

# 车桥耦合系统随机振动的时域显式解法\*

苏成<sup>1,2</sup>, 钟春意<sup>1</sup>, 周立成<sup>1</sup>

(1. 华南理工大学 土木与交通学院, 广州 510640;

2. 亚热带建筑科学国家重点实验室(华南理工大学), 广州 510640)

**摘要:** 在桥面和轨道随机不平顺作用下,车桥耦合系统振动是一个典型的非平稳随机振动问题.笔者分别建立表征物理演变机制的车辆系统和桥梁系统的动力响应显式表达式,然后利用车桥之间的运动相容条件,建立车桥之间接触力关于桥面不平顺的显式表达式.在此基础上,即可直接利用统计矩运算法则,获得车桥接触力的统计矩演化规律,并进一步计算车辆系统和桥梁系统关键响应的演变统计矩.此外,也可以基于车桥接触力关于桥面不平顺的显式表达式,高效地进行随机模拟(即 Monte Carlo 模拟, MCS),以获得车桥耦合系统关键响应的演变统计矩及其他统计信息.在上述过程中,由于实现了车桥耦合系统物理演变机制和概率演化规律的相对分离,在响应统计矩计算中,无需反复求解车桥耦合系统的运动微分方程,且可以仅针对车桥接触力及其他所关注的响应开展降维计算,大幅提高了车桥耦合系统随机振动的计算效率.数值算例表明,所提出的方法具有理想的计算精度和计算效率.

**关键词:** 车桥耦合; 桥面不平顺; 随机振动; 时域显式法; 降维

**中图分类号:** O324; U441+.3      **文献标志码:** A      doi: 10.21656/1000-0887.370510

## 引言

随着高速公路、高速铁路与大跨度桥梁结构的发展,车辆与桥梁之间的耦合振动效应日趋明显,车桥系统作为一个耦合的复杂时变系统,给车桥系统振动分析带来了一定的困难.同时,在车辆高速行驶的情况下,桥面和轨道不平顺等随机因素对车桥耦合系统的振动,也会产生不容忽视的影响.桥面和轨道不平顺是引起车桥耦合系统随机振动的主要激励源之一<sup>[1-3]</sup>,在其作用下,车桥耦合系统的振动响应为典型的非平稳随机过程,需要在非平稳随机振动理论框架下展开研究.传统的车桥耦合系统振动研究主要集中在确定性振动分析方面,车桥耦合系统随机振动是一个值得关注的重要研究方向.

目前,车桥耦合系统的随机振动分析方法可以分为随机模拟法<sup>[4-6]</sup>、矩演化法<sup>[7]</sup>、谱演化法(包括功率谱法<sup>[8-9]</sup>和虚拟激励法<sup>[10-12]</sup>)以及概率密度演化法<sup>[13]</sup>等几类.随机模拟法具有计算原理简单和适用范围广等优点,但其计算效率严重依赖于所采用的样本数以及单个样本时程分析的效率,这在很大程度上制约了随机模拟法在大规模车桥耦合系统中的应用.在其他几类方法中,功率谱法和虚拟激励法是目前车桥耦合系统随机振动问题的主要研究方法,但由于

\* 收稿日期: 2016-10-26; 修订日期: 2016-12-28

基金项目: 国家自然科学基金(51678252)

作者简介: 苏成(1968—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: cvchsu@scut.edu.cn).

车桥耦合系统本质上的时变特性,这类方法已经不是一类纯频域方法,在求解系统响应的时变功率谱时,需要在各个离散频点上针对车桥整体系统进行大量的时域积分运算.对于大规模车桥耦合系统而言,该类方法的计算效率仍然是一个突出的问题.

最近,针对大规模系统非平稳随机振动问题,苏成等<sup>[14-17]</sup>提出了一类时域显式方法.该方法通过构建系统动力响应的时域显式表达式,可以实现系统物理演变机制与概率演化规律的相对分离,因此在响应统计矩等统计量的计算过程中,无需在大量离散频点上进行积分运算,并可以针对任意关键响应进行降维计算,且具有理想的计算效率,已成功应用于高层建筑<sup>[18]</sup>、大跨度场馆<sup>[19]</sup>和大跨度桥梁<sup>[20]</sup>等大型复杂结构随机振动分析,时域显式法有望为大规模车桥耦合系统随机振动问题提供一种新的高效分析途径.

本文针对桥面随机不平顺作用下的车桥耦合系统,分别从车辆系统和桥梁系统的运动方程出发,利用车桥之间的运动相容条件,首先构建表征车桥耦合振动物理演变机制的车桥之间接触力的时域显式表达式.在此基础上,进一步考虑车桥耦合系统的概率演化规律,利用统计矩运算法则或随机模拟方法,直接针对车桥接触力及车桥系统关键响应开展降维统计分析,大幅提高了车桥耦合系统随机振动的计算效率.数值算例表明,所提出的方法具有理想的计算精度与效率.

