

Gauss 色噪声激励下含黏弹力 摩擦系统的随机响应分析*

孙娇娇, 徐伟, 林子飞, 周杨

(西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

摘要: 研究了 Gauss 色噪声激励下含黏弹力、弱非线性阻尼的摩擦振子的随机响应.将适用于光滑系统的随机平均法推广到了非光滑摩擦系统,进而得到系统振幅、位移及速度的稳态概率密度函数.同时结合材料的黏弹性,研究了摩擦力和 Gauss 色噪声对系统响应的影响.研究表明,摩擦力、黏弹力及噪声项的相关参数均可引起随机 P-分岔,并且在一定范围内系统响应对摩擦力极为敏感.此外,理论结果与 Monte Carlo 模拟结果吻合较好,验证了方法的有效性.

关键词: Gauss 色噪声; 摩擦系统; 黏弹力; 随机 P-分岔

中图分类号: O324

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370519

引 言

摩擦是一种典型的非光滑因素,是发生在有相对运动或相对运动趋势的接触固体界面上的切向力,它广泛存在于生活和工程实践之中.在许多方面,如汽车轮胎、离合器、制动器和弦乐器等,摩擦起着积极的作用.然而在数控机床、机器人和其他精密仪器系统中,摩擦力可能会引起振动、颤振,甚至引起噪声及跟踪误差等不利因素.研究摩擦系统有助于更好地利用摩擦力的益处,同时减少其带来的危害,促进现代机械的发展.正因为如此,摩擦系统受到了广泛地关注,许多学者对摩擦力的特性及其模型进行了探讨和总结.文献[1]较全面地介绍了应用于不同领域的摩擦模型和摩擦力的典型动态行为.刘丽兰等^[2]描述了机械系统中的摩擦现象,同时系统地介绍了常用的摩擦模型及它们的构成、特点及适用范围,为研究中摩擦模型的选择提供了参考.

自从 Den Hartog^[3]在 1931 年确立了干摩擦系统的理论基础以来,有关确定性干摩擦系统的理论得到了蓬勃发展^[4-5].关于确定性摩擦系统的研究主要集中于摩擦引起的自激运动和受迫运动,常伴随有粘滑运动,甚至出现分岔及混沌运动^[6-10].随机因素广泛存在于物理系统中,可能对物理系统产生很大影响.然而有关摩擦系统的随机动力学方面的研究很少,且主要集中于数值算法的研究.文献[11]研究了非线性阻尼系统的近共振响应.Sun(孙建桥)^[12]应用基于短时 Gauss 近似的广义胞映射方法研究了 Coulomb(库伦)摩擦系统的随机响应.冯奇等^[13]建

* 收稿日期: 2016-06-28

基金项目: 国家自然科学基金(11532011;11472212)

作者简介: 孙娇娇(1990—),女,硕士生(E-mail: jiao5881409@mail.nwpu.edu.cn);

徐伟(1957—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: weixu@nwpu.edu.cn).

立了摩擦随机系统的离散模型,用数值方法研究了随机粘滑运动.文献[14]通过将摩擦因数等效为普通的摩擦因数与加性 Gauss 白噪声之和研究了典型的质量-传送带模型的随机分岔行为.文献[15]应用等效非线性方法研究了 Gauss 白噪声激励下含有 Coulomb 摩擦力的非线性电磁能量采集器的最优负载电阻问题.

随着现代新材料、新结构的应用,非线性研究中原来不考虑的物质性质,尤其是材料的黏弹性性质近年来引起了众多科学家的广泛关注.材料的黏弹性具有多种表现形式,本文主要考虑具有指数积分型黏弹项.实验证明这种黏弹性材料不仅可以储存能量,还可以作为阻尼耗散系统的能量.黏弹性系统的研究已经取得了很好的成果,许多学者的研究表明在一定范围内材料的黏弹性对系统产生很大的影响.文献[16]研究了参数随机激励下单自由度线性黏弹系统的随机稳定性.Cai(蔡国强)等^[17]通过将黏弹项等价于刚度项和阻尼项改进了处理随机黏弹系统的方法.文献[18]应用随机平均法研究了随机宽带噪声激励下含强非线性恢复力的黏弹系统的响应分析.Zhao(赵香荣)等^[19]探讨了 Gauss 白噪声激励下黏弹碰撞系统的稳态响应.

