

# 噪声激励下水平扫视眼动系统的随机分岔\*

张祥云, 吴志强

(天津大学 机械工程学院 力学系;  
天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

**摘要:** 研究了眼动系统在神经噪声作用下的随机分岔现象.首先,基于水平眼动系统模型,用加性的 Gauss(高斯)白噪声模拟神经系统中的噪声,建立眼动系统的随机动力学模型.其次,利用数值算法得到眼球运动位移的 Poincaré 分岔图和系统在不同参数下的位移和速度的稳态联合概率密度以及位移的稳态概率密度.研究发现:噪声强度和抑制性神经元的作用强度都能诱导产生随机 P 分岔现象,使得位移的稳态概率密度出现峰的个数从 1 到 3 的转换,间歇性眼球震颤产生.此外,还发现当抑制性神经元的作用强度增大到一定值时,稳态概率密度始终呈现单峰结构.该结论对此类疾病的治疗有一定的指导作用.

**关键词:** 眼动系统; 眼球震颤; 稳态概率密度; Gauss 白噪声

**中图分类号:** O322

**文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370513

## 引言

眼球运动在人类的视知觉中有着重要的作用,其正常与否对人类的学习、工作和日常生活有着重要的影响.眼球震颤是一类较为常见的眼球运动疾病,其主要表现为双眼不自主的、有节律的双边摆动,且患者有不同程度的视功能障碍.目前为止,对眼球震颤的研究主要集中在临床医学上<sup>[1-3]</sup>,其发病机理还未完全弄清楚,该类疾病的诊断和治疗仍面临挑战.近年来,借助非线性动力学的方法揭示眼球震颤机理的研究逐渐受到关注.

陈维毅等提出了眼球的三维运动模型以及相应的动力学方程组,模拟了钟摆型眼球震颤,计算了这种情况下眼球运动的角度、角速度等随时间的变化<sup>[4-5]</sup>.Broomhead 等建立了水平扫视眼动系统的动力学模型,模拟了不同类型的眼球震颤<sup>[6]</sup>,之后,通过全局和局部稳定性分析以及数值模拟,揭示了模型丰富的分岔结构<sup>[7]</sup>.Laptey 等考虑了抑制性神经元在眼动神经系统中的作用,提出了更符合生理意义的眼动模型,对模型进行稳定性分析,用 Hopf 分岔机制解释了眼球震颤的产生<sup>[8]</sup>.Akman 等利用非线性时间序列分析方法对实验和眼动控制系统模型模拟得到的波形数据进行处理,探讨了平衡点的稳定性,说明了急性性眼球震颤是由平衡点的分岔引起的<sup>[9]</sup>.Barreiro 等对眼球运动的脑干-小脑神经通路模型进行了分岔分析,指出脑干神经元和小脑的连接模式和强度的微小变化都能导致 Hopf 分岔,从而产生眼球震颤<sup>[10]</sup>.目前,有关

\* 收稿日期: 2016-09-11; 修订日期: 2016-12-28

基金项目: 国家自然科学基金(11372211; 11672349)

作者简介: 张祥云(1988—),女,博士(E-mail: qq13610673252@163.com);

吴志强(1968—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhiqwu@tju.edu.cn).

眼球震颤动力学的研究属于确定性动力学的范畴,神经噪声对眼球运动的影响尚未考虑。

在生物神经系统中,神经元的放电过程总是受到各种噪声的影响,这些噪声主要来源于离子通道打开和关闭、蛋白质产生和退化、突触囊泡融合的随机性以及膜电阻引起的 Johnson(约翰逊)噪声和散粒噪声等<sup>[11]</sup>。本文考虑神经系统中的噪声对眼球运动的影响,建立眼动系统的随机动力学模型,从随机动力学的角度探讨了间歇性眼球震颤的动力学机理。