## 1 车桥耦合系统的基本方程

为了便于更清晰地阐述方法的列式过程,本文采用最简单的独轮车过简支梁模型,如图 1 所示.其中,车辆采用多刚体模型,桥梁采用平面梁单元有限元模型.假定:① 车辆以匀速  $V$  行驶通过桥梁;② 车轮与桥面的接触为弹性接触,可用刚度为  $k_2$  的弹簧模拟(见图 1).

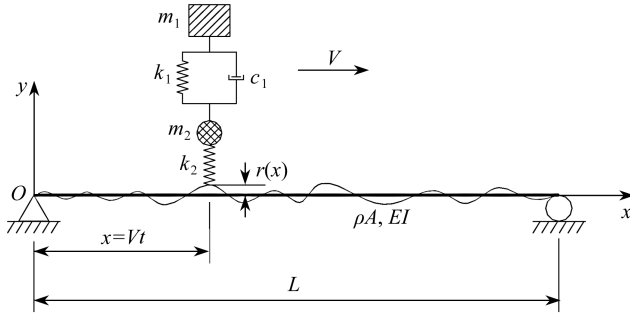


图 1 车桥耦合系统力学模型

Fig. 1 The mechanical model for a coupled vehicle-bridge system

车辆系统的运动方程可表示为

$$\mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{Y}}_v + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{Y}}_v + \mathbf{K}_v \mathbf{Y}_v = \mathbf{L}_v F(t), \quad (1)$$

式中下标  $v$  表示车辆 (vehicle);  $\mathbf{M}_v$ 、 $\mathbf{C}_v$  和  $\mathbf{K}_v$  分别为车辆系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\ddot{\mathbf{Y}}_v$ 、 $\dot{\mathbf{Y}}_v$  和  $\mathbf{Y}_v$  分别为车辆系统的加速度向量、速度向量和位移向量;  $F(t)$  为车轮与桥面之间的竖向瞬态接触力 (不含车辆的重量);  $\mathbf{L}_v$  为  $F(t)$  的定位向量.

桥梁系统的运动方程可表示为

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{Y}}_b + \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{Y}}_b + \mathbf{K}_b \mathbf{Y}_b = \mathbf{L}_b(x) [-F(t) + G], \quad (2)$$

式中下标  $b$  表示桥梁 (bridge);  $\mathbf{M}_b$ 、 $\mathbf{C}_b$  和  $\mathbf{K}_b$  分别为桥梁系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩

阵;  $\dot{\mathbf{Y}}_b$ ,  $\dot{\mathbf{Y}}_v$  和  $\mathbf{Y}_b$  分别为桥梁系统的加速度向量、速度向量和位移向量;  $\mathbf{F}(t)$  同上,  $\mathbf{G}$  为车辆的重力;  $\mathbf{L}_b(x)$  为  $[-F(t) + G]$  的定位向量, 它与车辆位置  $x$  有关,  $x = Vt$ , 如图 1 所示。

除了车辆系统和桥梁系统的运动方程外, 还需要考虑车轮与桥面之间的位移相容条件, 它可以表示为

$$y_v(t) - y_b(x, t) - r(x) = -\frac{F(t)}{k_2}, \quad (3)$$

式中  $y_v(t)$  为车轮的竖向位移;  $y_b(x, t)$  为桥面与车轮接触处的竖向位移,  $x = Vt$ ;  $r(x)$  为桥面不平顺场。

## 2 车桥接触力的时域显式表达

采用任意一种数值积分方法, 如 Newmark- $\beta$  法, 分别求解运动方程(1)和(2), 并导出结构响应关于各离散时刻车桥接触力  $F(t_i)$  的显式表达式如下:

$$\mathbf{R}_v(t_i) = \mathbf{A}_{vi} \mathbf{F}_{[i]} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_b(t_i) = \mathbf{A}_{bi} (\mathbf{F}_{[i]} - \mathbf{G}_{[i]}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

式中  $n$  为时程分析的总积分步数;

$$\mathbf{F}_{[i]} = [F(t_1) \quad F(t_2) \quad \dots \quad F(t_i)]^T, \quad \mathbf{G}_{[i]} = [G \quad G \quad \dots \quad G]^T;$$

下标  $[i]$  表示遍取  $1, 2, \dots, i$ ;  $\mathbf{R}_v(t_i)$  和  $\mathbf{R}_b(t_i)$  分别为车辆系统和桥梁系统在时刻  $t_i$  的响应向量;  $\mathbf{A}_{vi}$  和  $\mathbf{A}_{bi}$  为相应的影响矩阵, 可由车辆系统和桥梁系统的脉冲响应获得, 其计算过程可参考文献[18]。值得注意的是, 各离散时刻车桥接触点不一定正好是桥梁单元节点, 这时会涉及到梁单元位移插值和等效节点力的问题, 因此在  $\mathbf{A}_{bi}$  的推导中需考虑单元形函数的影响。基于这个考虑, 在形成  $\mathbf{A}_{bi}$  时, 仅需要考虑在桥梁单元各节点上分别作用竖向脉冲激励时桥梁系统的脉冲响应, 其计算量相当于  $m$  次桥梁系统时程分析的计算量,  $m$  为桥梁跨内节点数。

