

# 基于 MQ 拟插值函数逼近的非线性 动力系统数值求解\*

杜 珊, 李风军

(宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021)

**摘要:** 借助多重二次曲面(multi quadrics, MQ)拟插值函数具有较好精确性和稳定性的优势,研究了基于 MQ 拟插值函数和 4 阶 Runge-Kutta 法相结合的方法,构造了求解带有初值问题的非线性动力系统的数值解法,分析了该方法与已有主要方法的优缺点,并给出了相应的数值算例、误差估计。结果表明该方法计算量小、能很好地逼近非线性动力系统的解析解。

**关键词:** 非线性动力系统; 数值方法; MQ 拟插值; 4 阶 Runge-Kutta 法

**中图分类号:** O29;O302      **文献标志码:** A      **doi:** 10.21656/1000-0887.370368

## 引 言

随着现代科学技术的发展和新的数学分析方法、工具的不断更新,关于非线性动力系统的研究范围也越来越广,同时也取得了可喜的成果和突破<sup>[1-5]</sup>。非线性动力系统是一门复杂的非线性科学,它能解决很多线性动力系统不能解决的动力学问题。然而,在理论和实践中,非线性动力系统的求解方法仍有很大的局限性,多数情况下,仍不能求出其精确解。所以,许多研究者就转而研究近似精度较好且易于执行的方法来分析它的形态。

目前,求解非线性动力系统数值解较成熟的方法有摄动法<sup>[6]</sup>、平均法<sup>[6]</sup>、Euler 法<sup>[7]</sup>、梯度法<sup>[8]</sup>、Runge-Kutta 法<sup>[9]</sup>、Adams 显隐式法<sup>[10]</sup>、线性多步法<sup>[10]</sup>等。在求解刚性问题或某些特殊问题时,这些方法会发挥出它们独自的优势,但是在一般非线性动力系统的求解过程中会出现如计算量繁琐<sup>[8]</sup>、计算精度差<sup>[7]</sup>等问题。自然地,我们知道,MQ 拟插值函数适合于散乱数据的初始条件和任何边界条件,它几乎可以逼近所有函数。基于此,本文试图借助 MQ 拟插值函数具有较好精确性和稳定性的优点来求解非线性动力系统给定初值问题的数值解。具体的思想是:利用 MQ 拟插值函数的优点和 4 阶 Runge-Kutta 方法求解非线性动力系统的解析解,分析了该方法与已有比较成熟方法之间的优缺点,并给出了相应的数值算例、误差估计、各种方法的图像,结果表明该方法计算量小、计算稳定、能很好地逼近非线性动力系统的解析解。

## 1 非线性动力系统

非线性动力系统初值问题一般可以用一组微分方程表示为

\* 收稿日期: 2016-11-29; 修订日期: 2017-01-13

基金项目: 国家自然科学基金(11261024;61662060)

作者简介: 杜珊(1991—),女,硕士生(E-mail: d\_d1221@126.com);

李风军(1973—),男,教授,博士(通讯作者。E-mail: fjli@nxu.edu.cn)。

$$x' = f(x), \quad (1)$$

其中,  $x: t \rightarrow x \in R^p$  是以时间为变量的函数, 它是用来描述系统状态的,  $f$  是定义在 Euclid 空间  $R^p$  或者是一个开子空间  $V \subseteq R^p$  的至少为一次连续可微的函数.

通常, 对于线性动力系统的一般解, 可以用  $P$  个线性无关解  $\{x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)\}$  的线性组合来表示. 但是线性系统的叠加法则对于非线性系统并不适用, 所以复杂问题的解不可能由这些简单问题的解叠加组成. 由文献[6]知, 非线性动力系统初值问题可由如下微分方程表示:

$$\begin{cases} x' = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad x \in R^p, \quad (2)$$

此方程在  $t \in (-a, a)$  这个区间内至少有一个从  $t = 0$  出发的解. 从而, 虽然可以像线性动力系统这样的方法定义一个局部流, 但却不能与线性动力系统一样直接给出一般的求解规则. 所以对非线性动力系统的研究, 通常采用数值求解的方法得出解的结构.

## 2 预备知识

### 2.1 MQ 拟插值基本理论

MQ 函数是径向基函数(radial basis function, RBF)中的一种, 这种函数的本质是用简单一元函数的复合来表示多元函数, 它适合于散乱数据的初始条件和任何边界条件, 所以它几乎可以逼近所有函数, 应用非常广泛. MQ 拟插值函数是 MQ 函数的延伸拓展.

MQ 函数是 Hardy<sup>[11]</sup> 于 1971 年提出出来的一种径向基函数. Hardy 在文献[11]中提出了 MQ 拟插值 ( $\phi(x) = \sqrt{c^2 + x^2}$ ,  $c$  为形状参数且大于 0), 由于其较好的插值结果得到了大量研究者的关注. 理论方面, 大量的 MQ 拟插值算子被提出<sup>[12-16]</sup>; 实践方面, MQ 拟插值不仅被应用于曲面拟合、地壳运动、摄影测量等方面<sup>[17]</sup>, 在神经网络方面也有很好的应用<sup>[18]</sup>, 而且在常微分方程和偏微分方程的求解过程中也应用广泛<sup>[19-22]</sup>. Franke<sup>[23]</sup> 通过比较得知 MQ 拟插值在精确性、稳定性等方面具有较好的性质; Madych 和 Nelson<sup>[24]</sup> 证明了用 MQ 拟插值可得到最小半范数误差; Buhmann<sup>[25]</sup> 研究了 MQ 拟插值在奇数维 Euclid 空间上的收敛性问题; Beatson 和 Powell<sup>[26]</sup> 在有界区间上构造了 3 种 MQ 拟插值算子:  $L_A f, L_B f, L_C f$ , Wu 和 Schaback<sup>[14]</sup> 构造了一种不需要知道两 endpoints 处的导数值且有很好逼近度的 MQ 拟插值算子  $L_D f$ .

