

# 微尺度悬臂管颤振的有限维研究\*

郭 勇, 谢建华

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要:** 基于修正的偶应力理论并考虑 Lagrange 应变张量所给出的几何非线性, 运用 Hamilton 原理建立了微尺度悬臂管平面振动的积分-微分方程. 通过 Galerkin 方法将原积分-微分方程离散成常微分方程组, 研究了临界流速-质量比曲线的不同阶 Galerkin 近似解与精确解的符合程度以及它们对材料长度尺寸参数的依赖性. 对不同的模态截断数, 运用基于中心流形-范式理论的投影法计算了临界流速处系统的第一 Lyapunov (李雅谱诺夫) 系数和临界特征值关于流速的变化率, 以此为基础分析了系统的分岔模式, 探讨了模态截断数对系统动力学性质的影响. 临界流速-质量比曲线的滞后部分及交点处的动力学性质表明, 系统存在不同的分岔方向, 用 6 个模态的 Galerkin 离散化方程作分岔图对此进行了验证, 并通过理论分析及数值方法分别计算了颤振的固有频率.

**关键词:** 微尺度悬臂管; 偶应力理论; 临界流速曲线; 滞后; Galerkin 方法; 投影法; 频率

**中图分类号:** O322; O326

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.370400

## 引 言

输液管道是一种重要的工程结构, 其动力学行为已经得到广泛、深入的研究<sup>[1-9]</sup>. 随着科学技术的发展, 管道的特征尺寸可以设计得越来越小, 在文献[10]中, 圆型微管的内径已达  $1\ \mu\text{m}$  至  $100\ \mu\text{m}$  的数量级. 微尺度管道广泛应用于微机电力学系统以及微流体的传输, 例如微流管已应用于谐振器的设计及药物的注射<sup>[11-12]</sup>, 微流管喷头已应用于微小平面的书写及打印等<sup>[13-14]</sup>. 为给实际应用提供理论基础, 有必要对微尺度流管的动力特性及稳定性进行深入的研究. Fleck 等<sup>[15]</sup>、Lam 等<sup>[16]</sup>及 McFarland 等<sup>[17]</sup>的工作表明, 微结构具有尺度依赖行为. 因此, 不能直接对微尺度管应用宏观管理论, 需要借助非经典的连续介质力学理论对其加以描述. 实验观测表明, 对于微结构的扭转、弯曲等, 由 Yang 等<sup>[18]</sup>所修正的偶应力理论能够成功地估计其尺度效应. 基于该理论, 微梁的自由振动<sup>[19-20]</sup>、强迫振动<sup>[21-22]</sup>、屈曲<sup>[23]</sup>、参数振动<sup>[24]</sup>等相继得到研究. 在微尺度流管研究方面, Wang<sup>[25]</sup>、Xia 等<sup>[26]</sup>分别在输液管的 Euler (欧拉) 梁模型和 Timoshenko 梁模型假设下建立微管的线性振动方程, 考察了不同微尺度情形下流速对管道固有频率的影响. 文献[27]研究微管的空间弯曲振动线性方程, 不仅考虑了管材料的微尺度效应, 还引入了管内流体的微尺度因素. Yang 等<sup>[28]</sup>考虑轴向拉伸所导致的几何非线性, 基于修正

\* 收稿日期: 2016-12-30; 修订日期: 2017-03-06

基金项目: 国家自然科学基金(11572263)

作者简介: 郭勇(1985—), 男, 博士生 (E-mail: gy-gates@163.com);

谢建华(1957—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: jhxie2000@126.com).

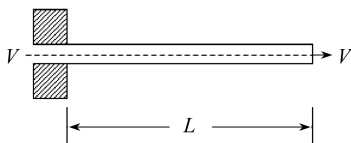
的偶应力理论研究了微管的平面振动, Hosseini 等<sup>[29]</sup>考虑悬臂微管平面振动的稳定性问题, 研究了微尺度效应对系统频率、临界流速的影响, 发现相同条件下, 微管较之于宏观管具有更大的频率及更高的临界流速. Bahaadini 等<sup>[30]</sup>进一步研究了耗散等因素对黏弹性碳纳米悬臂管稳定性的影响. Tang 等<sup>[31]</sup>研究了两端固支曲管的空间非线性振动.

从已有的文献来看, 在微尺度输液管的动力学建模方面, 或者采用两端支承管的线性及非线性振动方程, 或者采用仅适用于分析悬臂管复频率、临界流速的线性振动方程, 对于微悬臂管的大振幅非线性振动问题, 目前似乎还没有相应的文献可以参考, 因此在非线性建模方面的工作还有待于进一步完善, 相应的非线性问题有待于研究. 另外, 对输液管的研究, 大多是先运用 Galerkin 法将其控制方程离散成常微分方程组, 然后再分析其动力学行为<sup>[32-40]</sup>, 具有较多理论分析的研究一般针对一个或两个模态的离散化方程进行<sup>[32-35]</sup>, 对 3 个及以上模态的离散化方程, 一般采用数值模拟探索其动力学现象<sup>[36-40]</sup>, 因此, 有必要对多个模态的离散化方程做理论分析, 并以数值计算作为验证.

本文建立了微尺度悬臂输液管平面大振幅振动的非线性积分-微分方程, 运用 Galerkin 方法, 从理论上对 2 个及多个(包括 4, 6 及 8 个)模态的离散化方程作了分析, 特别是计算了临界流速处系统的第一 Lyapunov 系数和临界特征值(当流速取临界值时具有零实部的一对复共轭特征值)关于流速的变化率, 以此为基础分析了系统的分岔模式, 发现了不同的分岔方向. 考察了模态截断数在预测系统动力学行为上的差异, 用 6 个模态的 Galerkin 离散化方程作数值计算验证了相关结果, 并从不同的角度研究了颤振的固有频率问题.

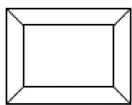
## 1 力学模型与运动方程

如图 1(a)所示, 长为  $L$  的微尺度悬臂管, 横截面积为  $A_p$ , 抗弯刚度为  $EI$ , 单位长度的质量为  $m$ , 其输送的流体单位长度的质量为  $M$ , 流速  $V$  相对管的形心线(管横截面的形心连线)为常数. 管的横截面是对称的, 如矩形(图 1(b))或圆环(图 1(c))等.



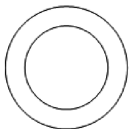
(a) 微尺度悬臂管

(a) A micro-scale cantilever pipe



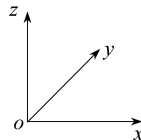
(b) 矩形截面

(b) The rectangular cross section



(c) 圆截面

(c) The circular cross section



(d) 坐标系

(d) The coordinate system

图 1 力学模型

Fig. 1 The mechanical model

以管道未变形时的形心线为  $x$  轴, 悬臂端面为  $yo$  平面建立参考系  $oxy$  (图 1(d)), 管道的振动平行于  $xoz$  平面. 取另一个坐标系  $OXYZ$  与管道固结, 作为管道上物质点的 Lagrange (拉格朗日) 描述, 该坐标系在管未变形时与  $oxy$  重合.  $X$  的值等于管道横截面形心离原点的弧长

$s$ , 因此, 为了突出物理意义, 以下用  $(s, Y, Z)$  代替  $(X, Y, Z)$  表示管道上物质点的坐标.