利用式(4), 可以直接获得图 1 所示车轮  $m_2$  各时刻竖向位移  $y_v(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的显式表达式如下:

$$\mathbf{y}_{v[n]} = \mathbf{A}_v \mathbf{F}_{[n]}, \quad (6)$$

式中  $\mathbf{y}_{v[n]} = [y_v(t_1) \quad y_v(t_2) \quad \dots \quad y_v(t_n)]^T$ ,  $\mathbf{F}_{[n]} = [F(t_1) \quad F(t_2) \quad \dots \quad F(t_n)]^T$ ; 下标  $[n]$  代表遍取  $1, 2, \dots, n$ ;  $\mathbf{A}_v$  为相应的影响矩阵, 其第  $i$  行元素取自式(4)中  $\mathbf{A}_{vi}$  相应的行(对应于  $y_v(t_i)$ )。

利用式(5), 同样可以直接获得图 1 所示桥梁各时刻与车轮接触点  $x_i$  ( $x_i = Vt_i$ ) 的竖向位移  $y_b(x_i, t_i)$  的显式表达式如下:

$$\mathbf{y}_{b[n]} = \mathbf{A}_b (\mathbf{F}_{[n]} - \mathbf{G}_{[n]}), \quad (7)$$

式中  $\mathbf{y}_{b[n]} = [y_b(x_1, t_1) \quad y_b(x_2, t_2) \quad \dots \quad y_b(x_n, t_n)]^T$ ,  $\mathbf{F}_{[n]}$  同上,  $\mathbf{G}_{[n]} = [G \quad G \quad \dots \quad G]^T$ ;  $\mathbf{A}_b$  为相应的影响矩阵, 其第  $i$  行元素取自式(5)中  $\mathbf{A}_{bi}$  相应的行(对应于  $y_b(x_i, t_i)$ )。

考虑全部时刻车桥接触位移相容条件, 由式(3)可得

$$\mathbf{y}_{v[n]} - \mathbf{y}_{b[n]} - \mathbf{r}_{[n]} = -\frac{\mathbf{F}_{[n]}}{k_2}, \quad (8)$$

式中  $\mathbf{r}_{[n]} = [r(x_1) \quad r(x_2) \quad \dots \quad r(x_n)]^T$ 。

将式(6)和式(7)代入式(8), 整理后可得

$$\mathbf{F}_{[n]} = \mathbf{A}\mathbf{r}_{[n]} + \mathbf{B}, \quad (9)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \left( \mathbf{A}_v - \mathbf{A}_b + \frac{\mathbf{I}}{k_2} \right)^{-1}, \\ \mathbf{B} = -\mathbf{A}\mathbf{A}_b\mathbf{G}_{[n]}, \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位矩阵。

式(9)即为车桥接触力向量  $\mathbf{F}_{[n]}$  关于桥面不平顺向量  $\mathbf{r}_{[n]}$  的显式表达式,该式从本质上反映了车桥耦合系统的物理演变机制,一旦获得车桥接触力及其统计矩,就可以进一步求出车桥耦合系统其他响应及其统计矩。

### 3 车桥耦合系统随机振动分析

#### 3.1 时域显式直接法

在式(9)的基础上进行均值和协方差运算,可得车桥接触力向量  $\mathbf{F}_{[n]}$  的均值向量和协方差矩阵分别为

$$E(\mathbf{F}_{[n]}) = \mathbf{A}E(\mathbf{r}_{[n]}) + \mathbf{B}, \quad (11)$$

$$\text{cov}(\mathbf{F}_{[n]}, \mathbf{F}_{[n]}) = \mathbf{A}\text{cov}(\mathbf{r}_{[n]}, \mathbf{r}_{[n]})\mathbf{A}^T, \quad (12)$$