**定义 1** 设在  $[t_0, t_n]$  上取一组点列  $\{t_i: i = 0, 1, \dots, n\}$  且  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , 称这些点为节点. 记  $h$  为最大步长, 且  $h = \max\{(t_i - t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n\}$ . 其中  $t \in [t_0, t_n]$ , 与节点  $t_i (i = 0, 1, \dots, n)$  对应的被逼近函数  $f(t)$  的对应节点值为  $f(t_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ .

#### 定义 2

$$\phi_i(t) = \sqrt{(t - t_i)^2 + c^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3)$$

$c$  为参数且大于 0.

$$\psi_i(t) = \frac{\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)}{2(t_{i+1} - t_i)} - \frac{\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t)}{2(t_i - t_{i-1})} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (4)$$

下面给出实际中应用较多的 4 种 MQ 拟插值算子:  $L_A f, L_B f, L_C f, L_D f$ <sup>[14, 26]</sup> 及其误差估计<sup>[14, 27]</sup>.

设给定插值节点  $(t_i, x_i), i = 0, 1, \dots, n, t \in \mathbf{R}$ , 4 种拟插值算子的形式如下:

$$L_A f(t) = f(t_0)\alpha_0(t) + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\psi_i(t) + f(t_n)\alpha_n(t), \quad (5)$$

$$L_B f(t) = f(t_0)\beta_0(t) + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\psi_i(t) + f(t_n)\beta_n(t), \quad (6)$$

$$L_C f(t) = f'(t_0)\gamma_0(t) + f(t_0)\beta_0(t) + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\psi_i(t) + f(t_n)\beta_n(t) + f'(t_n)\gamma_n(t), \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{\phi_1(t) - \phi_0(t)}{2(t_1 - t_0)} + \frac{\phi_0(t) + \phi_n(t)}{2(t_n - t_0)}, \\ \alpha_n(t) &= \frac{\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)}{2(t_n - t_{n-1})} + \frac{\phi_0(t) + \phi_n(t)}{2(t_n - t_0)}, \\ \beta_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\phi_1(t) - \phi_0(t)}{2(t_1 - t_0)}, \beta_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)}{2(t_n - t_{n-1})}, \\ \gamma_0(t) &= \frac{t - t_0}{2} - \frac{\phi_0(t)}{2}, \gamma_n(t) = \frac{\phi_n(t)}{2} - \frac{t_n - t}{2}. \end{aligned}$$

由于  $L_C f$  的构造需要知道函数在两端点处的导数值,但是在解决实际问题的時候,两端点的导数值不易求出,故 Wu 和 Schaback<sup>[14]</sup> 提出了  $L_D f$ .

$$L_D f(t) = f(t_0)\delta_0(t) + f(t_1)\delta_1(t) + \sum_{i=2}^{n-2} f(t_i)\psi_i(t) + f(t_{n-1})\delta_{n-1}(t) + f(t_n)\delta_n(t), \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\phi_1(t) - (t - t_0)}{2(t_1 - t_0)}, \delta_1(t) = \frac{\phi_2(t) - \phi_1(t)}{2(t_2 - t_1)} + \frac{\phi_1(t) - (t - t_0)}{2(t_1 - t_0)}, \\ \delta_{n-1}(t) &= \frac{t_n - t - \phi_{n-1}(t)}{2(t_n - t_{n-1})} - \frac{\phi_{n-1}(t) - \phi_{n-2}(t)}{2(t_{n-1} - t_{n-2})}, \delta_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{(t_n - t) - \phi_{n-1}(t)}{2(t_n - t_{n-1})}. \end{aligned}$$

对应的误差估计为

$$\|L_A f(t) - f(t)\|_\infty \leq \frac{c |f(t_0) + f(t_n)|}{t_n - t_0} + \left(1 + \frac{c}{h}\right) \omega(f, h), \quad (9)$$

$$\|L_B f(t) - f(t)\|_\infty \leq \left(1 + \frac{c}{h}\right) \omega(f, h), \quad (10)$$

$$\|L_C f(t) - f(t)\|_\infty \leq O(c^2) + O(h^2), \quad (11)$$

$$\|L_D f(t) - f(t)\|_\infty \leq O(h^2) + O(ch) + O(c^2 \lg h), \quad (12)$$

其中,  $\omega(f, h)$  是函数  $f(t)$  在步长  $h$  下取得的最大值.

**引理 1**<sup>[14,27]</sup> 拟插值算子  $L_A f$  没有常数再生性;拟插值算子  $L_B f$  有常数再生性但没有线性再生性;拟插值算子  $L_C f, L_D f$  有线性再生性、保单调性、保凸性.

### 2.2 4 阶 Runge-Kutta 法基本理论

Runge-Kutta 法是求解微分方程的常用方法,一般在所求解方程有较好光滑性的情况下,虽然 4 阶 Runge-Kutta 法每一步都需要计算 4 次函数值,但是它的求解精度较好.

**定义 3**<sup>[28]</sup> 设  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n (i = 0, 1, \dots, n)$  为一系列离散节点,  $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  为其对应节点的值,相邻两节点的距离为步长  $h$ , 则有

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

其中

$$K_1 = f(t_i, x_i), K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} K_1\right),$$

$$K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} K_2\right), K_4 = f(t_i + h, x_i + hK_3).$$