微尺度效应的存在使得系统的应变能不能表示成管形心线曲率的函数, 即不能采用文献 [4] 中的应变能公式, 而需在分析管道变形的基础上按应变能的原始定义进行计算. 对于细长管的振动问题, 可以采用 Euler-Bernoulli (欧拉-贝努利) 梁模型, 管上任一点  $(s, Y, Z)$  沿  $x, y, z$  方向的位移分别为

$$u_1 = u - Z\psi, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w, \quad (1)$$

其中,  $u, w$  表示管道形心线上一点  $(s, 0, 0)$  分别在  $x$  和  $z$  方向的位移.  $\psi$  是管道横截面的转角, 它仅是弧长  $s$  的函数. 对没有初始轴力作用的悬臂管, 可以认为管的形心线在运动过程中不发生伸缩<sup>[4]</sup>, 即

$$[1 + (\partial u / \partial s)]^2 + (\partial w / \partial s)^2 = 1. \quad (2)$$

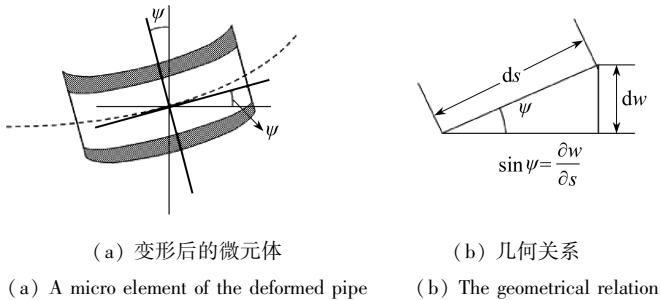


图2 横截面的运动

Fig. 2 The motions of the cross section

Euler-Bernoulli 梁理论假设管道横截面在变形后仍然保持为平面且垂直于形心线(图 2 (a)), 由此可以得到(图 2(b))

$$\sin \psi = \partial w / \partial s. \quad (3)$$

下面计算管道的应变能.

微尺度结构中微元体的应变能密度表达式和通常弹性力学中给出的不同, 其不仅是应变张量的函数, 而且还包括曲率张量对能量的贡献项, 该部分可由一个材料长度尺寸参数加以刻画. 根据文献 [18] 中的结论, 各向同性线弹性材料区域  $\Omega$  内的应变能  $U$  可以写成

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{m} : \boldsymbol{\chi}) dv, \quad (4)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}$  分别是应力张量和应变张量,  $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\chi}$  分别为偶应力张量的偏部分和对称曲率张量. 其相互间的关系如下:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1/2) [\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T] + (1/2) \nabla \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{u})^T, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{m} = 2l^2 G \boldsymbol{\chi}, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\chi} = (1/2) [\nabla \boldsymbol{\theta} + (\nabla \boldsymbol{\theta})^T], \quad (8)$$

$\lambda, G$  为 Lamé 常数, 其中  $G$  为通常的剪切模量,  $\boldsymbol{\delta}$  是单位张量, 式(6)为 Lagrange 应变张量,  $l$  是表征微尺度效应的材料长度尺寸参数, 取决于材料性质,  $\nabla$  是拉氏梯度算子,  $\boldsymbol{u}$  为位移矢量, 其分量见式(1),  $\boldsymbol{\theta}$  可通过  $\boldsymbol{u}$  的旋度表示

$$\boldsymbol{\theta} = (1/2) \text{curl}(\boldsymbol{u}). \quad (9)$$

由式(1)、(9)可计算出式(5)~(8), 从而得管道的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial s} - Z \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right]^2 (\lambda + 2G) + G \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \psi \right)^2 + \frac{1}{4} l^2 G \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right\} dv, \quad (10)$$

其中  $dv = dsdYdZ$  (下文中如没有其他说明,均是如此),横向振动相对于管的长度来说是小量,不妨设其为  $O(\varepsilon)$  阶的.几何大变形意味着方程中的非线性项对系统性态会有本质的影响,但是在平衡态附近,低阶的非线性项才起决定性的作用,因此本文中仅保留了 3 次非线性项.运用 Hamilton(哈密顿)原理推导振动方程时,求变分的过程会让作用量泛函的次数降低一次,因此在下面的处理中,式(10)将保留到 4 次项,下文关于动能的推导中亦是如此.

由式(2)解出

$$u' + \frac{1}{2}(w')^2 = O(|w'|^4), \quad (11)$$

其中  $(\quad)' = \partial(\quad)/\partial s$ .

由式(3)解出

$$w' = \sin(\psi) = \psi - \frac{1}{3!} \psi^3 + O(|\psi|^5),$$

从而

$$w' - \psi = O(|\psi|^3), \quad (12)$$

$$\psi = w' + \frac{1}{3!}(w')^3 + O(|w'|^5). \quad (13)$$

式(13)两边关于  $s$  求导,得

$$\psi' = w'' + \frac{1}{2}(w')^2 w'' + O(|w''||w'|^4). \quad (14)$$

将式(11)、(12)及(14)代入式(10),整理可得

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ Z^2 (w'')^2 [1 + (w')^2] (\lambda + 2G) + \frac{1}{4} l^2 G (w'')^2 [4 + 2(w')^2] \right\} dv + \dots = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I (w'')^2 [1 + (w')^2] (\lambda + 2G) + \frac{1}{4} A_p l^2 G (w'')^2 [4 + 2(w')^2] \right\} ds + \dots, \quad (15)$$

其中  $I$  为管道横截面关于  $Y$  轴的惯性矩.

忽略 Poisson(泊松)比,以  $EI$  代替  $(\lambda + 2G)I$ ,势能(15)中与宏观部分对应的项与文献[4]中利用公式

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I k^2 ds$$

计算出的结果一致.上式中  $k$  为管的形心线曲率.

系统的总动能为<sup>[4]</sup>

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] ds + \frac{1}{2} M \int_0^L \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + V \left( \frac{\partial u}{\partial s} + 1 \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} ds. \quad (16)$$

将势能(15)及动能(16)代入描述管道振动的 Hamilton 方程<sup>[1]</sup>

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt - \int_{t_1}^{t_2} MV(\dot{\mathbf{r}}_L + V\mathbf{r}'_L) \cdot \delta \mathbf{r}_L dt = 0, \quad (17)$$

式中  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = (s + u, 0, w)$  表示管道形心线上一点  $(s, 0, 0)$  在  $t$  时刻的位置矢量. 下标  $L$  表示相应的量在管道自由端  $s = L$  处的值, 点号和撇号分别代表对  $t$  和  $s$  求偏导. 由式(17)最终可得系统的振动方程

$$\begin{aligned} & (m + M)\ddot{w} + 2MV\dot{w}'(1 + w'^2) + w''MV^2(1 + w'^2) - \\ & w'' \left[ \int_s^L \int_0^s (m + M)(\dot{w}'^2 + w'\ddot{w}') ds ds + \int_s^L (2MVw'\dot{w}' + MV^2w'w'') ds \right] + \\ & w' \int_0^s (m + M)(\dot{w}'^2 + w'\ddot{w}') ds + EI(w^{(4)} + 4w'w''w''' + w'^3 + w^{(4)}w'^2) + \\ & A_p l^2 G \left( w^{(4)} + 2w'w''w''' + \frac{1}{2}w'^3 + \frac{1}{2}w^{(4)}w'^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