式中  $E(\mathbf{r}_{[n]})$  和  $\text{cov}(\mathbf{r}_{[n]}, \mathbf{r}_{[n]})$  分别为桥面不平顺向量  $\mathbf{r}_{[n]}$  的均值向量和协方差矩阵,它们可以表示为

$$E(\mathbf{r}_{[n]}) = [\mu_r(x_1) \quad \mu_r(x_2) \quad \cdots \quad \mu_r(x_n)]^T, \quad (13)$$

$$\text{cov}(\mathbf{r}_{[n]}, \mathbf{r}_{[n]}) = \begin{bmatrix} R_r(x_1, x_1) - \mu_r^2(x_1) & R_r(x_1, x_2) - \mu_r(x_1)\mu_r(x_2) & \cdots \\ R_r(x_2, x_1) - \mu_r(x_2)\mu_r(x_1) & R_r(x_2, x_2) - \mu_r^2(x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ R_r(x_n, x_1) - \mu_r(x_n)\mu_r(x_1) & R_r(x_n, x_2) - \mu_r(x_n)\mu_r(x_2) & \cdots \\ R_r(x_1, x_n) - \mu_r(x_1)\mu_r(x_n) \\ R_r(x_2, x_n) - \mu_r(x_2)\mu_r(x_n) \\ \vdots \\ R_r(x_n, x_n) - \mu_r^2(x_n) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

式中  $\mu_r(x)$  和  $R_r(x_i, x_j)$  分别为不平顺场  $r(x)$  的均值函数和相关函数。特别地,当  $r(x)$  为均匀随机场时,  $R_r(\tau)$  ( $\tau = x_j - x_i$ ) 可以由不平顺场的功率谱密度函数  $S_r(\omega)$  经 Fourier 变换得到。

对于车桥耦合系统,通常并不需要计算系统所有的响应,而只需要关注若干关键响应。假定  $r_v(t)$  和  $r_b(t)$  分别为车辆系统和桥梁系统的某一关键响应,则由式(4)和式(5)可以直接得到各时刻  $r_v(t_i)$  和  $r_b(t_i)$  的显式表达式如下:

$$r_v(t_i) = \mathbf{A}_{vi}^r \mathbf{F}_{[i]} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (15)$$

$$r_b(t_i) = \mathbf{A}_{bi}^r (\mathbf{F}_{[i]} - \mathbf{G}_{[i]}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (16)$$

式中  $\mathbf{A}_{vi}^r$  和  $\mathbf{A}_{bi}^r$  均为行矩阵,其元素可以分别从  $\mathbf{A}_{vi}$  和  $\mathbf{A}_{bi}$  中相应的行提取。换句话说,  $\mathbf{A}_{vi}$  和  $\mathbf{A}_{bi}$  中其他行元素实际上是不用存储的,对数据存储量的要求并不高。

对式(15)和式(16)分别进行均值和方差运算,即可以得到  $r_v(t_i)$  和  $r_b(t_i)$  的均值和方差如下:

$$\begin{cases} \mu_{r_v}(t_i) = \mathbf{A}_{vi}^r E(\mathbf{F}_{[i]}) \\ \sigma_{r_v}^2(t_i) = \mathbf{A}_{vi}^r \text{cov}(\mathbf{F}_{[i]}, \mathbf{F}_{[i]}) (\mathbf{A}_{vi}^r)^T \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

$$\begin{cases} \mu_{r_b}(t_i) = \mathbf{A}_{bi}^r [E(\mathbf{F}_{[i]}) - \mathbf{G}_{[i]}] \\ \sigma_{r_b}^2(t_i) = \mathbf{A}_{bi}^r \text{cov}(\mathbf{F}_{[i]}, \mathbf{F}_{[i]}) (\mathbf{A}_{bi}^r)^T \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

式中  $E(\mathbf{F}_{[i]})$  和  $\text{cov}(\mathbf{F}_{[i]}, \mathbf{F}_{[i]})$  可分别由式(11)和式(12)得到.

由上可见,由于在统计矩计算之前已经获得了车桥接触力及结构响应的显式表达式(见式(9)、(15)和(16)),因此在它们的统计矩计算过程中,并不需要嵌入车桥耦合系统运动微分方程的求解,同时可以针对任意关键响应进行降维计算,有效提高了随机振动的分析效率.

### 3.2 时域显式随机模拟法

根据桥面不平顺场  $r(x)$  的功率谱密度函数或相关函数,采用随机过程数值生成方法,如谐波合成法<sup>[21]</sup>,即可生成桥面不平顺向量  $\mathbf{r}_{[n]}^i$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ),  $N$  为样本总数.利用车桥接触力的显式表达式(9)以及车桥耦合系统关键响应显式表达式(15)和(16),即可快速进行样本分析,获得结构关键响应的大量样本值,据此即可统计得到其均值、方差、平均峰值和概率密度等.

值得注意的是,由于已经获得如式(9)、(15)和(16)所示的车桥接触力及结构关键响应的显式表达式,因此在每次样本分析中,并不要求解车桥耦合系统的运动微分方程,且可以针对任意关键响应进行降维计算,大幅提高了随机模拟的计算效率.