基于此,本文结合材料的黏弹性,研究随机摩擦系统的动力学行为,将随机平均法推广到摩擦系统中,研究随机摩擦系统的稳态响应及随机 P-分岔现象,并验证本文方法的有效性.

1 随机平均法

本文研究了 Gauss 色噪声激励下具有指数积分型黏弹项非线性阻尼摩擦系统,其运动方程如下:

$$\ddot{x} + \int_0^t G(t-s)x(s)ds + \omega_0^2 x + 2c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x}^3 + f_k \operatorname{sgn}(\dot{x}) = \xi(t), \quad (1)$$

式中 x, \dot{x}, \ddot{x} 分别表示位移、速度和加速度,“() ”表示关于时间 t 的导数; ω_0 表示系统的自然频率, c_1, c_2 是小参数; f_k 表示摩擦力的模, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 代表符号函数

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0, \\ 0, & \dot{x} = 0, \\ -1, & \dot{x} < 0; \end{cases}$$

$\xi(t)$ 是 Gauss 色噪声且满足如下条件:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad R(|t-s|) = \langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right),$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示数学期望, τ 是色噪声的相关时间, D 是色噪声的强度.

方程(1)的左边第二项代表黏弹力,为了表示方便,用 Z 来代替它,即

$$Z = \int_0^t G(t-s)x(s)ds, \quad (2)$$

式中 $G(t)$ 表示具有 Maxwell 型的松弛函数^[20],

$$G(t) = \sum_i \beta_i \exp(-t/\lambda_i), \quad \lambda_i > 0,$$

式中 λ_i 表示松弛时间, β_i 是黏弹力的数量级, $i = 1, 2, \dots$.

由于所有激励项的系数比较小,且本文主要考虑系统的稳态响应,故根据文献[21],黏弹力可以等效为刚度项和阻尼项的和,则方程(2)转化为如下等效形式:

$$Z = \int_0^t G(t-s)x(s)ds \doteq \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{1 + \lambda_i^2 \bar{\omega}^2} (x - \lambda_i \dot{x}), \quad (3)$$

式中 $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$.

将方程(3)代入方程(1),原始系统转化为不含黏弹力的一般摩擦系统

$$\ddot{x} + \left(\omega_0^2 + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{1 + \lambda_i^2 \bar{\omega}^2} \right) x + \left(2c_1 - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i^2}{1 + \lambda_i^2 \bar{\omega}^2} \right) \dot{x} + c_2 \dot{x}^3 + f_k \operatorname{sgn}(\dot{x}) = \xi(t). \quad (4)$$

方程(4)对应的无阻尼自由振动的运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \quad (5)$$

式中

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{1 + \lambda_i^2 \bar{\omega}^2}. \quad (6)$$

无阻尼自由振动系统的势能函数和总能量可表示为

$$U(x) = \int_0^x \omega_1^2 y dy = \frac{1}{2} \omega_1^2 x^2, \quad (7)$$

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x). \quad (8)$$

系统做无阻尼运动时,系统的总能量和周期为常数,周期可以由下式给出:

$$T = \oint \frac{1}{\sqrt{2H - 2U(x)}} dx = 4 \int_0^A \frac{1}{\sqrt{2H - 2U(x)}} dx, \quad (9)$$

式中 A 是无阻尼运动的振幅.