及边界条件

$$w(0, t) = w'(0, t) = w''(L, t) = w'''(L, t) = 0. \quad (19)$$

引入如下无量纲量

$$\eta = \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{s}{L}, \quad \tau = \left[ \frac{EI}{(m + M)L^4} \right]^{1/2} t, \quad \nu = \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2} VL, \quad \beta = \frac{M}{M + m},$$

将方程(18)写成无量纲的形式

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta} + 2\nu\sqrt{\beta}\dot{\eta}'(1 + \eta'^2) + \nu^2\eta''(1 + \eta'^2) - \\ & \eta'' \left[ \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta'\ddot{\eta}') d\xi d\xi + \int_{\xi}^1 (2\nu\sqrt{\beta}\eta'\dot{\eta}' + \nu^2\eta'\eta'') d\xi \right] + \\ & \eta' \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta'\ddot{\eta}') d\xi + (\eta^{(4)} + 4\eta'\eta''\eta''' + \eta'^3 + \eta^{(4)}\eta'^2) + \\ & \frac{A_p l^2 G}{EI} \left( \eta^{(4)} + 2\eta'\eta''\eta''' + \frac{1}{2}\eta'^3 + \frac{1}{2}\eta^{(4)}\eta'^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

相应地边界条件(19)为

$$\eta(0, \tau) = \eta'(0, \tau) = \eta''(1, \tau) = \eta'''(1, \tau) = 0. \quad (21)$$

设  $l_0 = (1/2)(A_p l^2 G / EI)$ , 为无量纲化的材料长度尺寸参数, 用以描述管道的微尺度效应. 其不仅出现在方程的线性项中, 影响诸如频率等线性特征; 也出现在方程的非线性项中, 影响系统失稳条件及失稳后的性质. 此外, 式(20)中具有两个非线性的惯性项, 相似的情况还可以参见文献[4, 32]等. 非线性惯性项的出现使得我们不能直接使用动力系统的相关理论方法, 需将其消去. 应用摄动法思想<sup>[4, 31]</sup>, 整理并略去高阶项后, 可计算出

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} \eta'\dot{\eta}' d\xi = - \int_0^{\xi} 2\nu\sqrt{\beta}\eta'\dot{\eta}' d\xi - \int_0^{\xi} \nu^2\eta'\eta''' d\xi - \\ & (1 + 2l_0)\eta'\eta^{(4)} + \int_0^{\xi} (1 + 2l_0)\eta''\eta^{(4)} d\xi, \end{aligned} \quad (22)$$

代入式(20), 整理后得微尺度悬臂输液管作平面振动的控制方程:

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta} + \nu^2\eta'' + 2\sqrt{\beta}\nu\dot{\eta}' + (2l_0 + 1)\eta^{(4)} + \frac{3}{2}[\eta'^3 + 2\eta'\eta''\eta'''] - \\ & \eta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} [\dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta}\nu\eta'\eta'' + \nu^2\eta'^2 + \eta''\eta^{(4)}] d\xi d\xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \eta' \int_0^\xi [\dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta}\nu\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2\eta''^2 + \eta''\eta^{(4)}] d\xi + \\ & l_0 \left[ -\eta'^2\eta^{(4)} + 2\eta'\eta''\eta''' + 2\eta\eta^{(3)} + 2\eta' \int_0^\xi \eta''\eta^{(4)} d\xi - \right. \\ & \left. 2\eta'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \eta''\eta^{(4)} d\xi d\xi \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

## 2 微悬臂管的颤振分析

设方程(23)的解为

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^n \phi_r(\xi) q_r(\tau), \quad (24)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_r(\xi) = \cosh(\lambda_r \xi) - \cos(\lambda_r \xi) - \sigma_r(\sinh(\lambda_r \xi) - \sin(\lambda_r \xi)) \\ \sigma_r = (\sinh \lambda_r - \sin \lambda_r) / (\cosh \lambda_r + \cos \lambda_r) \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (25)$$

$\phi_r(\xi)$  是悬臂梁的模态函数,  $q_r(\tau)$  是相应的广义坐标,  $\lambda_r$  为对应的特征值. 根据 Galerkin 方法, 将式(24)代入式(23), 并依次用两边乘  $\phi_r(\xi)$ , 从 0 到 1 积分可得<sup>[32]</sup>

$$\ddot{q}_i + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j + \alpha_{ijkl}q_jq_kq_l + \beta_{ijkl}q_jq_k\dot{q}_l + \gamma_{ijkl}q_j\dot{q}_k\dot{q}_l = 0, \quad (26)$$

式中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 2\nu\sqrt{\beta} \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi, \quad k_{ij} = \delta_{ij}(1 + 2l_0) \int_0^1 \phi_i^{(4)} \phi_j d\xi + \nu^2 \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi, \\ \alpha_{ijkl} &= \int_0^1 \phi_i \cdot \left[ l_0 \left( 2\phi_j' \phi_k'' \phi_l''' + 2\phi_j'' \phi_k'' \phi_l'' - \phi_j' \phi_k' \phi_l^{(4)} + 2\phi_j' \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l^{(4)} d\xi - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\phi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l^{(4)} d\xi d\xi \right) + \nu^2 \left( \phi_j' \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l'' d\xi - \phi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l'' d\xi d\xi \right) + \right. \\ & \quad \left. \frac{3}{2} \left( 2\phi_j' \phi_k'' \phi_l''' + \phi_j'' \phi_k' \phi_l'' \right) + \phi_j' \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l^{(4)} d\xi - \phi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l^{(4)} d\xi d\xi \right] d\xi, \\ \beta_{ijkl} &= \int_0^1 \phi_i \cdot 2\nu\sqrt{\beta} \left( \phi_j' \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l' d\xi - \phi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k'' \phi_l' d\xi d\xi \right) d\xi, \\ \gamma_{ijkl} &= \int_0^1 \phi_i \cdot \left( \phi_j' \int_0^\xi \phi_k' \phi_l' d\xi - \phi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi \right) d\xi, \end{aligned}$$

点号和撇号分别表示对  $\tau$  和  $\xi$  求偏导,  $i, j, k, l$  的值取遍 1 到  $n$ .