## 4 数值算例

考虑图1所示的车桥耦合系统,其参数取自文献[8].其中,桥梁跨度  $L = 40$  m,抗弯刚度  $EI = 2\ 658\ 069$  kN/m<sup>2</sup>,线密度  $\rho A = 6\ 067$  kg/m,忽略桥梁的阻尼;车体质量  $m_1 = 12\ 000$  kg,车轮质量  $m_2 = 500$  kg,车体悬架刚度  $k_1 = 280$  kN/m,轮胎刚度  $k_2 = 156$  kN/m,车体悬架阻尼系数  $c_1 = 2\xi\sqrt{m_1 k_1}$ ,  $\xi = 0.1$ ;车辆的行驶速度  $V = 20$  m/s.

假定桥面不平顺场为零均值均匀随机场,其功率谱密度函数取为

$$S_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{4\gamma\alpha\beta\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (19)$$

式中  $\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ,  $\alpha = 0.1$  rad/m,  $\beta = 0.3$  rad/m,  $\gamma = 1$  cm<sup>2</sup>·m/rad.当  $\omega \gg \omega_0 = 0.316$  时,  $S_r(\omega)$  快速衰减,因此所考虑的频率范围取为  $[-10, 10]$  rad/m<sup>[8]</sup>.

分别采用功率谱法和本文提出的时域显式直接法计算车桥耦合系统随机响应的一阶矩和二阶矩时程,其中简支梁离散为20个平面梁单元,时程分析步长  $\Delta t = 0.02$  s.图2和图3分别给出了桥梁跨中竖向位移  $y_m$  的均值绝对值时程  $|\mu_{y_m}|$  和标准差时程  $\sigma_{y_m}$ ,图4和图5分别给出了车体  $m_1$  竖向加速度  $a_1$  的均值绝对值时程  $|\mu_{a_1}|$  和均方根时程  $\sigma_{a_1}$ .从图中可见,两种方法的计算结果吻合良好,说明了本文方法的正确性.

在计算效率方面,功率谱法至少需要计算300个离散频率点上的时变功率谱,相当于至少需要进行300次确定性车桥耦合系统时程分析.而在时域显式直接法中,为了得到车辆响应和

桥梁响应显式表达式的系数矩阵,相当于需要进行 1 次车辆系统的脉冲响应分析以及 19 次桥梁系统的脉冲响应分析(桥梁跨内节点数为 19),其计算量远少于功率谱法所需的时程分析计算量.两种方法的计算时间列于表 1 中,可以看出时域显式直接法的计算时间仅为功率谱法的 5.02%.

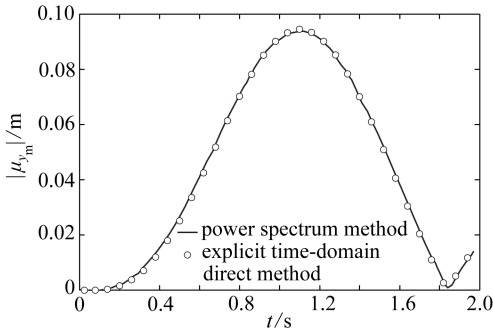


图 2 桥梁跨中竖向位移  $y_m$  的均值绝对值时程

Fig. 2 The absolute mean value time history of vertical displacement  $y_m$  at the bridge span centre

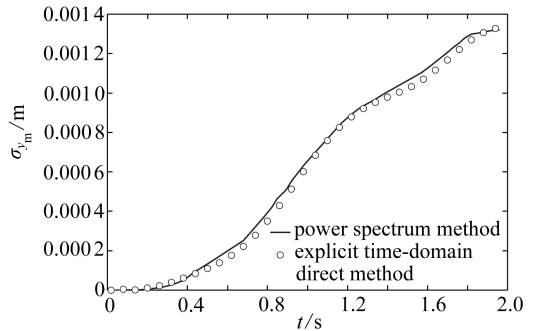


图 3 桥梁跨中竖向位移  $y_m$  的标准差时程

Fig. 3 The standard deviation time history of vertical displacement  $y_m$  at the bridge span centre

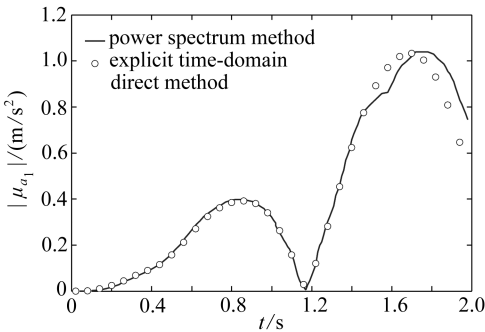


图 4 车体  $m_1$  竖向加速度  $a_1$  的均值绝对值时程

Fig. 4 The absolute mean value time history of vertical acceleration  $a_1$  of car body  $m_1$