考虑 $i = 1$, 由于 $\bar{\omega} = 2\pi/T$, 利用方程(6)~(9)可以得到平均频率 $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega}^2 = \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2 \lambda^2 - 1 + \sqrt{(\omega_0^2 \lambda^2 + 1)^2 + 4\beta \lambda^3}}{2\lambda^2}. \quad (10)$$

由于各项激励的系数 c_1, c_2, f_k, β 和噪声强度 D 取值比较小,方程(4)是拟保守系统,系统运动可以看成是拟周期运动.利用标准随机平均法,引入变换

$$X = x(t) = A \cos \Phi, \quad \dot{X} = \dot{x}(t) = -A \omega_1 \sin \Phi, \quad \Phi = \omega_1 t + \Theta, \quad (11)$$

将方程(11)代入方程(4),得到关于 A 和 Θ 的随机微分方程:

$$\begin{cases} \dot{A} = -c_e A \sin^2 \Phi - c_2 A^3 \omega_1^2 \sin^4 \Phi - \frac{f_k}{\omega_1} \operatorname{sgn}(A \omega_1 \sin \Phi) \sin \Phi - \frac{1}{\omega_1} \xi(t) \sin \Phi, \\ \dot{\Theta} = -\sin \Phi \cos \Phi (c_e + c_2 A^2 \omega_1^2 \sin^2 \Phi) - \\ \frac{f_k}{A \omega_1} \operatorname{sgn}(A \omega_1 \sin \Phi) \cos \Phi - \frac{1}{A \omega_1} \xi(t) \cos \Phi, \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$c_e = 2c_1 - \frac{\beta \lambda^2}{1 + \lambda^2 \bar{\omega}^2}.$$

对方程(12)进行随机平均和确定性平均,得到关于 A 和 Θ 的平均后的 Itô 随机微分方程:

$$\begin{cases} dA = \left(-\frac{1}{2} c_e A - \frac{3}{8} c_2 \omega_1^2 A^3 - \frac{2}{\omega_1 \pi} f_k + \frac{\pi S(\omega_1)}{2A \omega_1^2} \right) dt + \sqrt{\frac{\pi S(\omega_1)}{\omega_1^2}} dW_1(t), \\ d\Theta = \sqrt{\frac{\pi S(\omega_1)}{A^2 \omega_1^2}} dW_2(t), \end{cases} \quad (13)$$

式中 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 是两个相互独立的标准 Wiener(维纳)过程,

$$S(\omega_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \cos \omega_1 s R(s) ds = \frac{D}{(1 + \tau^2 \omega_1^2) \pi}.$$

方程(13)表明 dA 只与振幅 A 有关,因此得到关于振幅 A 的概率密度函数 $p(A, t | A_0, t_0)$ 的一维 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A} \left[- \left(-\frac{1}{2} c_e A - \frac{3}{8} c_2 \omega_1^2 A^3 - \frac{2}{\omega_1 \pi} f_k + \frac{\pi S(\omega_1)}{2A\omega_1^2} \right) p \right] + \frac{\pi S(\omega_1)}{2\omega_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial A^2}. \quad (14)$$

当只考虑稳态概率密度函数时,求得振幅的稳态概率密度函数

$$p(A) = \frac{C}{B(A)} \exp \left(2 \int \frac{V(A)}{B(A)} dA \right), \quad (15)$$

式中 C 是归一化常数,

$$V(A) = -\frac{1}{2} c_e A - \frac{3}{8} c_2 \omega_1^2 A^3 - \frac{2}{\omega_1 \pi} f_k + \frac{\pi S(\omega_1)}{2A\omega_1^2}, \quad (16)$$

$$B(A) = \frac{\pi S(\omega_1)}{\omega_1^2}. \quad (17)$$

根据方程(13), A 和 Θ 的稳态联合概率密度函数 $p(A, \Theta)$ 满足下面的方程:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial A} (V(A)p) + \frac{1}{2} B(A) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial A^2} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} \right). \quad (18)$$

基于方程(18)求得 $p(A, \Theta)$ [22]:

$$p(A, \Theta) = p(A)p(\Theta) = \frac{1}{2\pi} p(A). \quad (19)$$

方程(19)表明,在一次近似中,平稳响应的相位和振幅是两个独立的随机过程,且相位服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布.