令

$$q_i = x_i, \quad \dot{q}_i = x_{i+n}, \quad (27)$$

将方程(26)写成一阶方程组形式

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{LX} + \mathbf{N}(\mathbf{X}), \quad (28)$$

上式中  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})^T$ ,

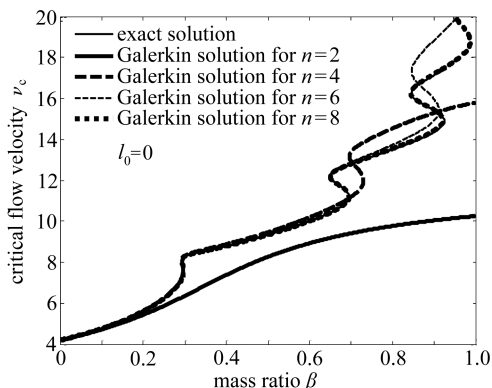
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中  $\mathbf{K}$  的元素为  $k_{ij}$ ,  $\mathbf{C}$  的元素为  $c_{ij}$ ,  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位矩阵.  $\mathbf{N}(\mathbf{X})$  代表式(28)中的非线性项:

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, N_1(\mathbf{X}), N_2(\mathbf{X}), \dots, N_n(\mathbf{X}))^T, \quad (30)$$

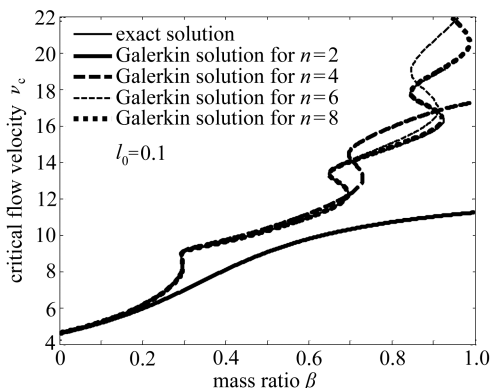
其中

$$N_i(\mathbf{X}) = -\alpha_{ijkl}x_jx_kx_l - \beta_{ijkl}x_jx_kx_{l+n} - \gamma_{ijkl}x_jx_{k+n}x_{l+n} \quad (31)$$



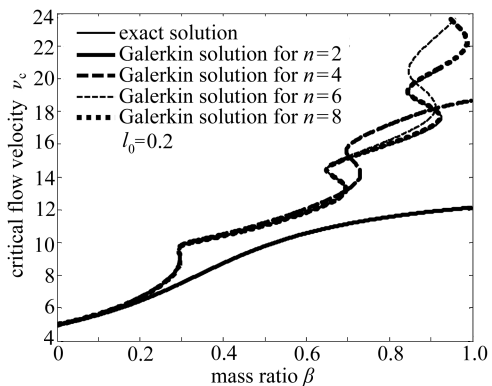
(a) 宏观管

(a) For the macro-pipe



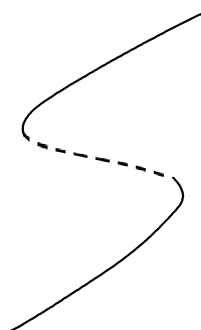
(b)  $l_0 = 0.1$  的微尺度管

(b) For the micro-pipe with  $l_0 = 0.1$



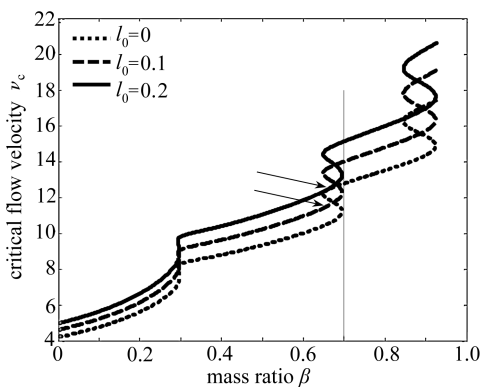
(c)  $l_0 = 0.2$  的微尺度管

(c) For the micro-pipe with  $l_0 = 0.2$



(d) 滞后

(d) Hysteresis



(e) 不同尺度管的临界流速曲线相交

(e) Intersection of the curves of the critical flow velocity with different scales

图3 临界流速曲线

Fig. 3 Curves of the critical flow velocity

从早年的研究<sup>[2]</sup>及近年的文献<sup>[9]</sup>可知,悬臂管通过颤振的方式失稳.不同尺度管的临界流速曲线的精确解和 Galerkin 近似解如图 3(a)~(c)所示.观察可知:

- 1) 微尺度效应(由材料长度尺寸参数  $l_0$  所刻画)使系统的临界流速在同等条件下更大;
- 2) 随模态截断数的增加,Galerkin 近似解与精确解的符合程度越好;
- 3) 模态截断数取值大于等于 4 时,临界流速曲线出现了图 3(d)虚线所示的“滞后”,从而不同  $l_0$  所对应的临界流速曲线可能会相交(图 3(e)箭头所指).

对临界流速曲线上的一个给定点,当流速在其附近变化时系统的分岔模式取决于两个方面:一是临界流速处系统的第一 Lyapunov 系数,其小于零时为超临界,大于零时为亚临界;二是临界特征值的变化率(临界特征值关于流速的变化率)的实部,其大于零时系统的分岔方向与小于零时相反.

在既定的质量比处,不妨以  $(\tilde{l}_0, \tilde{v}_c)$  表示临界流速曲线上的给定点,此时的临界特征值记为  $\pm\omega_0 i$  ( $\omega_0 > 0$ ),以  $\varepsilon$  表示流速的变化量,将方程(28)写成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}(\tilde{l}_0, \tilde{v}_c + \varepsilon)\mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X}, \tilde{l}_0, \tilde{v}_c + \varepsilon). \quad (32)$$

设  $\lambda(\varepsilon) = \mu(\varepsilon) + \omega(\varepsilon)i$  为  $\mathbf{L}$  的一个特征值,当  $\varepsilon = 0$  时  $\lambda(0) = \omega_0 i$ . 特征向量  $\mathbf{q}(\varepsilon)$ ,  $\mathbf{p}(\varepsilon)$  满足

$$\mathbf{L}(\tilde{l}_0, \tilde{v}_c + \varepsilon)\mathbf{q}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\mathbf{q}(\varepsilon),$$

$$\mathbf{L}^T(\tilde{l}_0, \tilde{v}_c + \varepsilon)\mathbf{p}(\varepsilon) = \bar{\lambda}(\varepsilon)\mathbf{p}(\varepsilon),$$

“T”和“-”分别表示取转置与取共轭.可以选择适当的  $\mathbf{q}(\varepsilon)$ ,  $\mathbf{p}(\varepsilon)$ , 使得  $\langle \mathbf{p}(\varepsilon), \mathbf{q}(\varepsilon) \rangle = 1$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示内积,定义为  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{y}$ . 记  $\mathbf{N}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X}, \tilde{l}_0, \tilde{v}_c)$ , 由投影法<sup>[41]</sup>并考虑到式(31),临界流速处系统的第一 Lyapunov 系数为

$$l_1 = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re} \left\langle \mathbf{p}(0), \frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0), \bar{\mathbf{q}}(0)) \right\rangle, \quad (33)$$

其中  $\mathbf{C}(\cdot, \cdot, \cdot)$  为三重对称线性型

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, C_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), C_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \dots, C_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}))^T, \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})^T, \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n})^T, \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n})^T. \quad (35)$$

根据定义<sup>[41]</sup>

$$C_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{j,k,l=1}^{2n} \frac{\partial^3 N_i^0(\mathbf{X})}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{0}} \alpha_j \beta_k \gamma_l, \quad (36)$$

具体计算可得

$$\begin{aligned} C_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = & -\alpha_{ijkl}(\alpha_j \beta_k \gamma_l + \alpha_j \beta_l \gamma_k + \alpha_k \beta_j \gamma_l + \alpha_l \beta_j \gamma_k + \alpha_k \beta_l \gamma_j + \alpha_l \beta_k \gamma_j) - \\ & \beta_{ijkl}(\alpha_j \beta_k \gamma_{l+n} + \alpha_j \beta_{l+n} \gamma_k + \alpha_k \beta_j \gamma_{l+n} + \alpha_{l+n} \beta_j \gamma_k + \alpha_k \beta_{l+n} \gamma_j + \alpha_{l+n} \beta_k \gamma_j) - \\ & \gamma_{ijkl}(\alpha_j \beta_{k+n} \gamma_{l+n} + \alpha_j \beta_{l+n} \gamma_{k+n} + \alpha_{k+n} \beta_j \gamma_{l+n} + \alpha_{l+n} \beta_j \gamma_{k+n} + \\ & \alpha_{k+n} \beta_{l+n} \gamma_j + \alpha_{l+n} \beta_{k+n} \gamma_j). \end{aligned} \quad (37)$$