### 3 数值解法

#### 3.1 已有数值方法分析

目前,有关非线性动力系统数值求解的方法有摄动法<sup>[6]</sup>、平均法<sup>[6]</sup>、Euler 法<sup>[7]</sup>、梯形法<sup>[8]</sup>、Runge-Kutta 法<sup>[9]</sup>、Adams 显隐式法<sup>[10]</sup>、多步法<sup>[10]</sup>、基于三次样条插值函数的方法<sup>[29]</sup>、基于径向基函数逼近的方法<sup>[30]</sup>等.摄动法的局限性在于只能求解弱非线性动力系统;平均法虽然在部分应用中可以取得比较好的结果,但是在绝大多数情况下,它不能估计精度,会产生错误的结果;Euler 法在  $x(t)$  是一次多项式时精度很高,而在其他情形下精度很差;梯形法是隐式单步法,可用迭代法求解,此方法虽然提高了精度,但其算法复杂;Adams 显隐式法虽然有良好的稳定性且易于变阶变步长,但是如何选择恰当的阶和步长也是影响其精度的主要因素;Runge-Kutta 法的精度比前面几种方法都高,但是当 Runge-Kutta 法的阶数大于 4 时,计算量将会变得很大,精度可能反而不如改进的 Euler 法,会有 Runge 现象中的不收敛情况产生;基于三次样条插值函数的方法由于受插值条件的局限性,不会产生 Runge 现象中的不收敛情况,求解方法的精度也很好<sup>[29]</sup>,但是当其阶数较高时,就要求三次样条插值函数有高阶连续性,此时,它的构造极其困难<sup>[30]</sup>;基于径向基函数逼近的方法计算过程简单、收敛性好、计算精度高<sup>[29]</sup>,但是这个方法涉及到矩阵求逆的问题,当数据点越来越多时这个矩阵的条件数越来越大,这个矩阵也越来越接近奇异矩阵,这个时候求逆是非常不精确的<sup>[31]</sup>.

#### 3.2 构造基于 MQ 拟插值函数的数值求解方法

MQ 拟插值函数具有较好的精确性和稳定性.它是对函数直接求值,既不需求解任何线性方程组,也不需要矩阵求逆,从而可以避免遇到数据大量增加时的矩阵求逆问题<sup>[31]</sup>.本文借助 4 阶 Runge-Kutta 法和 MQ 拟插值函数对非线性动力系统的初值问题进行求解.

由第 2 节的引理 1 知,从线性再生性、保单调性、保凸性角度有拟插值算子  $L_C f$  优于  $L_A f$ ,  $L_B f$ ;从逼近角度有拟插值算子  $L_D f$  不低于  $L_C f$ ,但是从拟插值算子的构造结果知  $L_D f$  在求解过程中不像  $L_C f$  那样需要知道端点处的导数值,故  $L_D f$  优于  $L_C f$ .基于此,本文利用拟插值算子  $L_D f$  求解给定初值问题的非线性动力系统的数值解.

规定求解时间区域  $T$  用  $n + 1$  个节点  $t_i (i = 0, 1, \dots, n)$  离散且  $t_i$  为等距节点(即  $t_{i+1} = t_i + h, h$  为步长),则函数  $x(t)$  在区域  $T$  里的近似函数  $L_{D1} f(t)$  可由一组以各节点  $t_i$  为中心的拟插值函数  $\phi_i(t)$  的线性组合来表示为

$$L_{D1} f(t) = \sum_{i=0}^n f(t_i) \varphi_i(t), \quad (13)$$

特别地,有

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{\phi_1(t) - (t - t_0)}{2(t_1 - t_0)} = \frac{1}{2} + \frac{\phi_1(t) - (t - t_0)}{2h},$$

$$\varphi_1(t) = \frac{\phi_2(t) - \phi_1(t)}{2(t_2 - t_1)} - \frac{\phi_1(t) - (t - t_0)}{2(t_1 - t_0)} = \frac{\phi_2(t) - 2\phi_1(t) + (t - t_0)}{2h},$$

$$\varphi_{n-1}(t) = \frac{t_n - t - \phi_{n-1}(t)}{2(t_n - t_{n-1})} - \frac{\phi_{n-1}(t) - \phi_{n-2}(t)}{2(t_{n-1} - t_{n-2})} = \frac{t_n - t - 2\phi_{n-1}(t) + \phi_{n-2}(t)}{2h},$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{(t_n - t) - \phi_{n-1}(t)}{2(t_n - t_{n-1})} = \frac{1}{2} - \frac{(t_n - t) - \phi_{n-1}(t)}{2h},$$

$$\varphi_i(t) = \frac{\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)}{2(t_{i+1} - t_i)} - \frac{\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t)}{2(t_i - t_{i-1})} =$$

$$\frac{\phi_{i+1}(t) - 2\phi_i(t) + \phi_{i-1}(t)}{2h} \quad (2 \leq i \leq n - 2).$$

式(13)中,  $f(t_i)$  表示函数  $x(t_i)$  的精确值.很多非线性动力系统问题的精确解不易求出,同时也为了避免求解非线性代数方程组时遇到的矩阵奇异、非奇异及求逆问题,采用 4 阶 Runge-Kutta 法计算出其近似值使  $\tilde{f}(t_i) = f(t_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ .同时将其代入式(13)用于计算 MQ 拟插值算子构造的  $L_{DI}f(t)$ .又因为微分方程有初值条件,所以  $f(t_0) = x_0$ .

本文所用方法在每一步计算中均可以避免大规模矩阵求逆问题且具有计算稳定、计算速度快、计算量小的优点,因此可以有效地进行逼近.

### 4 算例分析

例 1 给定一阶非线性动力系统初值问题<sup>[29]</sup>:

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 - t - 2}{4(1 + t)}, & 0 \leq t \leq 10, \\ x(0) = 2. \end{cases} \quad (14)$$

试用本文方法和已有主要方法对其求解并比较结果.