利用方程(19)及变换(11)求出位移 x 和速度 \dot{x} 的稳态联合概率密度函数

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{\omega_1 A} p(A, \Theta) = \frac{1}{2\pi \omega_1 A} p(A). \quad (20)$$

方程(20)积分得到关于位移 x 和速度 \dot{x} 的稳态边际概率密度函数 $p(x)$ 和 $p(\dot{x})$:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \dot{x}) d\dot{x}, \quad (21)$$

$$p(\dot{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \dot{x}) dx. \quad (22)$$

2 方法的有效性

为了验证理论方法的有效性,本文给出了振幅的稳态概率密度函数及其对数稳态概率密度函数的解析解和 Monte Carlo 模拟解,同时引入振幅均值和均方的相对误差.

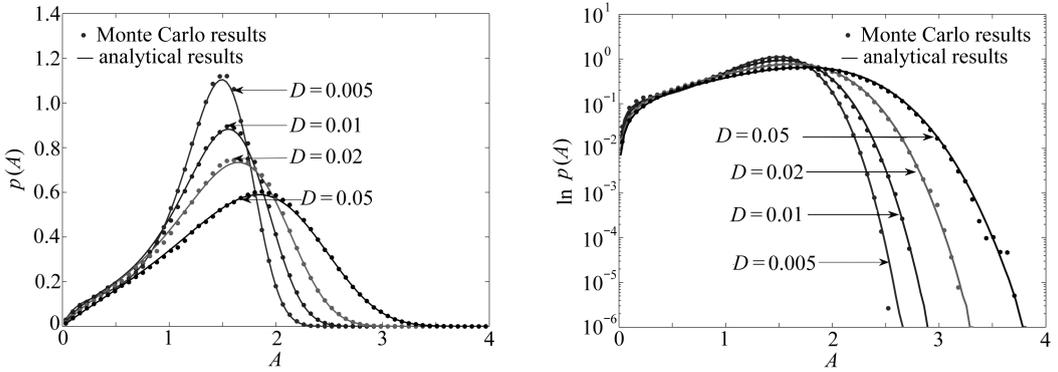
为了方便计算,对原始系统(1)进行数值模拟时,用一阶微分方程得到黏弹力 [18]

$$\dot{Z} = -\frac{1}{\lambda} Z + \beta x. \quad (23)$$

应用随机四阶 Runge-Kutta 算法 [23] 对原始系统进行 Monte Carlo 模拟.在区间 $[-4, 4] \times [-4, 4]$ 里均匀选取 16 个初值,选取迭代步长 $\Delta t = 0.001$,迭代步数 $N = 5E7$,对实际系统,当时间足

够大后便趋于稳态,故本文在进行数值模拟时,为保证系统达到稳态,舍去瞬态 2E7。

图 1 给出了振幅的稳态概率密度函数及振幅的稳态概率密度函数的对数函数随噪声强度变化的结果,其中系统参数为 $c_1 = 0.005, \tau = 0.8, f_k = 0.01, \lambda = 1, \beta = 0.07, c_2 = 0.01$ 。如图所示,不同噪声强度下,解析结果与数值模拟结果差异较小,说明了本文所采用的方法是有效的。同时,随着噪声强度的增大,系统振动越来越剧烈。



(a) 振幅稳态概率密度函数

(b) 振幅稳态概率密度函数的对数函数

(a) The probability density functions (PDFs) of amplitude

(b) The logarithmic functions of PDFs of amplitude

图 1 不同噪声强度下,振幅稳态概率密度函数及其对数函数

Fig. 1 PDFs of amplitude and their logarithmic functions with different values of intensity of noise