临界特征值的变化率及其相应的实部分别为<sup>[42]</sup>

$$\lambda'_\varepsilon(0) = \langle \mathbf{p}(0), \mathbf{L}'_\varepsilon(\tilde{l}_0, \tilde{v}_c)\mathbf{q}(0) \rangle \quad (38)$$

和

$$\mu'_\varepsilon(0) = \operatorname{Re}(\langle \mathbf{p}(0), \mathbf{L}'_\varepsilon(\tilde{l}_0, \tilde{v}_c)\mathbf{q}(0) \rangle). \quad (39)$$

本文取 3 种尺度管作对比研究,它们的不同阶 Galerkin 离散化方程的第一 Lyapunov 系数



(式(33))及临界特征值的变化率的实部(式(39))如图4所示,其中,图4(a)、(b)为宏观管,图4(c)、(d)为 $l_0 = 0.1$ 的微尺度管,图4(e)、(f)为 $l_0 = 0.2$ 的微尺度管。

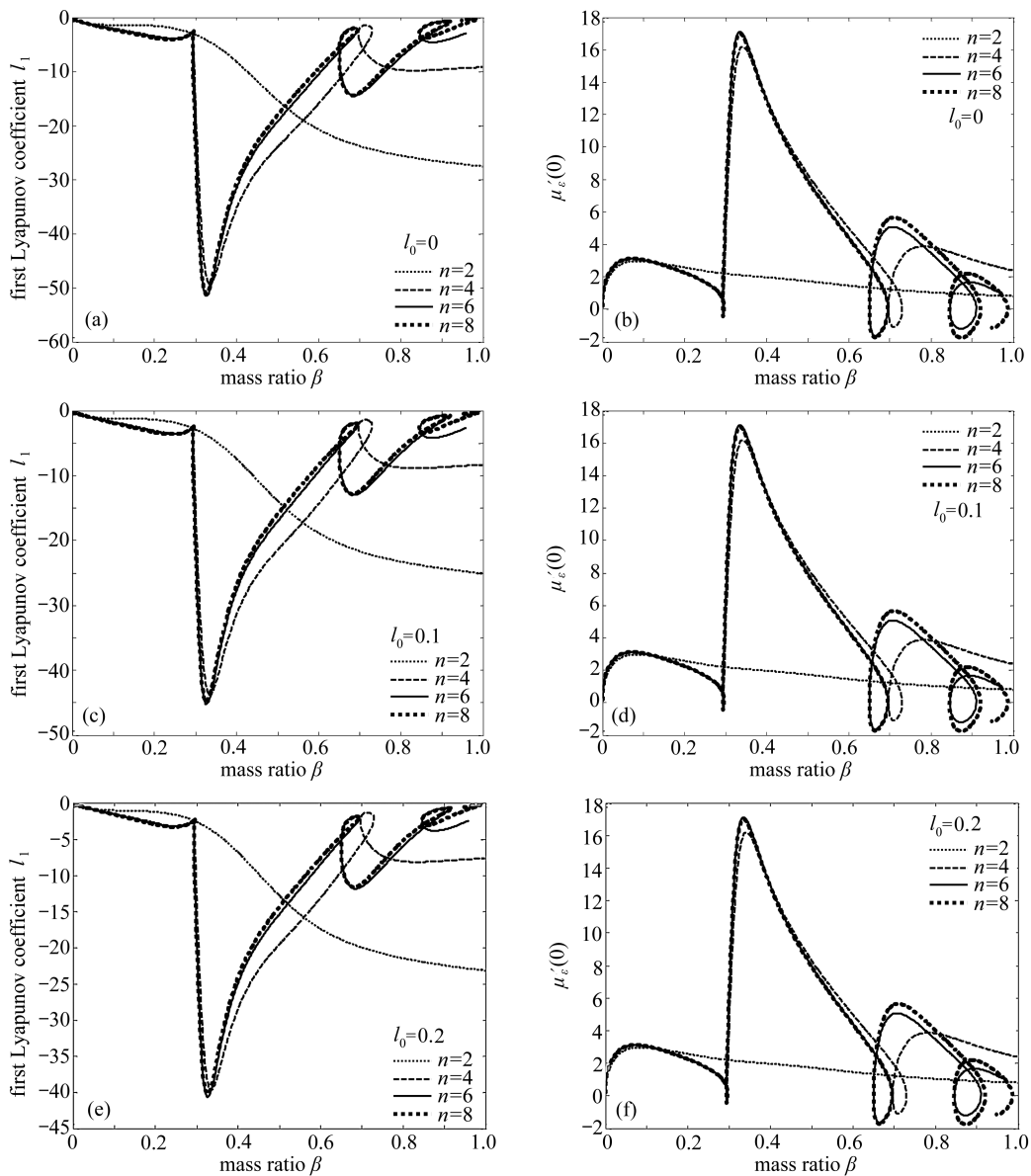


图4 不同阶 Galerkin 截断方程的第一 Lyapunov 系数及临界特征值的变化率的实部

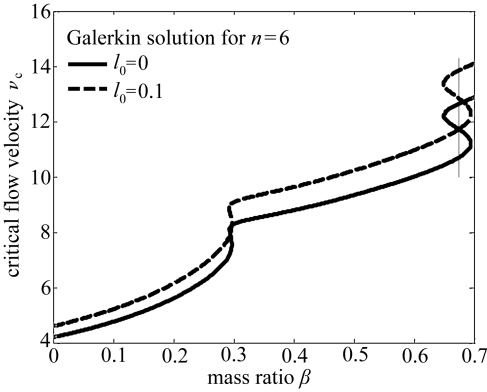
Fig. 4 For different numbers of modes in the Galerkin discretization, curves of the first Lyapunov coefficient and real parts of the critical eigenvalue change rates

观察图4可知:

- 1) 材料长度尺寸参数  $l_0$  对临界特征值的变化率没有影响,且不影响第一 Lyapunov 系数的正负,即不影响系统分岔的超临界性质;
- 2) 随模态截断数的增加,图中的曲线逐渐收敛.结合图3(a)~(c)可知,对于不特别大的质量比 ( $\beta \leq 0.7$ ), 6 或 8 模态近似已能捕获系统的定性动力学性质;
- 3) 模态截断数大于等于 4 时,在临界流速曲线的滞后部分(图3(d)虚线所示),临界特征

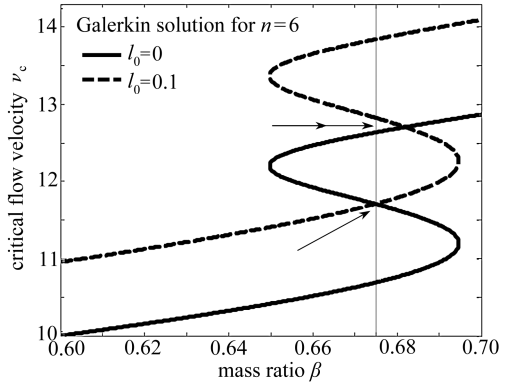
值的变化率的实部小于零,由此可知流速减小时管道失稳发生颤振,流速增加时管道的初始构形稳定,这一结论对以往的研究做了补充;

