k+1)^2\pi^2t^{\alpha}],$$

这里的 $E_{\alpha}[\cdot]$ 是指 Mittag-Leffler 函数[17].令 $\alpha=0.75$, 表 3 给出了 $t=0.1$ 时 CTBM 和 CCOMM 的计算误差比较,在计算中,CTBM 取 $N=1\ 000$ 而 CCOMM 仅使用 $N=200$.

表 3 $\alpha=0.75$ 和 $t=0.1$ 时 CTBM 和 CCOMM 的计算误差

Table 3 The computational errors of CTBM and CCOMM for $\alpha=0.75$ and $t=0.1$

M	CTBM & $e_2(0.1,M)$	CTBM & $e_{\infty}(0.1,M)$	CCOMM & $e_2(0.1,M)$	CCOMM & $e_{\infty}(0.1,M)$
10	3.107 20E-4	4.274 68E-4	3.709 6E-8	5.938 0E-8
20	7.038 25E-5	1.376 28E-4	3.586 1E-8	5.014 5E-8
40	2.349 66E-5	6.550 10E-5	3.586 1E-8	5.063 0E-8
80	1.196 67E-5	4.749 00E-5	3.586 1E-8	5.059 3E-8
100	1.020 57E-5	4.532 93E-5	3.586 1E-8	5.056 4E-8

算例 4 考虑变系数分数阶对流扩散方程,给定 $\Lambda=[0,1]$,$\kappa(x)=x$,$\upsilon(x)=\lambda+x$, 初边值条件 $\psi(x)=\mathrm{e}^x$,$g_0(t)=E_{\alpha}[\lambda t^{\alpha}]$,$g_1(t)=\mathrm{e}E_{\alpha}[\lambda t^{\alpha}]$, 以及齐次的源函数.由于 $D_t^{\alpha}E_{\alpha}[\lambda t^{\alpha}]=\lambda E_{\alpha}[\lambda t^{\alpha}]$, 真实解是 $y(x,t)=\mathrm{e}^xE_{\alpha}[\lambda t^{\alpha}]$.取 $\lambda=0.5$,$T=1$,$N=M=60$, 表 4 给出了 $t=0.5$ 时不同分数阶幂下各节点上的绝对误差;固定 $\lambda=0.5$ 和 $\Lambda=[0,1]$, 重新选取 T 分别等于 10,20,30 和 50,表 5 列出了 $\alpha=0.9$ 时 CCOMM 在 $t=T$ 时的计算误差.通过观察易知,本文方法是可靠的,且适用于长时间历程问题的求解,同时,计算精度也令人满意.

表 4 不同分数阶幂下 CCOMM 在 $t=0.5$ 时的绝对误差

Table 4 The absolute errors of CCOMM for $t=0.5$ with various fractional orders

x	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.9$
0.1	1.248 0E-7	9.653 0E-8	5.239 1E-9	2.079 7E-10
0.2	2.180 8E-7	1.513 4E-7	5.773 9E-9	1.847 0E-10
0.3	2.851 3E-7	1.872 5E-7	6.032 0E-9	1.825 6E-10
0.4	3.281 4E-7	2.130 7E-7	6.535 6E-9	1.952 3E-10
0.5	3.472 9E-7	2.311 4E-7	7.355 1E-9	2.197 6E-10
0.6	3.413 1E-7	2.397 3E-7	8.508 3E-9	2.589 3E-10
0.7	3.077 2E-7	2.335 3E-7	9.925 5E-9	3.203 0E-10
0.8	2.429 4E-7	2.030 0E-7	1.113 3E-8	4.131 9E-10
0.9	1.423 0E-7	1.329 0E-7	1.016 9E-8	5.038 5E-10

表 5 $\alpha=0.9$ 和 $t=T$ 时 CCOMM 的计算误差

Table 5 The computational errors of CCOMM for $\alpha=0.9$ and $t=T$

T	N	M	$e_2(T,M)$	$e_{\infty}(T,M)$
10	10	10	1.178 0E-4	1.629 8E-4
20	20	10	3.382 6E-5	4.684 6E-5
30	30	20	1.047 0E-5	2.078 0E-5
50	50	20	7.299 8E-5	1.449 6E-4

5 结　　论

本文以 Chebyshev cardinal 函数为基础,推导了分数阶积分的一个有效算子矩阵,并依此建立了求解变系数分数阶对流扩散方程的一种新的算子矩阵法.给出几个典型的算例,分析了它和一些现存方法的数值结果,实验数据表明:本文方法是稳定收敛的,与已知方法相比,其能

在相同的离散参数下获得更为精确的数值解.此外,本文方法可以推广至二维、三维和带时空分数阶导数的偏微分方程,以及应用领域内其他更复杂的分数阶模型问题.