图 1 定性研究了方法的有效性,为了进一步说明方法的有效性,本文引入相对误差 δ_r 定量地研究方法的合理性。相对误差由下式给出:

$$\delta_r = \frac{|m_a - m_n|}{m_n}, \quad (24)$$

式中 m_a 表示解析结果的各阶矩, m_n 表示数值模拟结果的各阶矩, $|\cdot|$ 表示取绝对值。

表 1 不同噪声强度下振幅均值和均方的相对误差

Table 1 Relative errors of the mean and the mean square of amplitude with different values of intensity of noise

D	$m_a(A)$	$m_n(A)$	$\delta_r(m(A)) / \%$	$m_a(A^2)$	$m_n(A^2)$	$\delta_r(m(A^2)) / \%$
0.005	1.313 419	1.314 698	0.10	1.900 256	1.901 869	0.09
0.01	1.365 859	1.378 372	0.91	2.090 428	2.124 170	1.59
0.02	1.466 218	1.476 936	0.73	2.439 094	2.466 311	1.10
0.05	1.671 069	1.676 341	0.31	3.206 236	3.222 335	0.50

表 1 给出了不同噪声强度下均值和均方的数值结果、解析结果及它们的相对误差。如表 1 所示,振幅均值和均方的相对误差的最大值为 1.59%,最小值为 0.09%。此外,75%的相对误差小于 1%,且所有的结果都不超过 2%。这些数据进一步证明了解析方法的有效性。

3 随机 P-分岔

关于随机系统的研究表明^[19,21]系统某些参数变化能引起随机 P-分岔现象。基于此,本文主要考虑 Gauss 色噪声、黏弹力及摩擦力对系统随机 P-分岔的影响。

Gauss 色噪声对系统的影响主要体现在噪声强度 D 和相关时间 τ 变化时系统响应的改变。图 2 和图 3 表明随着参数 D 和 τ 的变化,位移和速度的稳态概率密度函数从单峰分布变为三峰分布,即系统出现了随机 P-分岔。此外,从图 2 和图 3 可以看出位移和速度的稳态概率密度

函数基本相同。

黏弹力对系统的影响主要体现在松弛时间 λ 和黏弹力量级 β 变化引起系统响应的改变。图 4 和图 5 表明当 β 和 λ 增加时,随机 P-分岔发生了。但是,位移的稳态概率密度函数分布的变化与图 2 和图 3 有所不同,具体地说,图 4 和图 5 中位移的稳态概率密度函数的分布当 β 和 λ 改变时从单峰分布变为三峰分布继而变为双峰分布,然而,在图 2 和图 3 中其仅出现三峰分布与单峰分布两种状态。