## 1 眼动系统的随机动力学模型

为研究爆发性神经噪声影响,在水平扫视眼动模型<sup>[8]</sup>基础上引入神经噪声,提出了眼动系统随机动力学模型,如方程(1)所示。在神经系统中,噪声通常用加性的随机过程近似,比如 Poisson(泊松)过程或者 Gauss 过程<sup>[11]</sup>,本文用 Gauss 白噪声  $\xi(t)$  模拟神经元中的噪声,其满足  $E[\xi(t)] = 0$ ,  $E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$ ,  $D$  是噪声强度:

$$\begin{cases} \dot{g} = \varepsilon v, \\ \dot{v} = \varepsilon \left( -\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)v - \frac{1}{T_1 T_2}g + \frac{1}{T_1 T_2}n + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)(r-l) \right), \\ \dot{n} = \varepsilon \left( -\frac{1}{T_n}n + r - l \right), \\ \dot{l} = -l + (1 - \alpha u)^8 \frac{\kappa}{1 + \lambda e^{-\mu(-m-\gamma r-2.5)}} + \xi(t), \\ \dot{r} = -r + (1 - \alpha u)^8 \frac{\kappa}{1 + \lambda e^{-\mu(m-\gamma l-2.5)}}, \\ \dot{m} = \varepsilon(-m - (r-l)), \\ \dot{u} = -u + 1 - \frac{(r-l)^2}{5^2 + (r-l)^2}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $g, v$  分别表示眼球运动的角度和角速度,  $n$  表示神经元积分器,其行为由具有时间常数  $T_n$  的低通滤波器模拟,  $l(r)$  和  $u$  表示左(右)爆发性神经元和抑制性神经元的放电速率,  $m$  反映眼动误差(即眼动目标位置与实际落点位置间的距离),  $\alpha$  表示抑制性神经元对爆发性神经元的抑制作用强度的相对大小,且  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;  $\gamma$  为左右爆发性神经元之间的相互作用强度;  $T_1, T_2$  表示时间常数;  $\mu, \lambda, \varepsilon$  和  $\kappa$  表示正的参数。下文如不特别说明,参数取值均参考文献[8]选为:  $T_1 = 0.15, T_2 = 0.012, T_n = 25, \kappa = 567, \lambda = 2.048, \mu = 0.566, \gamma = 0.1$ 。

需要指出,尽管模型中噪声项只加在左爆发性神经元方程上,所得结论同样适用于噪声项只加在右爆发性神经元方程的情形,因为方程的确定性部分关于左右爆发性神经元方程是对称的。

## 2 确定性分岔行为

当  $D = 0$  时,系统退化为确定性系统。以  $\alpha$  作为分岔参数,图 1 给出了眼球运动的位移与分岔参数的关系,可以看出系统发生了两次分岔: Hopf 分岔与鞍结分岔。当  $\alpha$  位于区间 I 和 III 中,系统都只存在一个稳定的吸引子,分别为稳定的极限环和稳定的平衡点;当  $\alpha$  位于区间 II 中,具有两个稳定的吸引子:稳定的平衡点和极限环,系统呈现双稳态行为。

图 1 表明系统的确定性分岔行为与双稳态 van der Pol 系统定性相同<sup>[12]</sup>,因此可以预见在加性随机激励作用下,二者行为也应类似。下节将通过数值方法对此判断分析。

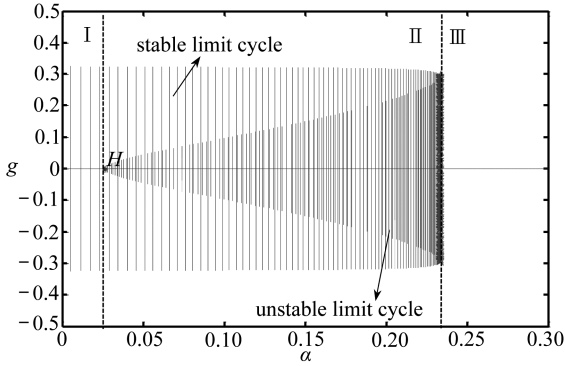


图1 确定性系统分岔图

Fig. 1 The bifurcation diagram of the deterministic system

### 3 随机分岔分析

本节采用 Poincaré 映射法求解式(1),讨论了抑制作用强度  $\alpha$  和噪声强度  $D$  对眼球运动响应的影响,并通过 Monte Carlo 模拟给出了相应的稳态概率密度.