参考文献(References):

[1] ICHISE M, NAGAYANAGI Y, KOJIMA T. An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes[J]. *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry*, 1971, **33**(2): 253-265.

[2] COLE K S. Electric conductance of biological systems[J]. *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, 1933, **1**: 107-116.

[3] ZHUANG P, LIU F. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation [J]. *Journal of Applied Mathematic and Computing*, 2006, **22**(3): 87-99.

[4] JIANG Yingjun, MA Jingtang. High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(11): 3285-3290.

[5] LIN Yumin, XU Chuanjun. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, **225**(2): 1533-1552.

[6] MUSTAPHA K, ABDALLAH B, FURATI K M, et al. A discontinuous Galerkin method for time fractional diffusion equations with variable coefficients[J]. *Numerical Algorithms*, 2016, **73**(2): 517-534.

[7] YASEEN M, ABBAS M, ISMAIL A I, et al. A cubic trigonometric B-spline collocation approach for the fractional sub-diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **293**: 311-319.

[8] CUI Ming-rong. Compact finite difference method for the fractional diffusion equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(20): 7792-7804.

[9] LIU Q, GU Y T, ZHUANG P, et al. An implicit RBF meshless approach for time fractional diffusion equations[J]. *Computational Mechanics*, 2011, **48**(1): 1-12.

[10] IZADKHAH M M, SABERI-NADJAFI J. Gegenbauer spectral method for time-fractional convection-diffusion equations with variable coefficients[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015, **38**(15): 3183-3194.

[11] SAADATMANDI A, DEHGHAN M, AZIZI M-R. The Sinc-Legendre collocation method for a class of fractional convection-diffusion equations with variable coefficients[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, **17**(11): 4125-4136.

[12] GHANDEHARI M A M, RANJBAR M. A numerical method for solving a fractional partial differential equation through converting it into an NLP problem[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2013, **65**(7): 975-982.

[13] CHEN Y M, WU Y B, CUI Y H, et al. Wavelet method for a class of fractional convection-diffusion equation with variable coefficients[J]. *Journal of Computational Science*, 2010, **1**(3): 146-149.

[14] BHRAWY A H, ZAKY M. A fractional-order Jacobi Tau method for a class of time-fractional PDEs with variable coefficients[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, **39**(7): 1765-1779.

[15] NEMATI S, SEDAGHAT S. Matrix method based on the second kind Chebyshev polynomials for solving time fractional diffusion-wave equations[J]. *Journal of Applied Mathematics and*

Computing, 2016, **51**(1/2): 189-207.

[16] DOHA E H, BHRAWY A H, EZZ-ELDIEN S S. An efficient Legendre spectral Tau matrix formulation for solving fractional subdiffusion and reaction subdiffusion equations[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2015, **10**(2): 021019. DOI: 10.1115/1.4027944.

[17] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.

[18] Boyd J P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*[M]. Mineola: Dover Publications Inc, 2001.

[19] PANG Guofei, CHEN Wen, FU Zhoujia. Space-fractional advection—dispersion equations by the Kansa method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, **293**: 280-296.

[20] ELHAY S, KAUTSKY J. Algorithm 655: IQPACK: FORTRAN subroutines for the weights of interpolatory quadratures[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1987, **13**(4): 399-415.

[21] GAUTSCHI W. High-order Gauss-Lobatto formulae[J]. *Numerical Algorithms*, 2000, **25**(1): 213-222.

An Operational Matrix Method for Fractional Advection-Diffusion Equations With Variable Coefficients

ZHU Xiaogang, NIE Yufeng

(*Department of Applied Mathematics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710129, *P.R.China*)

Abstract: A numerical method for the Caputo-fractional advection-diffusion equations with variable coefficients was investigated. Based on Chebyshev cardinal functions, an effective operational matrix was derived for Riemann-Liouville fractional integral, and with it, a new operational matrix method was proposed for the fractional advection-diffusion equations with variable coefficients. This method reduces the equation to an algebraic system and is characterized by small computing cost and easy programming. The numerical results and the comparisons with some existing methods illustrate that it is convergent and possesses advantages in accuracy.

Key words: fractional calculus; Chebyshev cardinal functions; fractional advection-diffusion equation; operational matrix method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11471262; 11501450)

引用本文/Cite this paper:

朱晓钢, 聂玉峰. 变系数分数阶对流扩散方程的一种算子矩阵方法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 104-112.

ZHU Xiaogang, NIE Yufeng. An operational matrix method for fractional advection-diffusion equations with variable coefficients[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 104-112.