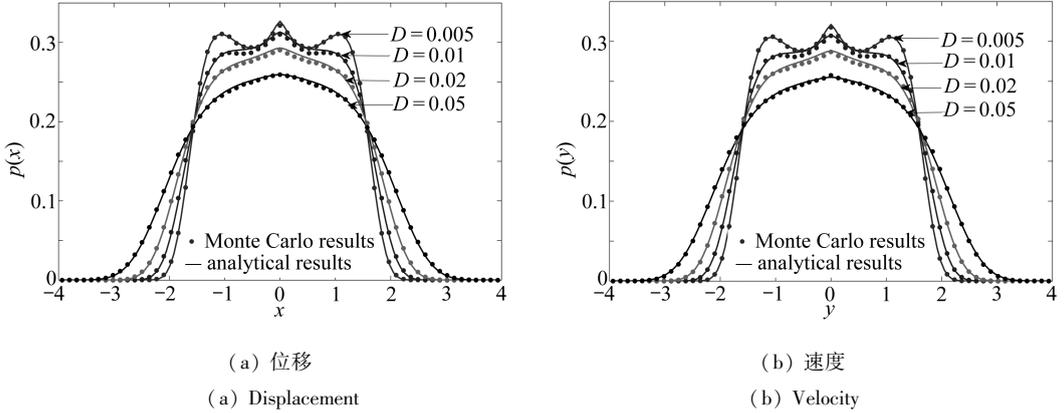


图 2 噪声强度取不同值时,系统响应的稳态概率密度函数,

$$c_1 = 0.005, \tau = 0.8, f_k = 0.01, \lambda = 1, \beta = 0.07, c_2 = 0.01$$

Fig. 2 PDFs of system responses with different values of intensity of noise for

$$c_1 = 0.005, \tau = 0.8, f_k = 0.01, \lambda = 1, \beta = 0.07, c_2 = 0.01$$

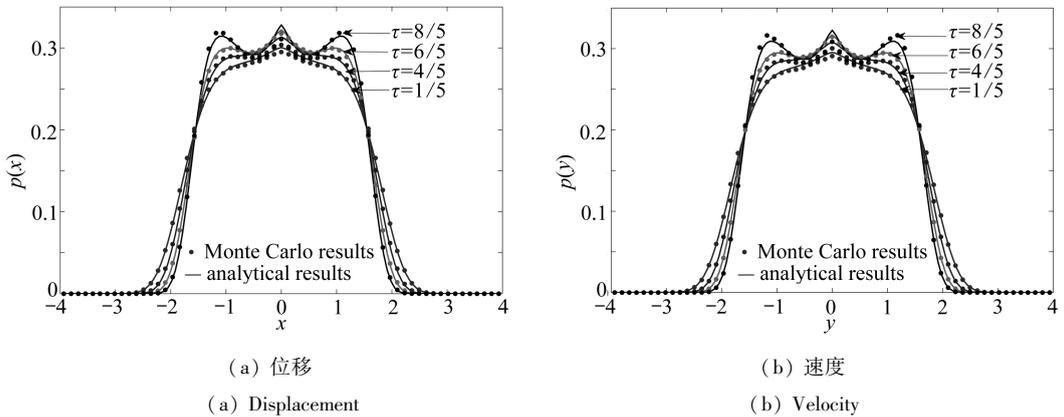


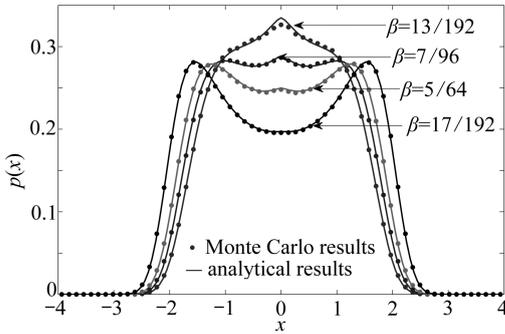
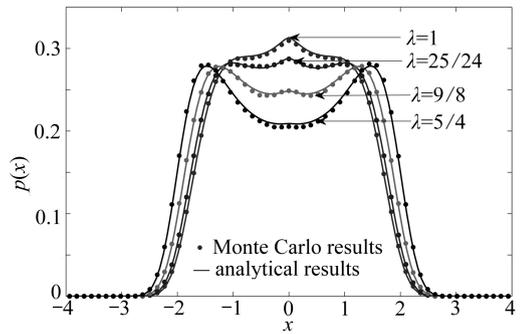
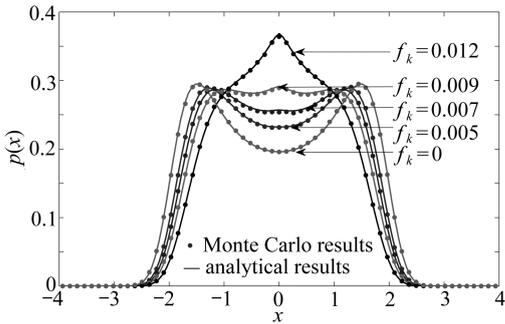
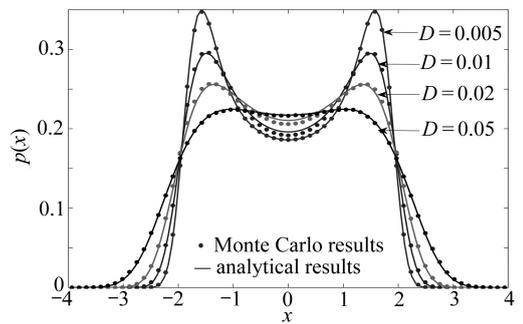
图 3 相关时间取不同值时,系统响应的稳态概率密度函数,