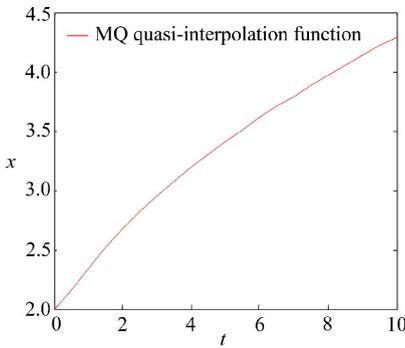


图 1 MQ 拟插值法曲线

Fig. 1 The MQ quasi-interpolation curve

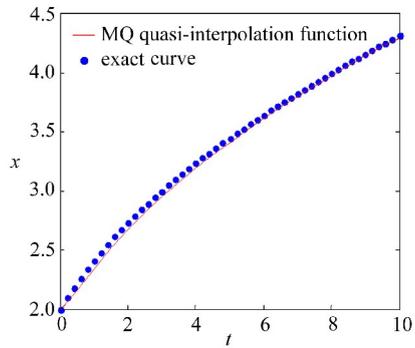


图 2 数值方法曲线和精确解曲线

Fig. 2 The numerical method curve and the exact curve

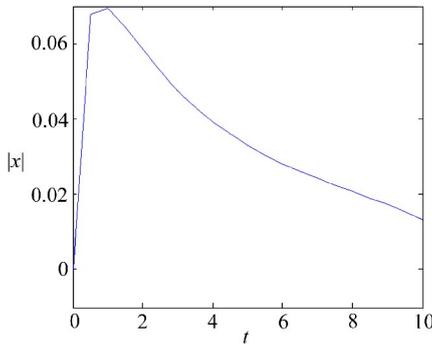


图 3 绝对误差

Fig. 3 The absolute error

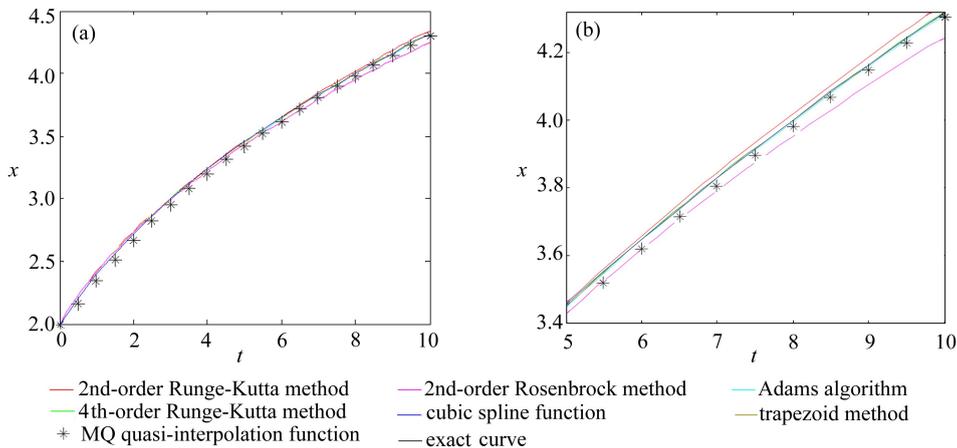


图 4 不同数值方法求解系统(14)的数值曲线比较

Fig. 4 Solution curves of system (14) with different numerical methods in comparison

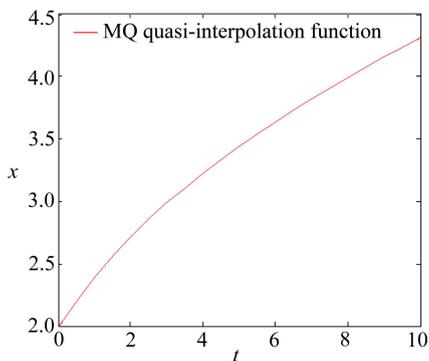


图 5 MQ 拟插值法曲线

Fig. 5 The MQ quasi-interpolation curve

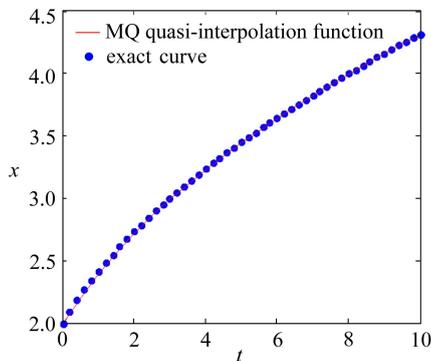


图 6 数值方法曲线和精确解曲线

Fig. 6 The numerical method curve and the exact curve

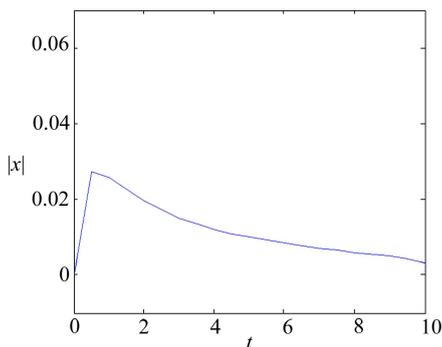


图 7 绝对误差

Fig. 7 The absolute error

借助 MQ 拟插值函数逼近的方法对一阶非线性动力系统(14)求解,由于式(3)中参数  $c$  是变量且大于 0.下面分别给出参数  $c$  取不同值时的曲线图:图 1~图 4 是由参数  $c = 1$  时得出的数值曲线、精确解曲线、绝对误差及数值曲线比较.类似地,图 5~图 8、图 9~图 12、图 13~图 16 分别是在参数  $c = 0.5, c = 0.1, c = 0.01$  时得到的对应数值曲线、精确曲线及绝对误差(后图均为图(a)的局部放大图).其中数值曲线如图 1、5、9、13 所示;MQ 拟插值函数逼近法所求近似解与式(14)精确