图2给出了噪声强度  $D = 2$  时,系统随机响应随抑制强度  $\alpha$  变化的 Poincaré 分岔图,其中纵坐标表示眼球运动位移的极值,实线和虚线分别表示确定性系统的稳定解和不稳定解.由图可见,抑制强度  $\alpha$  变化导致了系统随机行为定性变化. $\alpha \in (0, 0.1)$ , 随机响应相当于对极限环的随机扰动; $\alpha \in (0.1, 0.2)$ , 随机响应是确定性极限环与确定性平衡点间无规律的往复切换; $\alpha > 0.2$  时,随机响应相当于对确定性平衡点的扰动.为更详细地说明  $\alpha$  在不同区间时系统随机响应的特点,图3给出了  $\alpha = 0.01, 0.15, 0.26$  时,系统响应相图、联合概率密度图  $p(g, v)$  以及位移边缘概率密度图  $p(g)$ .

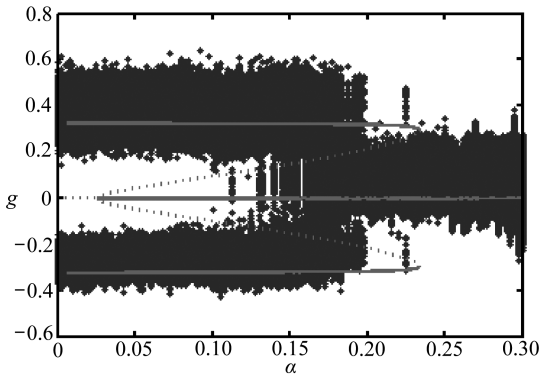


图2 随机系统的分岔图

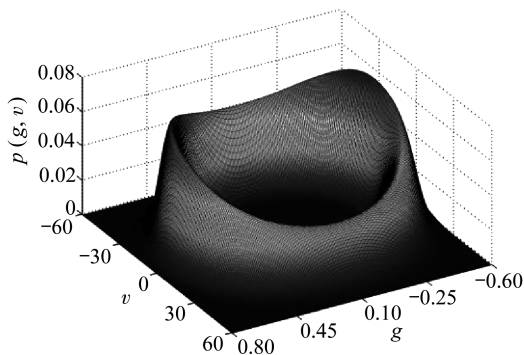
Fig. 2 The bifurcation diagram of the stochastic system

当  $\alpha$  为 0.01 时,稳态联合概率密度只存在环形峰,此时眼球的运动状态类似于极限环,稳态响应呈现大幅振荡;当  $\alpha$  增加到 0.15 时,联合概率密度出现单峰结构,眼球运动在大幅振荡和小幅振荡间来回切换,此时眼球运动表现为间歇性眼球震颤; $\alpha$  继续增大到 0.26 时,环形峰消失,联合概率密度呈现单峰结构,眼球运动表现为幅值较小的振荡.在此过程中,联合稳态概率密度结构发生两次改变,发生了两次随机 P 分岔.

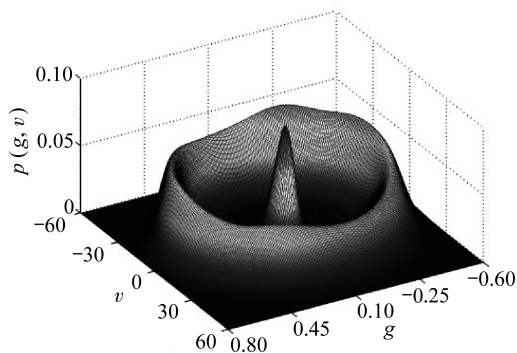
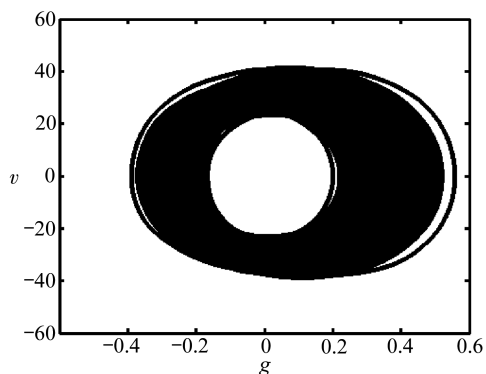
图3(d)从整体上对比给出了  $\alpha = 0.01, 0.15, 0.26$  时眼球运动位移的边缘概率密度,从中可