4) 不同  $l_0$  值的管若于相同的临界值(例如图 3(e) 箭头所指交点)处失稳,则两者的分岔方向相反。



(a) 质量比区间为 0~0.7

(a) For a mass ratio ranging from 0 to 0.7

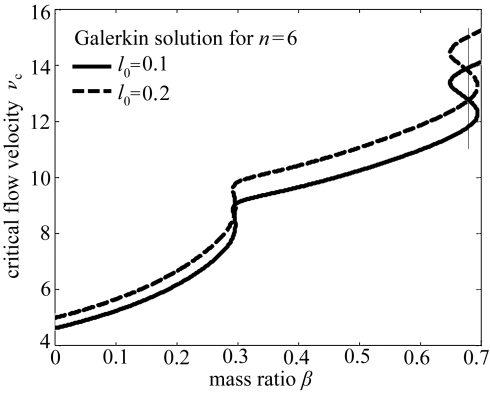


(b) 交点处的放大

(b) Enlargement of the vicinity of the intersection points

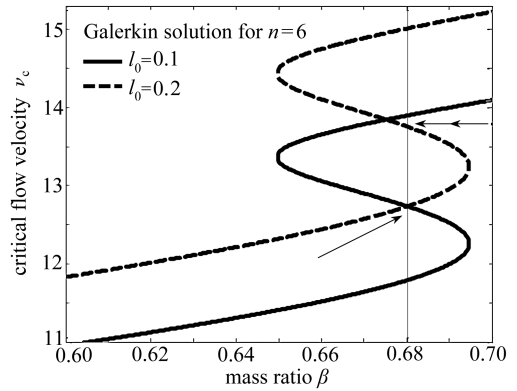
图 5  $l_0 = 0$  和  $l_0 = 0.1$  分别对应的临界流速曲线的交点

Fig. 5 Intersection points of the curves of critical flow velocities with scale  $l_0 = 0$  and  $l_0 = 0.1$



(a) 质量比区间为 0~0.7

(a) For a mass ratio ranging from 0 to 0.7



(b) 交点处的放大

(b) Enlargement of the vicinity of the intersection points

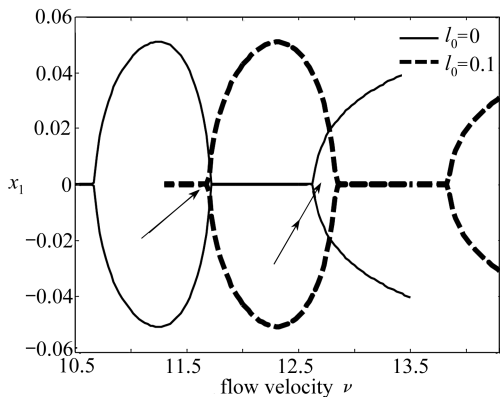
图 6  $l_0 = 0.1$  和  $l_0 = 0.2$  分别对应的临界流速曲线的交点

Fig. 6 Intersection points of the curves of critical flow velocities with scale  $l_0 = 0.1$  and  $l_0 = 0.2$

为验证上述在临界流速曲线的“滞后部分”及“交点处”对系统的动力学行为的理论分析结果,取质量比  $\beta = 0.675$  及  $\beta = 0.6804$  分别作分岔图, $\beta = 0.675$  为  $l_0 = 0$  和  $l_0 = 0.1$  分别对应的临界流速曲线的交点所对应的质量比(图 5),  $\beta = 0.6804$  为  $l_0 = 0.1$  和  $l_0 = 0.2$  分别对应的临界流速曲线的交点所对应的质量比(图 6).因为两个质量比都小于 0.7,由上文分析知取模态截断数  $n = 6$  能获得可靠的结论。

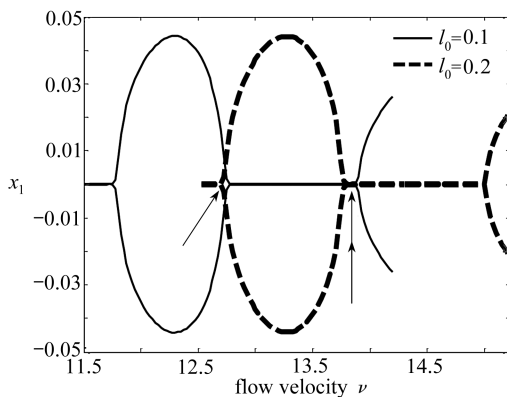
当  $\beta = 0.675$  时,图 5(b) 中单箭头所指的交点属于  $l_0 = 0$  的临界流速曲线的滞后部分,按上文分析,流速增加时该种管道稳定,流速减少时该种管道发生颤振,图 7(a) 实线显示的结果与此相符;与此同时,该交点属于  $l_0 = 0.1$  的临界流速曲线的非滞后部分,据上文分析,流速增

加时该种管道发生颤振,流速减少时该种管道稳定,图 7(a)虚线显示的结果与此相符;图 5(b)中双箭头所指的区间流速值大于  $l_0 = 0$  的临界流速曲线的非滞后部分,小于  $l_0 = 0.1$  的临界流速曲线的滞后部分,因此两种管在此时均发生颤振,与图 7(a)中双箭头所指的区域对应。 $\beta = 0.6804$  可做类似的分析,需要注意的是图 6(b)中双箭头所指示的流速区间与两条临界流速曲线的相对位置关系和图 5(b)中的不同,从而在图 7(b)中,使两种管稳定的流速区间有重合(双箭头所指)。



(a) 流速沿图 5 中的实线增加时两种管 ( $l_0 = 0$  和  $l_0 = 0.1$ ) 的分岔图

(a) Bifurcation diagrams for pipes with scale  $l_0 = 0$  and  $l_0 = 0.1$  as the flow velocity increasing along the black line in fig. 5



(b) 流速沿图 6 中的实线增加时两种管 ( $l_0 = 0.1$  和  $l_0 = 0.2$ ) 的分岔图

(b) Bifurcation diagrams for pipes with scale  $l_0 = 0.1$  and  $l_0 = 0.2$  as the flow velocity increasing along the black line in fig. 6

图 7 分岔图

Fig. 7 The bifurcation diagrams

现考虑图 7 所示的固有振动的频率,将方程(32)写成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \varepsilon), \tag{40}$$

其通过 Hopf 分岔产生周期解,按照文献[42]中的方法,可以将其解、参数  $\varepsilon$  及频率设为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(\omega(\delta)\tau) \\ \varepsilon(\delta) \\ \omega(\delta) - \omega_0 \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n(\omega(\delta)\tau) \\ \varepsilon_n \\ \omega_n \end{bmatrix}, \tag{41}$$