解的比较如图 2、6、10、14 所示;近似解与精确解的绝对误差比较如图 3、7、11、15 所示。

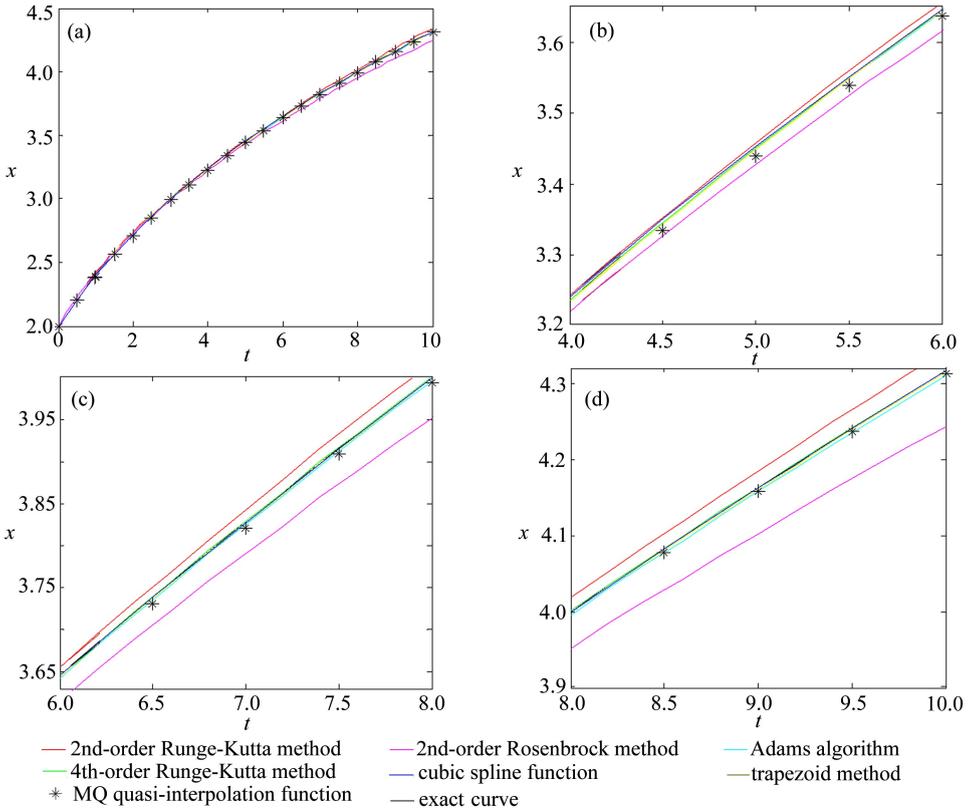


图 8 不同数值方法求解系统(14)的数值曲线比较

Fig. 8 Solution curves of system (14) with different numerical methods in comparison

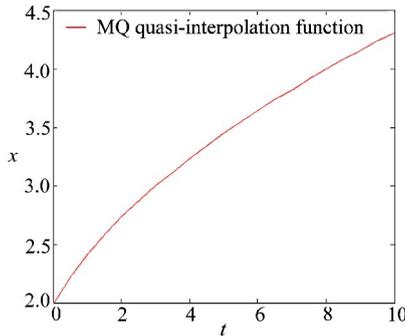


图 9 MQ 拟插值法曲线

Fig. 9 The MQ quasi-interpolation curve

表 1 MQ 拟插值函数法的均方误差

Table 1 Mean square errors of the methods for the multi quadric quasi-interpolation

$c$	1	0.5	0.1	0.01
MSE	$1.565\ 7 \times 10^{-3}$	$1.828\ 1 \times 10^{-4}$	$1.968\ 6 \times 10^{-6}$	$1.257\ 9 \times 10^{-8}$

表 1 给出了参数  $c$  取不同值时, MQ 拟插值函数求解系统(14)的均方误差.接着对系统(14)分别作出 2 阶 Rosenbrock 法、2 阶 Runge-Kutta 法、梯形算法、Adams 算法、4 阶 Runge-Kutta 法、三次样条函数插值法等数值方法的数值曲线并与本文所采用的的基于 MQ 拟插值函数

逼近的方法进行比较,给出对应的均方误差,具体由图 4、8、12、16 和表 2 给出。

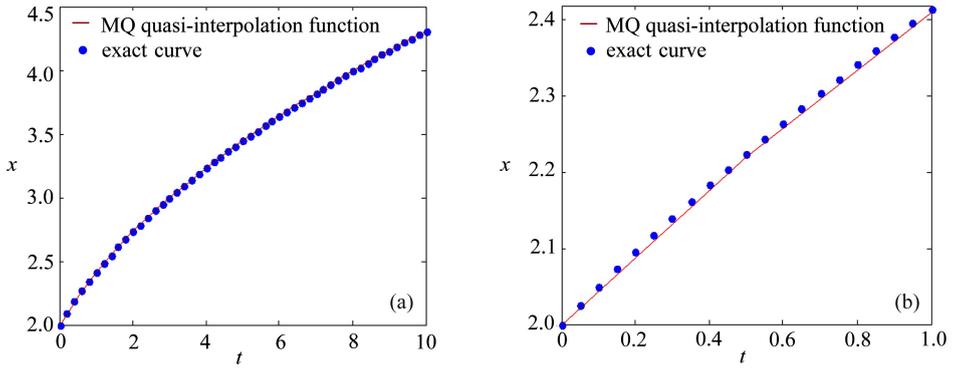


图 10 数值方法曲线和精确解曲线

Fig. 10 The numerical method curve and the exact curve

表 2 不同数值方法求解一阶非线性动力系统(14)的均方误差

Table 2 Mean square errors of different numerical methods for 1st-order nonlinear dynamic system (14)

numerical solution method	mean square error
2nd-order Runge-Kutta method	$9.100 \times 10^{-3}$
2nd-order Rosenbrock method	$2.900 \times 10^{-2}$
Adams algorithm	$2.200 \times 10^{-1}$
4th-order Runge-Kutta method	$1.240 \times 10^{-4}$
cubic spline function	$8.024 \times 10^{-5}$
trapezoid method	$5.549 \times 10^{-4}$
MQ quasi-interpolation function ( $c = 0.1$ )	$1.968 \times 10^{-6}$