以明显地观察到抑制强度  $\alpha$  的变化对位移边缘概率密度从双峰到三峰再到单峰状态的影响。

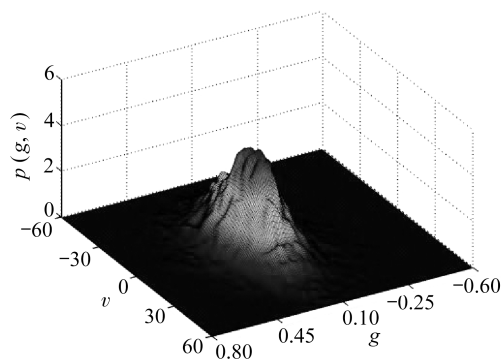
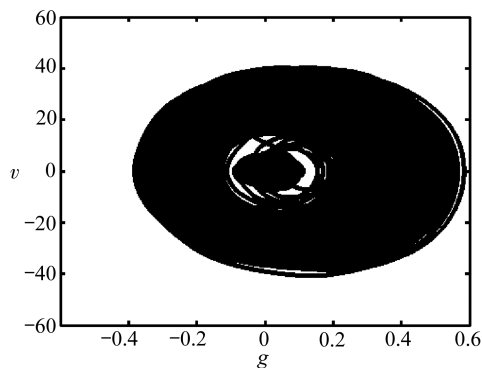
为分析噪声强度对系统随机行为的影响,图 4 给出了  $\alpha = 0.18$  时,系统响应随噪声强度变化的 Poincaré 分岔图,其纵轴为位移的极值.当  $D \in (1.3, 2)$  时,系统响应的切换明显.随着噪声强度的增加,切换频率增强,稳态间切换现象在 Poincaré 截面上的体现较为模糊,且响应的不对称性也随之增强.



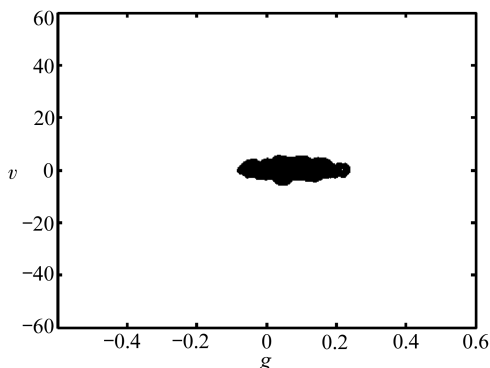
(a) 抑制强度  $\alpha = 0.01$   
(a) Inhibitory strength  $\alpha = 0.01$

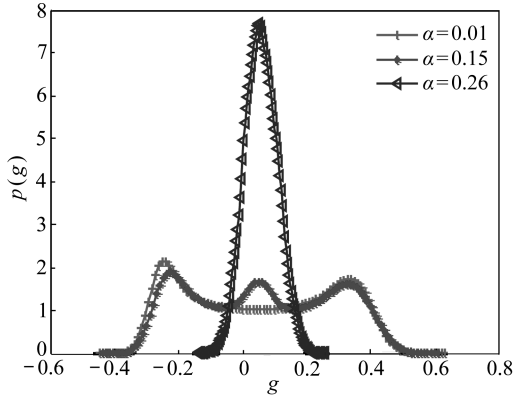


(b) 抑制强度  $\alpha = 0.15$   
(b) Inhibitory strength  $\alpha = 0.15$



(c) 抑制强度  $\alpha = 0.26$   
(c) Inhibitory strength  $\alpha = 0.26$





(d)  $\alpha = 0.01, 0.15, 0.26$  时位移的边缘概率密度

(d) The marginal probability density of the displacement for  $\alpha = 0.01, 0.15, 0.26$