$$c_1 = 0.005, D = 0.01, f_k = 0.01, \lambda = 1, \beta = 0.07, c_2 = 0.01$$

Fig. 3 PDFs of system responses under different values of correlation time for

$$c_1 = 0.005, D = 0.01, f_k = 0.01, \lambda = 1, \beta = 0.07, c_2 = 0.01$$

图 6 表明当 $f_k = 0.007$ 时,位移的稳态概率密度函数服从双峰分布;当 $f_k = 0.009$ 时,它服从三峰分布;而当 $f_k = 0.012$ 时,位移的稳态概率密度函数服从单峰分布。由此可得,摩擦力的变化导致系统发生随机 P-分岔。结合图 2 和图 7 可以发现,摩擦力的微小改变使得系统稳态概率密度函数的分布产生很大的变化。同时,对其他参数的分岔图的分析都支持上述观点,且表明摩擦力的存在导致三峰分布的出现。

图 4 β 取不同值时,位移的稳态概率密度函数Fig. 4 PDFs of displacement under different β values图 5 λ 取不同值时,位移的稳态概率密度函数Fig. 5 PDFs of displacement under different λ values图 6 f_k 取不同值时,位移的稳态概率密度函数Fig. 6 PDFs of displacement under different f_k values图 7 $f_k = 0$, D 取不同值时,位移的稳态概率密度Fig. 7 $f_k = 0$, PDFs of displacement under different D values

4 结 论

本文通过对 Gauss 色噪声激励下含黏弹力、弱非线性阻尼摩擦系统的研究,发现 Gauss 色噪声的强度和相干时间、黏弹力的松弛时间和量级、摩擦力的改变都可以使得系统发生随机 P-分岔.此外还发现,在一定范围内系统响应对摩擦力极为敏感.文中所有图像的数值结果与解析结果拟合较好,证明了解析解的有效性.

致谢 作者衷心感谢西北工业大学创新创业种子基金(Z2016161)对本文的资助.

参考文献 (References):

- [1] Berger E J. Friction modeling for dynamic system simulation[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, **55**(6): 535-577.
- [2] 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 等. 机械系统中摩擦模型的研究进展[J]. *力学进展*, 2008, **38**(2): 201-211. (LIU Li-lan, LIU Hong-zhao, WU Zi-ying, et al. An overview of friction models in mechanical systems[J]. *Advances in Mechanics*, 2008, **38**(2): 201-211. (in Chinese))
- [3] Den Hartog J P. Forced vibration with combined Coulomb and viscous damping[J]. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineering*, 1931, **53**: 107-115.
- [4] Wiercigroch M, de Kraker B. *Applied Nonlinear Dynamics and Chaos of Mechanical Systems With Discontinuities*[M]//World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Mono-