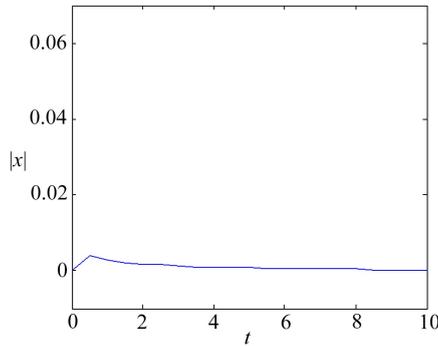


图 11 绝对误差

Fig. 11 The absolute error

从图 2、6、10、14 中可以看出,随着参数  $c$  的减小,数值解与精确解的吻合程度越来越好;从图 3、7、11、15 知,随着参数  $c$  的减小,绝对误差也越来越小,特别是当  $c \leq 0.01$  时,绝对误差几乎接近于 0;从图 4、8、12、16 可以得出不同数值方法相对于精确解的近似程度,但有些图不能清楚地看出数值曲线与精确解的比较(文中未给出),所以将其进行放大以便于更直观地比较各种数值方法的精度;可得到文中基于 MQ 拟插值函数逼近的方法在参数  $c$  逐渐减小的过程中,数值曲线与精确曲线吻合的相当完美;由表 1 和表 2 易知:只要参数  $c$  的取值合适,4 阶 Runge-Kutta 法逊色于文中所使用方法,但却与三次样条函数插值法的精度相当.因此,基于 MQ 拟插值函数逼近的方法对非线性动力系统的求解是可行的。

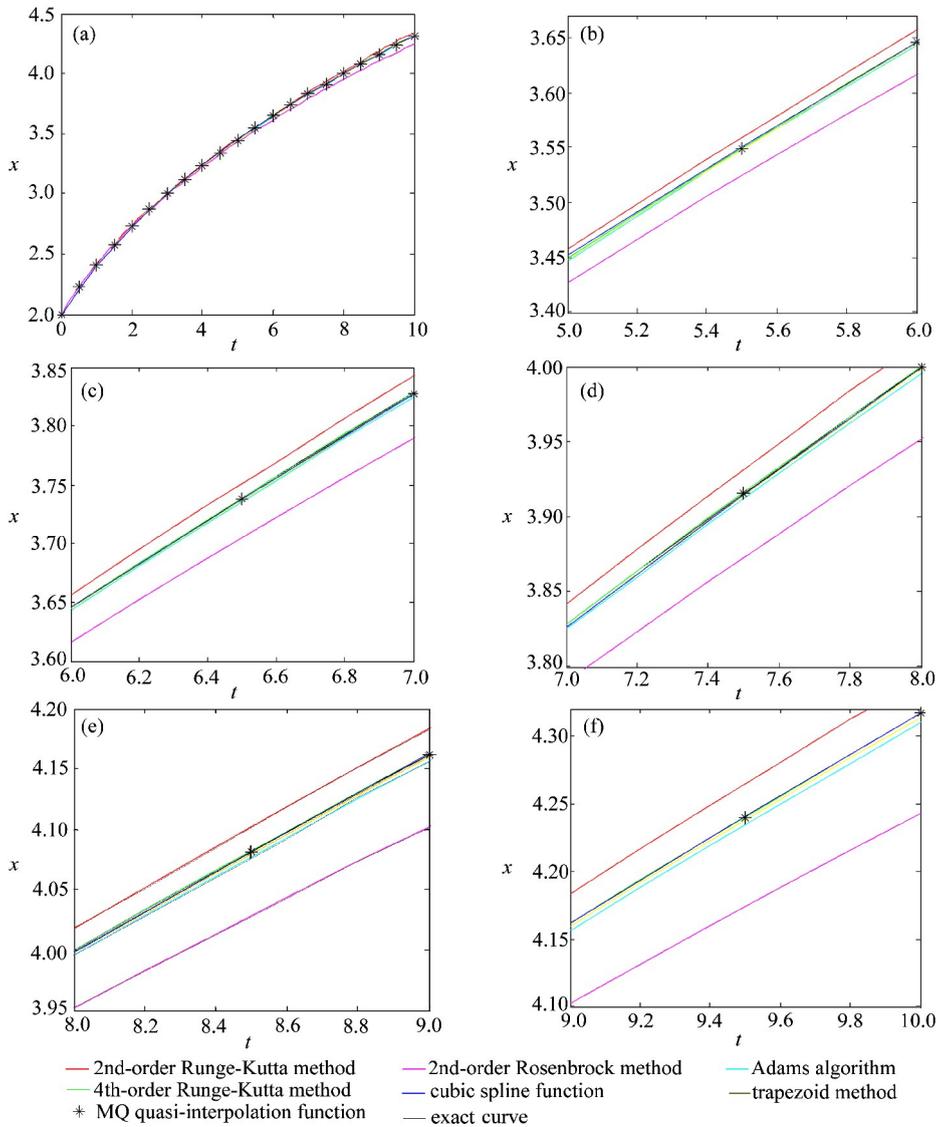


图 12 不同数值方法求解系统(14)的数值曲线比较

Fig. 12 Solution curves of system (14) with different numerical methods in comparison