图 3  $D = 2$  时不同抑制强度下速度和位移的联合概率密度、相图以及位移的边缘概率密度

Fig. 3 The displacement-speed joint probability densities, phase diagram and displacement marginal densities at different inhibitory strengths for  $D = 2$

为了更清楚地说明噪声强度对眼球运动的影响,图 5 分别给出了不同噪声强度  $D$  下系统位移边缘概率密度的变化情况.当噪声强度  $D = 1$  时,系统位移的边缘概率密度呈现单峰;当  $D$  增大到 3 时,边缘概率密度表现为三峰结构,大幅振荡出现;当  $D$  的值继续增大到 18 时,边缘概率密度呈现双峰结构,眼球运动呈现大幅振荡.在上述变化过程中,系统经历了两次 P 分岔,即抑制强度一定时,噪声强度的改变也可以诱导出随机 P 分岔.

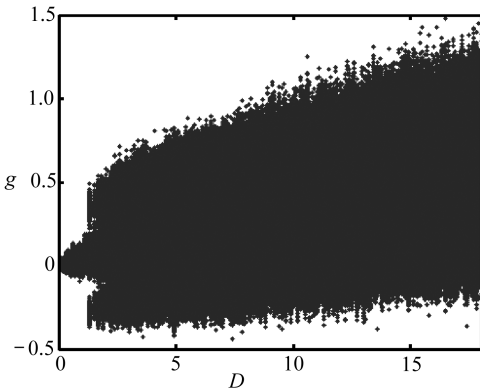


图 4 分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagram

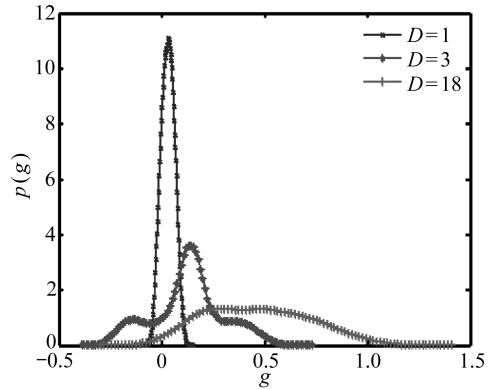


图 5 位移的边缘概率密度

Fig. 5 The displacement marginal densities at different noise intensities

综合上述分析可见与上节的预测一致.随机眼动系统的行为确实与双稳态 van der Pol 系统类似.但由于其强非线性特征,无法借助随机平均法,FPK 方程得到准确地响应稳态概率密度的近似表达式,也无法得到发生随机 P 分岔临界参数条件的结果.因此,如何得到强非线性系统随机 P 分岔精确表达仍是需要解决的问题.

## 4 结 论

本文研究了加性 Gauss 白噪声作用下眼动系统的动力学特性.通过分析 Poincaré 分岔图、

位移和速度的联合概率密度以及位移的边缘概率密度结构的变化,分别讨论了抑制强度和噪声强度对眼球运动的影响,研究表明:噪声强度和抑制强度都能诱导眼动系统发生随机 P 分岔现象,位移的边缘概率密度峰值个数从 1 到 3 变化;当位移边缘概率密度峰值的个数为 3 时,眼球运动出现稳态间切换现象,说明了间歇性眼球震颤可能是由眼动系统的随机 P 分岔引起的.需要特别指出,眼动系统属于强非线性系统,其随机 P 分岔条件的精确估计仍有待发展新的方法.