- graphs and Treatises*. Vol 28. Wiercigroch M, de Kraker B, ed. World Scientific Publishing Co Inc, 2000.
- [5] Wriggers P, Nackenhorst U. *Analysis and Simulation of Contact Problems*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [6] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. *Nature*, 1976, **261**: 459-467.
- [7] Moon F C, Shaw S W. Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1983, **18**(6): 465-477.
- [8] Paidoussis M P, Moon F C. Nonlinear and fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, **2**(6): 567-591.
- [9] Divenyi S M, Savi A, Wiercigroch M, et al. Drill-string vibration analysis using non-smooth dynamics approach[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **70**(2): 1017-1035.
- [10] Berger E J, Mackin T J. On the walking stick-slip problem [J]. *Tribology International*, 2014, **75**: 51-60.
- [11] Brouwers J J H. Response near resonance of non-linearly damped systems subjected to random excitations with application to marine risers[J]. *Ocean Engineering*, 1982, **9**(3): 235-257.
- [12] SUN Jian-qiao. Random vibration analysis of a nonlinear system with dry friction damping by the short-time Gaussian cell mapping method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **180**(5): 785-795.
- [13] 冯奇, 张相庭. 单自由度摩擦系统离散模型[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(8): 853-861. (FENG Qi, ZHANG Xiang-ting. The discrete models on a frictional single degree of freedom system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(8): 853-861. (in Chinese))
- [14] Gaus N, Proppe C. *Bifurcation Analysis of Stochastic Non-Smooth Systems*[M]//*IUTAM Symposium on Nonlinear Stochastic Dynamics and Control*. Springer Netherlands, 2011: 201-209.
- [15] TIAN Yong-pi, WANG Yong, JIN Xiao-ling, et al. Optimal load resistance of randomly excited nonlinear electromagnetic energy harvester with Coulomb friction[J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, **23**(9): 95001-95012.
- [16] Ariaratnam S T. Stochastic stability of linear viscoelastic systems[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1993, **8**(3/4): 153-155.
- [17] CAI Guo-qiang, Lin Y K, XU Wei. Visco-elastic systems under both additive and multiplicative random excitations [M]//*Computational Stochastic Mechanics*. Rotterdam, Netherlands, 1998: 411-416.
- [18] ZHU Wei-qiu, CAI Guo-qiang. Random vibration of viscoelastic system under broad-band excitations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, **46**(5): 720-726.
- [19] ZHAO Xiang-rong, XU Wei, GU Xu-dong, et al. Stochastic stationary responses of a viscoelastic system with impacts under additive Gaussian white noise excitation[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2015, **431**: 128-139.
- [20] Christensen R M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*[M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1982.
- [21] LIU Zhong-hua, ZHU Wei-qiu. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems with delayed feedback control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **299**: 178-195.
- [22] Roberts J B. Stationary response of oscillators with nonlinear damping to random excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, **50**(1): 145-156.

- [23] Honeycutt R L. Stochastic Runge-Kutta algorithms II. Colored noise[J]. *Phys Rev A*, 1992, **45** (2): 604-610.

Random Responses Analysis of Friction Systems With Viscoelastic Forces Under Gaussian Colored Noise Excitation

SUN Jiao-jiao, XU Wei, LIN Zi-fei, ZHOU Yang

(School of Natural and Applied Sciences, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P.R.China)

Abstract: The stochastic responses of non-linearly damped friction oscillators with viscoelastic forces under Gaussian colored noise excitation were investigated. The stochastic averaging method, which is applicable to smooth systems, was extended to non-smooth friction systems, and the stationary probability density functions of the amplitude, displacement and velocity of the system were obtained. In view of the material viscoelastic properties, the effects of friction and Gaussian colored noise on the responses of the system were studied. The study shows that the parameters of friction force, viscoelastic force and noise may induce stochastic P-bifurcations, and the system responses are very sensitive to the friction force in a certain range. In addition, the theoretical results are in good agreement with the Monte Carlo simulation results, which verifies the rationality of the proposed method.

Key words: Gaussian colored noise excitation; friction system; viscoelastic force; stochastic P-bifurcation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11532011;11472212)

引用本文/Cite this paper:

孙娇娇, 徐伟, 林子飞, 周杨. Gauss 色噪声激励下含黏弹力摩擦系统的随机响应分析[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(1): 109-117.

SUN Jiao-jiao, XU Wei, LIN Zi-fei, ZHOU Yang. Random responses analysis of friction systems with viscoelastic forces under Gaussian colored noise excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 109-117.