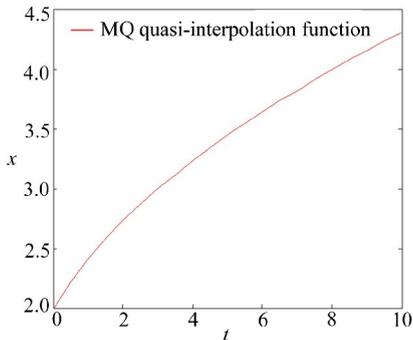


图 13 MQ 拟插值法曲线

Fig. 13 The MQ quasi-interpolation curve

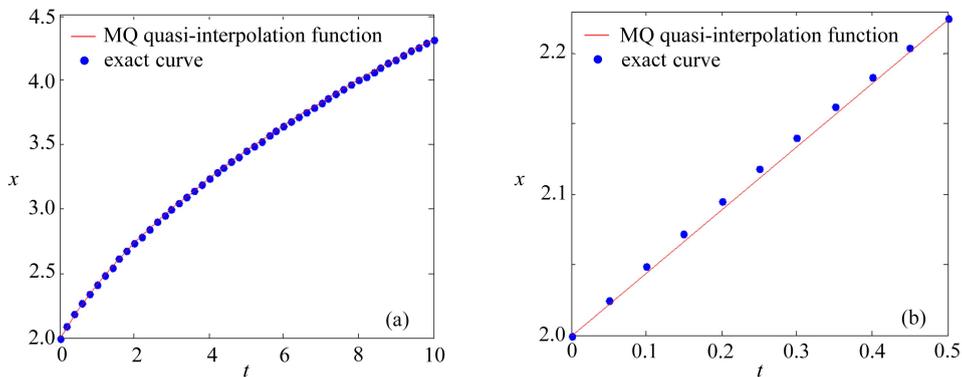


图 14 数值方法曲线和精确解曲线

Fig. 14 The numerical method curve and the exact curve

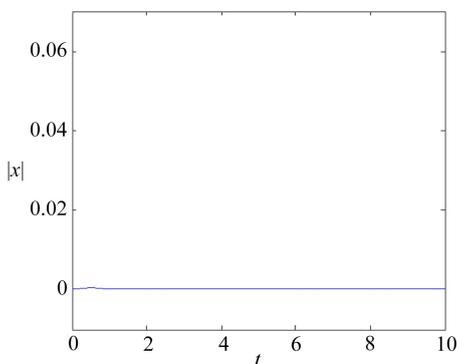


图 15 绝对误差

Fig. 15 The absolute error

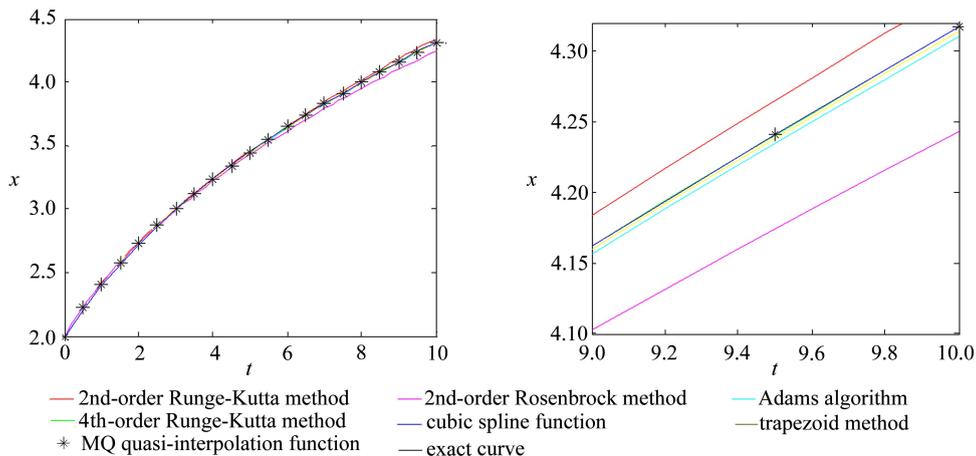


图 16 不同数值方法求解系统(14)的数值曲线比较

Fig. 16 Solution curves of the system (14) with different numerical methods in comparison

## 5 结 论

MQ 拟插值函数具有较好的精确性和稳定性,对函数直接赋值,不需要对矩阵求逆,可以

避免遇到条件数很大的矩阵求逆的问题.利用 MQ 拟插值函数构造数值方法并给出相应的数值算例、数值曲线、误差图像进行验证,结果表明基于 MQ 拟插值函数构造的对于非线性动力系统数值求解方法在参数  $c$  取值合适的情况下,明显优于其他几种数值方法且计算量小、计算稳定、能很好地逼近系统的解析解.在未来的进一步工作中,应该探讨在误差允许范围内,参数  $c$  的取值和精确解之间有何关系,而不是通过大量的数值实验来确定.

#### 参考文献(References):

- [1] DAI Hong-hua, YUE Xiao-kui, YUAN Jiang-ping, et al. Half-order optimally scaled Fourier expansion method for solving nonlinear dynamical system[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, **87**: 21-29.
- [2] LIU Chein-shan. A novel Lie-group theory and complexity of nonlinear dynamical systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, **20**(1): 39-58.
- [3] LIU Yan-jun, TONG Shao-cheng. Adaptive fuzzy control for a class of unknown nonlinear dynamical systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2015, **263**(15): 49-70.
- [4] Zeng Y, Zhu W Q. Stochastic averaging of  $n$ -dimensional non-linear dynamical systems subject to non-Gaussian wide-band random excitations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, **45**(5): 572-586.
- [5] Chen Y M, Liu J K. A precise calculation of bifurcation points for periodic solution in nonlinear dynamical systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, **273**: 1190-1195.
- [6] E·克鲁译. 非线性动力学系统的数值研究[M]. 凌复华, 译. 上海:上海交通大学出版社, 1989. (Kreuzer E. *Numerische Untersuchung Nichtlinearer Dynamischer Systeme* [M]. LING Fu-hua, transl. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1989. (in Chinese))
- [7] 刘向军, 石磊, 徐旭常. 稠密气固两相流欧拉-拉格朗日法的研究现状[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(2): 166-172. (LIU Xiang-jun, SHI Lei, XU Xu-chang. Activities of dense particle-gas two-phase flow modeling in Eulerian-Lagrangian approach[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(2): 166-172. (in Chinese))
- [8] 刘石, 陈德祥, 冯永新, 等. 等几何分析的多重网格共轭梯度法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(6): 630-639. (LIU Shi, CHEN De-xiang, FENG Yong-xin, et al. A multigrid preconditioned conjugate method for isogeometric analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 630-639. (in Chinese))
- [9] 陈全发, 肖爱国. Runge-Kutta-Nyström 方法的若干新性质[J]. 计算数学, 2008, **30**(2): 201-212. (CHEN Quan-fa, XIAO Ai-guo. Some new properties of Runge-Kutta-Nyström methods [J]. *Mathematic Numeric Sinica*, 2008, **30**(2): 201-212. (in Chinese))
- [10] 樊文欣, 杨桂通, 岳文忠. 基于 ADAMS 的发动机动力学通用分析模型[J]. 应用基础与工程科学学报, 2009, **17**(S1): 172-178. (FAN Wen-xin, YANG Gui-tong, YUE Wen-zhong. The dynamic universal analysis model of engine based on ADAMS[J]. *Journal of Basic Science and Engineering*, 2009, **17**(S1): 172-178. (in Chinese))
- [11] Hardy R L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1971, **76**(8): 1905-1915.
- [12] Beatson R K, Dyn N. Multi-quadric  $B$ -splines[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1986, **87**(1): 1-24.
- [13] Hon Y C, Mao X Z. An efficient numerical scheme for Burgers' equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, **95**: 37-50.