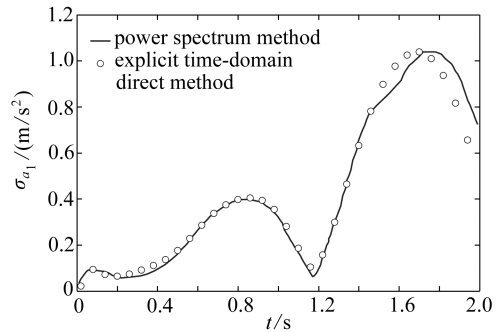


图 5 车体  $m_1$  竖向加速度  $a_1$  的均方根时程

Fig. 5 The root mean square time history of vertical acceleration  $a_1$  of car body  $m_1$

表 1 时域显式直接法与功率谱法计算时间的比较

Table 1 Comparison of time costs between the explicit time-domain direct method and the power spectrum method

method	CPU time $T/s$
power spectrum method	55.60
explicit time-domain direct method	2.79

进一步采用本文提出的时域显式随机模拟法计算车桥耦合系统随机响应的一阶矩和二阶矩时程.为了进行对比,还同时采用 Newmark- $\beta$  全过程迭代法<sup>[22]</sup>进行随机模拟.在不同样本数下,两种方法计算得到的桥梁跨中竖向位移  $y_m$  的均值绝对值时程  $|\mu_{y_m}|$  和标准差时程  $\sigma_{y_m}$ ,以及车体  $m_1$  竖向加速度  $a_1$  的均值绝对值时程  $|\mu_{a_1}|$  和均方根时程  $\sigma_{a_1}$  分别如图 6~图 9 所示.由图中可见,两种方法的计算结果相当吻合,说明本文方法的正确性.

在计算效率方面,由于 Newmark- $\beta$  全过程迭代-随机模拟法在每次样本分析中均需求解车桥耦合系统的运动微分方程,因此计算非常耗时,计算效率远低于时域显式随机模拟法的计算

效率,如表 2 所示,从表中还可以看出,随着样本数的增大,Newmark- $\beta$  全过程迭代-随机模拟法的计算时间成比例增长,但时域显式随机模拟法的计算时间则增长不多,说明在样本数规模较大时,本文方法的计算优势更加明显。

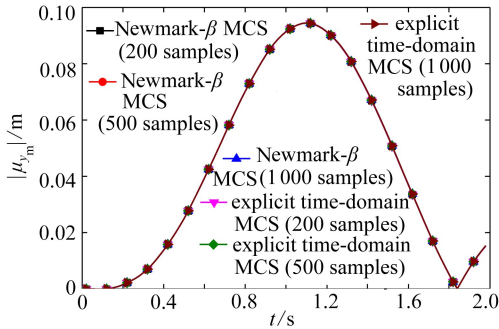


图 6 桥梁跨中竖向位移  $y_m$  的均值绝对值时程

Fig. 6 The absolute mean value time history of vertical displacement  $y_m$  at the bridge span centre

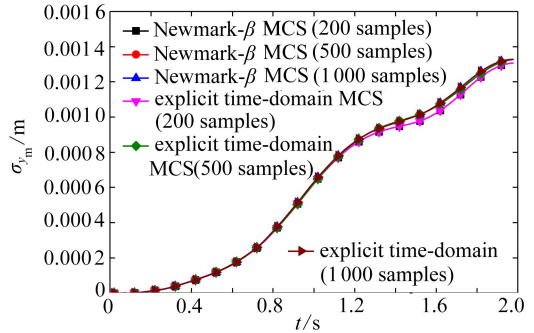


图 7 桥梁跨中竖向位移  $y_m$  的标准差时程

Fig. 7 The standard deviation time history of vertical displacement  $y_m$  at the bridge span centre

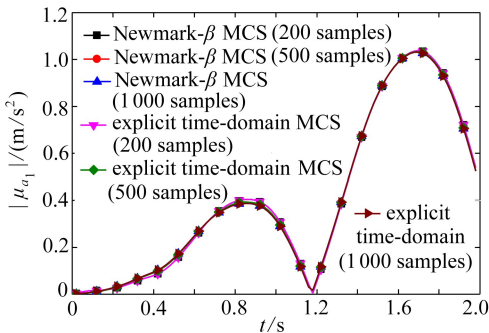


图 8 车体  $m_1$  竖向加速度  $a_1$  的均值绝对值时程

Fig. 8 The absolute mean value time history of vertical acceleration  $a_1$  of car body  $m_1$

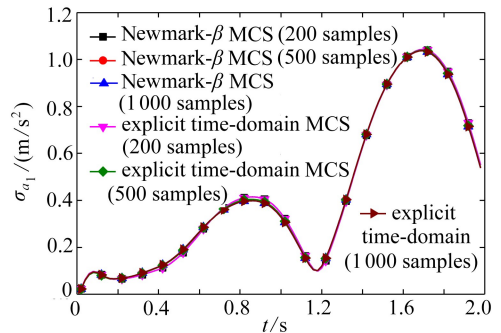


图 9 车体  $m_1$  竖向加速度  $a_1$  的均方根时程

Fig. 9 The root mean square time history of vertical acceleration  $a_1$  of car body  $m_1$