其中  $\delta$  为独立的小参数.将式(41)代入式(40),通过比较  $\delta$  的同次幂能求得相应的级数解,且根据式(41)的后两式可得出频率  $\omega$  对流速增量  $\varepsilon$  的依赖关系.一般而言,在分岔点附近只需求得低次项系数即可估计系统的振动特征,如频率等.由文献[42]中的结论知

$$\begin{cases} \varepsilon_{2n+1} = \omega_{2n+1} = 0, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ i\omega_2 - \varepsilon_2 \lambda'_\varepsilon(0) = \langle \mathbf{p}(0), \mathbf{C}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0), \bar{\mathbf{q}}(0)) \rangle, \end{cases} \tag{42}$$

$\lambda'_\varepsilon(0)$  和  $\langle \mathbf{p}(0), \mathbf{C}(\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0), \bar{\mathbf{q}}(0)) \rangle$  (记其为  $\mathbf{C}_p$ ) 可分别参见式(38)和式(33),解式(42)并考虑式(41)后两式得

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \left\{ \text{Im}[\lambda'_\varepsilon(0)] - \text{Im}(\mathbf{C}_p) \frac{\text{Re}[\lambda'_\varepsilon(0)]}{\text{Re}(\mathbf{C}_p)} \right\} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{43}$$

图 7 所示的振动的频率见图 8,图 8(a)、(b)为图 7(a)所示振动的固有频率,图 8(c)、

(d) 为图 7(b) 所示振动的固有频率, 其中数值解由程序直接计算出, 理论解由式(43) 给定。

图 8 中的数值解和理论解的对比显示, 在临界流速附近, 由式(43) 所给出的结果与精确解符合得较好; 当流速远离临界值时, 由于式(43) 略去了  $\varepsilon$  的高次项, 因此所得结果逐渐远离精确解。

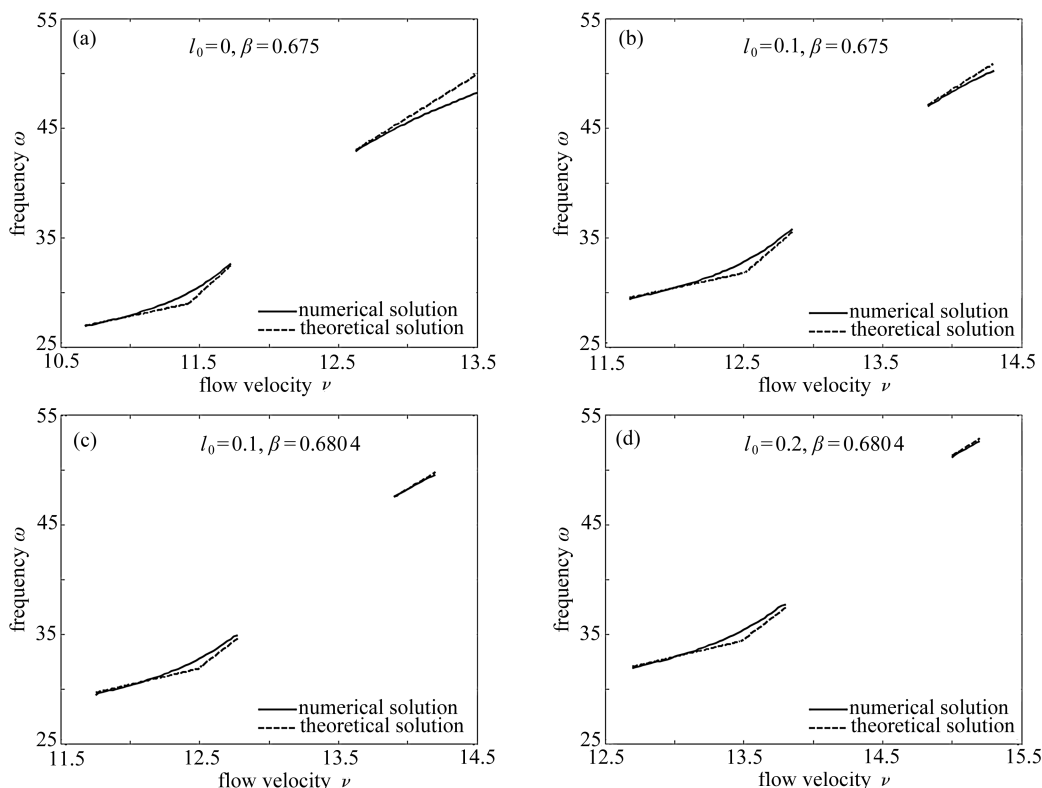


图 8 固有频率

Fig. 8 The natural frequency

### 3 结 论

1) 本文在分析管道上点的位移及相关几何关系的基础上, 考虑 Lagrange 应变张量所给出的几何非线性, 基于修正的偶应力理论计算了管的应变能, 运用 Hamilton 原理建立了微尺度悬臂管振动的非线性动力学方程, 材料长度尺寸参数对方程的影响得以刻画。

2) 对不同模态截断数的 Galerkin 离散化方程, 微尺度效应均使得相应的临界流速更大, 并对第一 Lyapunov 系数有影响, 但是其并不改变临界特征值的变化率的实部。

3) 运用投影法计算的结果表明, 模态截断数越大, Galerkin 方法对系统动力学行为的预测效果越好; 除开大的质量比, 6 或 8 模态近似已能捕获系统的定性动力学性质; 模态截断数大于等于 4 时, 在临界流速曲线上存在滞后部分, 其上发生的分岔与非滞后部分方向相反, 这一结论对以往的研究做了补充;

4) “滞后”使得不同尺度管的临界流速曲线可能相交, 在交点处不同尺度管的分岔方向相反, 因此在实际问题中需确定  $l_0$ 。

5) 在分岔点附近, 固有频率可从理论上导出; 但远离分岔点时, 理论上推导固有频率涉及

扰动参数高次项的计算,较为繁琐,故通过微分方程数值解计算频率更为可取。

### 参考文献(References):

- [1] BENJAMIN T B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid I: theory[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A): Mathematical and Physical Sciences*, 1961, **261**(1307): 457-486.
- [2] GREGORY R W, PAÏDOUSSIS M P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid I: theory[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A): Mathematical and Physical Sciences*, 1966, **293**(1435): 512-527.
- [3] BAJAJ A K, SETHNA P R, LUNDGREN T S. Hopf bifurcation phenomena in tubes carrying a fluid[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1980, **39**(2): 213-230.
- [4] SEMLER C, LI G X, PAÏDOUSSIS M P. The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **169**(5): 577-599.
- [5] 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模态转换(I)(II)[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 819-832.(XU Jian, YANG Qianbiao. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid (I) (II) [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(7): 819-832.(in Chinese))
- [6] CHEN Liqun, ZHANG Yanlei, ZHANG Guoce, et al. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, **58**: 11-21.
- [7] GAN Chunbiao, JING Shuai, YANG Shixi, et al. Effects of supported angle on stability and dynamical bifurcations of cantilevered pipe conveying fluid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2015, **36**(6): 729-746.
- [8] 毛晓晔, 丁虎, 陈立群. 3:1 内共振下超临界输液管受迫振动响应[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(4): 345-351.(MAO Xiaoye, DING Hu, CHEN Liqun. Forced vibration responses of supercritical fluid-conveying pipes in 3:1 internal resonance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 345-351.(in Chinese))
- [9] 徐鉴, 王琳. 输液管动力学分析和控制[M]. 北京: 科学出版社, 2015.(XU Jian, WANG Lin. *Dynamics and Control of Fluid-Conveying Pipe Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese))
- [10] RINALDI S, PRABHAKAR S, VENGALLATORE S, et al. Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: damping, frequency shift, and stability[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, **329**(8): 1081-1088.
- [11] NAJMZADEH M, HAASL S, ENOKSSON P. A silicon straight tube fluid density sensor[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2007, **17**(8): 1657-1663.
- [12] BHIRDE A A, PATEL V, GAVARD J, et al. Targeted killing of cancer cells in vivo and in vitro with EGT-directed carbon nanotube-based drug delivery[J]. *ACS Nano*, 2009, **3**(2): 307-316.
- [13] DELADI S, BERENSCHOT J W, TAS N R, et al. Fabrication of micromachined fountain pen with in situ characterization possibility of nanoscale surface modification[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, **15**(3): 528-534.
- [14] KIM K H, MOLDOVAN N, ESPINOSA H D. A nano fountain probe with sub-100 nm molecular writing resolution[J]. *Small*, 2005, **1**(6): 632-635.