### 参考文献(References):

- [1] Robert M P, Michel S, Adjadj E, et al. Benign intermittent upbeat nystagmus in infancy: a new clinical entity[J]. *European Journal of Paediatric Neurology*, 2015, **19**(2): 262-265.
- [2] Moon K H, Lee S A, Ahn J S, et al. Downbeat nystagmus associated with brainstem compression by vertebral artery[J]. *Journal of Korean Neurosurgical Society*, 2007, **41**(3): 190-192.
- [3] Ogawa Y, Itani S, Otsuka K, et al. Intermittent positional downbeat nystagmus of cervical origin[J]. *Auris Nasus Larynx*, 2014, **41**(2): 234-237.
- [4] 陈维毅, 杨桂通, 吴文周. 人体眼球的运动模型及相应的动力学方程组[J]. 中国生物医学工程学报, 2000, **19**(3): 266-271. (CHEN Wei-yi, YANG Gui-tong, WU Wen-zhou. Mechanical model of human eye and corresponding dynamic equations[J]. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2000, **19**(3): 266-271. (in Chinese))
- [5] 陈维毅, 杨桂通, 吴文周. 眼球的运动模型及对钟摆型眼球震颤的模拟分析[J]. 中国生物医学工程学报, 2000, **19**(2): 185-190, 199. (CHEN Wei-yi, YANG Gui-tong, WU Wen-zhou. Mechanical model of human eye and stimulating analysis of pendular nystagmus[J]. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2000, **19**(2): 185-190, 199. (in Chinese))
- [6] Broomhead D S, Clement R A, Muldoon M R, et al. Modelling of congenital nystagmus waveforms produced by saccadic system abnormalities[J]. *Biological Cybernetics*, 2000, **82**(5): 391-399.
- [7] Akman O E, Broomhead D S, Abadi R V, et al. Eye movement instabilities and nystagmus can be predicted by a nonlinear dynamics model of the saccadic system[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2005, **51**(6): 661-694.
- [8] Laptév D, Akman O E, Clement R A. Stability of the saccadic oculomotor system[J]. *Biological Cybernetics*, 2006, **95**(3): 281-287.
- [9] Akman O E, Broomhead D S, Clement R A, et al. Nonlinear time series analysis of jerk congenital nystagmus[J]. *Journal of Computational Neuroscience*, 2006, **21**(2): 153-170.
- [10] Barreiro A K, Bronski J C, Anastasio T J. Bifurcation theory explains waveform variability in a congenital eye movement disorder[J]. *Journal of Computational Neuroscience*, 2009, **26**(2): 321-329.
- [11] Faisal A A, Selen L P J, Wolpert D M. Noise in the nervous system[J]. *Nature Reviews Neuroscience*, 2000, **9**(4): 292-303.
- [12] 顾仁财, 许勇, 郝孟丽, 等. Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-van der Pol 振子的随机分岔[J]. 物理学报, 2011, **60**(6): 060513. (GU Cai-yong, XU Yong, HAO Meng-li, et al. Stochastic bifurcations in Duffing-van der Pol oscillator with Lévy stable noise[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(6): 060513. (in Chinese))



# Stochastic Bifurcation in the Saccadic System Driven by Noise

ZHANG Xiang-yun, WU Zhi-qiang

(*Department of Mechanics, School of Mechanical Engineering, Tianjin University;  
Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control,  
Tianjin 300072, P.R.China*)

**Abstract:** The stochastic bifurcation in the saccadic system driven by noise was investigated. Firstly, the stochastic dynamic model was established by adding the additive white Gaussian noise into the existing bilateral model for the horizontal saccadic system. Secondly, the stationary joint probability density of the system displacement and velocity and the stationary probability density of the displacement with different parameters were obtained with the numerical method. Then, the results show that noise intensity and inhibitory strength of omnipause neurons may induce the stochastic P bifurcation and the number of peaks on the stationary probability density curve of displacement changes from 1 to 3 and intermittent nystagmus occurs. It is also shown that when the inhibitory strength of omnipause neurons is large enough, the stationary probability density is always unimodal and the intermittent nystagmus disappears, which has some significance for the disease treatment.

**Key words:** saccadic system; nystagmus; stationary probability density; white Gaussian noise

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11372211; 11672349)

---

引用本文/Cite this paper:

张祥云, 吴志强. 噪声激励下水平扫视眼动系统的随机分岔[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1): 126-132.

ZHANG Xiang-yun, WU Zhi-qiang. Stochastic bifurcation in the saccadic system driven by noise[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 126-132.