表 2 时域显式随机模拟法与 Newmark- $\beta$  全过程迭代随机模拟法计算时间的比较

Table 2 Comparison of time costs between the explicit time-domain MCS and the Newmark- $\beta$  MCS

method	number of samples $N$	CPU time $T/s$
Newmark- $\beta$ Monte Carlo simulation (MCS)	200	36.36
	500	88.72
	1 000	175.35
explicit time-domain Monte Carlo simulation(MCS)	200	2.44
	500	2.57
	1 000	3.37

## 5 结束语

车桥耦合系统随机振动问题中,系统的物理演变机制是概率演化机制的内在驱动力.在已有的车桥耦合系统随机振动方法中,这两套机制是耦合处理的,在进行随机响应功率谱和统计矩计算过程中需要同步求解系统的运动微分方程,涉及大量的时程积分运算.本文提出了一类

时域显式方法,通过构建车桥之间接触力关于桥面不平顺的显式表达式,完全反映了车桥耦合系统的物理演变规律;在此基础上进行随机响应统计矩计算或进行随机模拟分析,并不需要再考虑物理系统运动方程的求解,大幅提高了随机振动分析的效率.本文仅考虑了独轮车过简支梁的简单情况,在后续工作中,将进一步开展复杂车桥耦合系统随机振动问题的研究,并将方法推广应用于实际工程问题.

**致谢** 本文作者衷心感谢亚热带建筑科学国家重点实验室基金(2013ZA01)的资助.

## 参考文献(References):

- [1] 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学(上册)[M]. 第4版. 北京: 科学出版社, 2014: 120-128. (ZHAI Wan-ming. *Vehicle-Track Coupling Dynamics (Volume One)* [M]. 4th ed. Beijing: Science Press, 2014: 120-128. (in Chinese))
- [2] 夏禾, 张楠. 车辆与结构动力相互作用[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2005: 93-105. (XIA He, ZHANG Nan. *Dynamic Interaction of Vehicles and Structures* [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2005: 93-105. (in Chinese))
- [3] 雷晓燕. 铁路轨道结构数值分析方法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1998: 37-41. (LEI Xiao-yan. *Numerical Methods for Analysis of Railway Track Structures* [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1998: 37-41. (in Chinese))
- [4] Au F T K, Wang J J, Cheung Y K. Impact study of cable-stayed railway bridges with random rail irregularities[J]. *Engineering Structures*, 2002, **24**(5): 529-541.
- [5] Lei X, Noda N A. Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **258**(1): 147-165.
- [6] WU Yean-seng, YANG Yeong-bin. Steady-state response and riding comfort of trains moving over a series of simply supported bridges[J]. *Engineering Structures*, 2003, **25**(2): 251-265.
- [7] 晋智斌, 强士中, 李小珍. 轨道不平顺激励下车辆-桥梁垂向随机振动方差解法[J]. 铁道学报, 2008, **30**(6): 63-68. (JIN Zhi-bin, QIANG Shi-zhong, LI Xiao-zhen. Covariance method for vehicle-bridge vertical stochastic vibration excited by rail irregularities[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2008, **30**(6): 63-68. (in Chinese))
- [8] Li J Q, Leng X L, Fang T. Evolutionary random response problem of a coupled vehicle-bridge system[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2002, **72**(6/7): 536-544.
- [9] 叶茂, 谭平, 任珉, 等. 多个车辆荷载作用下桥梁演变随机振动分析[J]. 振动工程学报, 2010, **23**(3): 269-274. (YE Mao, TAN Ping, REN Min, et al. Evolutionary random vibration analysis of a bridge subjected to moving vehicles[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2010, **23**(3): 269-274. (in Chinese))
- [10] Zhang Z C, Lin J H, Zhang Y H, et al. Nonstationary random vibration analysis of coupled vehicle-bridge systems[J]. *Engineering Computations*, 2010, **27**(6): 712-732.
- [11] Lu F, Lin J H, Kennedy D, et al. An algorithm to study non-stationary random vibrations of vehicle-bridge systems[J]. *Computers & Structures*, 2009, **87**(3/4): 177-185.
- [12] ZENG Zhi-ping, ZHAO Yan-gang, XU Wen-tao, et al. Random vibration analysis of train-bridge under track irregularities and traveling seismic waves using train-slab track-bridge interaction model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, **342**: 22-43.
- [13] YU Zhi-wu, MAO Jian-feng, GUO Feng-qi, et al. Non-stationary random vibration analysis of a 3D train-bridge system using the probability density evolution method[J]. *Journal of Sound*