- [15] FLECK N A, MULLER G M, ASHBY M F, et al. Strain gradient plasticity: theory and experiment[J]. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, **42**(2): 475-487.
- [16] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(8): 1477-1508.
- [17] MCFARLAND A W, COLTON J S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors [J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, **15**(5): 1060-1067.
- [18] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10): 2731-2743.
- [19] WANG Y G, LIN W H, LIU N. Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory[J]. *Physica E*, 2013, **47**: 80-85.
- [20] ASGHARI M, KAHROBAIYAN M, AHMADIAN M. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2010, **48**(12): 1749-1761.
- [21] GHAYESH M H, AMABILI M, FAROKHI H. Three-dimensional nonlinear size-dependent behavior of Timoshenko microbeams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2013, **71**: 1-14.
- [22] DAI H L, WANG Y K, WANG L. Nonlinear dynamics of cantilevered microbeams based on modified couple stress theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2015, **94**: 103-112.
- [23] MOHAMMAD-ABADI M, DANESHMEHR A R. Size dependent buckling analysis of microbeams based on modified couple stress theory with high order theories and general boundary conditions[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2014, **74**: 1-14.
- [24] GHAYESH M H, FAROKHI H, ALICI G. Subcritical parametric dynamics of microbeams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2015, **95**: 36-48.
- [25] WANG L. Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, **26**(4): 675-684.
- [26] XIA W, WANG L. Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory[J]. *Microfluidics and Nanofluidics*, 2010, **9**(4/5): 955-962.
- [27] WANG L, LIU H T, NI Q, et al. Flexural vibrations of microscale pipes conveying fluid by considering the size effects of micro-flow and micro-structure [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2013, **71**: 92-101.
- [28] YANG T Z, JI S D, YANG X D, et al. Microfluid-induced nonlinear free vibration of microtubes[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2014, **76**: 47-55.
- [29] HOSSEINI M, BAHAAADINI R. Size dependent stability analysis of cantilever micro-pipes conveying fluid based on modified strain gradient theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2016, **101**: 1-13.
- [30] BAHAAADINI R, HOSSEINI M. Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration and stability analysis of viscoelastic cantilever carbon nanotubes conveying fluid[J]. *Computational Materials Science*, 2016, **114**: 151-159.
- [31] TANG Min, NI Qiao, WANG Lin, et al. Nonlinear modeling and size-dependent vibration analysis of curved microtubes conveying fluid based on modified couple stress theory[J]. *Internationa*

- tional Journal of Engineering Science*, 2014, **84**: 1-10.
- [32] LI G X, PAÏDOUSSIS M P. Stability, double degeneracy and chaos in cantilevered pipes conveying fluid[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1994, **29**(1): 83-107.
- [33] JIN J D, SONG Z Y. Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2005, **20**(6): 763-783.
- [34] JIN J D. Stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, **208**(3): 427-439.
- [35] JIN J D, ZOU G S. Bifurcations and chaotic motions in the autonomous system of a restrained pipe conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **260**(5): 783-805.
- [36] PAÏDOUSSIS M P, GHAYESH M H. Three-dimensional dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid, additionally supported by an intermediate spring array[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, **45**(5): 507-524.
- [37] MODARRES-SADEGHI Y, SEMLER C, WADHAM-GAGNON M, et al. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid—part 3: three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, **23**(4): 589-603.
- [38] MODARRES-SADEGHI Y, PAÏDOUSSIS M P. Chaotic oscillations of long pipes conveying fluid in the presence of a large end-mass[J]. *Computers and Structures*, 2013, **122**: 192-201.
- [39] GHAYESH M H, PAÏDOUSSIS M P, MODARRES-SADEGHI Y. Three-dimensional dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe fitted with an additional spring-support and an end-mass [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(12): 2869-2899.
- [40] CHANG C H, MODARRES-SADEGHI Y. Flow-induced oscillations of a cantilevered pipe conveying fluid with base excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(18): 4265-4280.
- [41] 尤里·阿·库兹涅佐夫. 应用分支理论基础[M]. 金成桴, 译. 北京: 科学出版社, 2010. (KUZNETSOV YURI A. *Elements of Applied Bifurcation Theory* [M]. JIN Chengfu, transl. Beijing: Science Press, 2010. (Chinese version))
- [42] IOOSS G, JOSEPH D D. *Elementary Stability and Bifurcation Theory* [M]. 2nd ed. Springer-Verlag, 1990.

# Research on the Flutter of Micro-Scale Cantilever Pipes—A Finite-Dimensional Analysis

GUO Yong, XIE Jianhua

(*School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R.China*)

**Abstract:** Based on the modified couple stress theory, the integro-differential equations of motion for micro-scale cantilever pipes were derived by means of Hamilton's principle. The geometric nonlinearity, arising from the Lagrangian strain tensor, was taken into account. The integro-differential equations were transformed into ordinary differential equations with the Galerkin method. With different numbers of modes in the Galerkin discretization, the diagrams of critical flow velocity vs. mass ratio were given. The difference between the Galerkin approximation results and the exact solutions to the 2-point boundary problem was investigated and the effect of the internal material length scale parameter on the graphs of critical flow velocity vs. mass ratio was studied. For different numbers of modes, the first Lyapunov's coefficient was calculated and the critical eigenvalue with respect to the flow velocity was derived with the projection method based on the center manifold theory and the normal form method, therefrom, the bifurcation model was analyzed and the effect of the number of modes on the dynamical behaviors was examined. The dynamics of hysteresis and intersection points of the curves of critical flow velocity vs. mass ratio was also investigated and then bifurcation diagrams in different directions were found. Finally, the 6-mode ordinary differential equations of the Galerkin discretization were employed to construct the bifurcation diagrams and verify the relevant results obtained, and the natural frequencies of flutter were calculated through the theoretical analysis and with the numerical method, respectively.

**Key words:** micro-scale cantilever pipe; couple stress theory; critical flow velocity curve; hysteresis; Galerkin method; projection method; frequency

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11572263)

---

引用本文/Cite this paper:

郭勇, 谢建华. 微尺度悬臂管颤振的有限维研究[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(2): 199-214.

GUO Yong, XIE Jianhua. Research on the flutter of micro-scale cantilever pipes—a finite-dimensional analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(2): 199-214.