- [14] WU Zong-min, Schaback R. Shape preserving properties and convergence of univariate multiquadric quasi-interpolation [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1994, **10**(4): 441-446.
- [15] MA Li-min, WU Zong-min. Approximation to the  $k$ -th derivatives by multiquadric quasi-interpolation method [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, **231**(2): 925-932.
- [16] MA Li-min, WU Zong-min. Stability of multiquadric quasi-interpolation to approximate high order derivatives [J]. *Science China Mathematics*, 2010, **53**(4): 985-992.
- [17] Hardy R L. Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method: 20 years of discovery 1968-1988 [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 1990, **19**(8/9): 163-208.
- [18] Buhmann M D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [19] WU Hui-yuan, DUAN Yong. Multi-quadric quasi-interpolation method coupled with FDM for the Degasperis-Procesi equation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, **274**: 83-92.
- [20] GAO Wen-wu, WU Zong-min. Solving time-dependent differential equations by multiquadric trigonometric quasi-interpolation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **253**: 377-386.
- [21] GAO Feng, CHI Chun-mei. Numerical solution of nonlinear Burger' equations using high accuracy multi-quadric quasi-interpolation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **229**: 414-421.
- [22] WU Zong-min, ZHANG Sheng-liang. Conservative multiquadric quasi-interpolation method for Hamiltonian wave equations [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2013, **37**(7/8): 1052-1058.
- [23] Franke R. Scattered data interpolation: text of some methods [J]. *Mathematics of Computation*, 1982, **38**: 181-200.
- [24] Madych W R, Nelson S A. Error bounds for multiquadric interpolation [J]. *Approximation Theory*, 1991, 12: 413-416.
- [25] Buhmann M D. Multivariate interpolation in odd-dimensional Euclidean space using multiquadrics [J]. *Constructive Approximation*, 1990, **6**(1): 21-34.
- [26] Beatson R, Powell M J D. Univariate multiquadric approximation: quasi-interpolation to scattered data [J]. *Constructive Approximation*, 1992, **8**(3): 275-288.
- [27] Power M J D. Univariate multiquadric approximation: reproduction of linear polynomials multivariate approximation and interpolation [M] // Haußmann W, Jetter K. *Multivariate Approximation and Interpolation*. Birkhäuser Basel, 1990: 227-240.
- [28] 李庆阳, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008. (LI Qing-yang, WANG Neng-chao, YI Da-yi. *Numerical Analysis* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese))
- [29] 李鹏柱, 李风军, 李星, 等. 基于三次样条插值函数的非线性动力系统数值求解 [J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(8): 887-896. (LI Peng-zhu, LI Feng-jun, LI Xing, et al. A numerical method for the solution to nonlinear dynamic systems based on cubic spline interpolation functions [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(8): 887-896. (in Chinese))
- [30] 李岩汀, 许锡宾, 周世良, 等. 基于径向基函数逼近的非线性动力系统数值求解 [J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(3): 311-318. (LI Yan-ting, XU Xi-bin, ZHOU Shi-liang, et al. A numerical

- approximation method for nonlinear dynamic systems based on radial basis functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(3): 311-318. (in Chinese))
- [31] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解[J]. 工程数学学报, 2002, **19**(2): 1-12. (WU Zong-min. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, **19**(2): 1-12. (in Chinese))
- [32] 刘卫国. MATLAB 程序设计与应用[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2008. (LIU Wei-guo. *MATLAB Program Design and Application* [M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese))

## A Numerical Approximation Method for Solutions to Nonlinear Dynamic Systems Based on Multiquadric Quasi-Interpolation Functions

DU Shan, LI Feng-jun

(School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, P.R.China)

**Abstract:** The multiquadric quasi-interpolation function has advantages of high accuracy and good stability. A new numerical method for resolving the initial value problems of nonlinear dynamic systems was proposed via combination of the multiquadric quasi-interpolation function and the 4th-order Runge-Kutta method. The advantages and disadvantages were analyzed between this new method and the existing numerical methods for nonlinear dynamic systems, according to the numerical example and error estimation. The results show that the proposed method needs less computation cost and enables fine approximation to the analytical solutions to nonlinear dynamic systems.

**Key words:** nonlinear dynamic system; numerical method; multiquadric quasi-interpolation; 4th-order Runge-Kutta method

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11261024;61662060)

---

引用本文/Cite this paper:

杜珊, 李风军. 基于 MQ 拟插值函数逼近的非线性动力系统数值求解[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(8): 943-955.

DU Shan, LI Feng-jun. A numerical approximation method for solutions to nonlinear dynamic systems based on multiquadric quasi-interpolation functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 943-955.