- and Vibration*, 2015, **366**: 173-189.
- [14] 苏成, 徐瑞. 非平稳随机激励下结构体系动力可靠度时域解法[J]. 力学学报, 2010, **42**(3): 512-520.(SU Cheng, XU Rui. Time-domain method for dynamic reliability of structural systems subjected to non-stationary random excitations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, **42**(3): 512-520.(in Chinese))
- [15] SU Cheng, XU Rui. Random vibration analysis of structures by a time-domain explicit formulation method[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2014, **52**(2): 239-260.
- [16] SU Cheng, HUANG Huan, MA Hai-tao. Fast equivalent linearization method for nonlinear structures under nonstationary random excitations[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, **142**(8): 04016049.
- [17] HU Zhi-qiang, SU Cheng, CHEN Tai-cong, et al. An explicit time-domain approach for sensitivity analysis of non-stationary random vibration problems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, **382**: 122-139.
- [18] 苏成, 黄志坚, 刘小璐. 高层建筑地震作用计算的时域显式随机模拟法[J]. 建筑结构学报, 2015, **36**(1): 13-22.(SU Cheng, HUANG Zhi-jian, LIU Xiao-lu. Time-domain explicit random simulation method for seismic analysis of tall buildings[J]. *Journal of Building Structures*, 2015, **36**(1): 13-22.(in Chinese))
- [19] 苏成, 徐瑞, 刘小璐, 等. 大跨度空间结构抗震分析的非平稳随机振动时域显式法[J]. 建筑结构学报, 2011, **32**(11): 169-176.(SU Cheng, XU Rui, LIU Xiao-lu, et al. Non-stationary seismic analysis of large-span spatial structures by time-domain explicit method[J]. *Journal of Building Structures*, 2011, **32**(11): 169-176.(in Chinese))
- [20] 苏成, 李保木, 陈太聪, 等. 粘滞阻尼器减震结构非线性随机振动的时域显式降维迭代随机模拟法[J]. 计算力学学报, 2016, **33**(4): 556-563.(SU Cheng, LI Bao-mu, CHEN Tai-cong, et al. Nonlinear random vibration analysis of energy-dissipation structures with viscous dampers by random simulation method based on explicit time-domain dimension-reduced iteration scheme [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(4): 556-563.(in Chinese))
- [21] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1971, **49**(1B): 357-368.
- [22] 张楠, 夏禾. 基于全过程迭代的车桥耦合动力系统分析方法[J]. 中国铁道科学, 2013, **34**(5): 32-38.(ZHANG Nan, XIA He. A vehicle-bridge interaction dynamic system analysis method based on inter-system iteration[J]. *China Railway Science*, 2013, **34**(5): 32-38.(in Chinese))

# Random Vibration Analysis of Coupled Vehicle-Bridge Systems With the Explicit Time-Domain Method

SU Cheng<sup>1,2</sup>, ZHONG Chun-yi<sup>1</sup>, ZHOU Li-cheng<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P.R.China;

2. State Key Laboratory of Subtropical Building Science (South China University of Technology), Guangzhou 510640, P.R.China)

**Abstract:** The vibration of coupled vehicle-bridge systems subjected to random deck or track irregularities exhibits typical non-stationary stochastic features. The explicit expressions for the dynamic responses of the vehicle and the bridge subsystems were first established. Based on the motion compatibility condition between the vehicle and the bridge, the explicit expression for the vehicle-bridge contact force in terms of deck irregularities was then derived. Such explicit formulation reflects the physical evolution mechanism of the coupled vehicle-bridge system. Subsequently, the evolutionary statistical moments of the vehicle-bridge contact force were obtained through direct application of the statistical moment operation rules, thereafter the evolutionary statistical moments for critical responses of the vehicle and the bridge subsystems could be calculated. In addition, a random simulation method (i.e. the Monte Carlo simulation method) was put forward based on that the contact force was explicitly expressed in terms of deck irregularities. In turn, the evolutionary statistical moments or the other statistical properties of the critical responses of the coupled vehicle-bridge system could be easily achieved. Since the physical and probabilistic evolution processes of the coupled system were coped with in a relatively separate manner, the proposed method avoided repeated solution of the motion equations for the system. Moreover, a dimension-reducing scheme was involved for the calculation of the statistical moments of the contact force and other related responses as well. All these merits enable the proposed method to be more effective for random vibration analysis of coupled vehicle-bridge systems, as compared with the previous methods. Numerical examples indicate that the proposed method has high accuracy and superior computational efficiency.

**Key words:** coupled vehicle-bridge system; deck irregularity; random vibration; explicit time-domain method; dimension reduction

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51678252)

引用本文/Cite this paper:

苏成, 钟春意, 周立成. 车桥耦合系统随机振动的时域显式解法[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(1): 99-108.

SU Cheng, ZHONG Chun-yi, ZHOU Li-cheng. Random vibration analysis of coupled vehicle-bridge systems with the explicit time-domain method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(1): 99-108.