

一类基于忆阻器分数阶时滞神经网络的 修正投影同步*

张玮玮¹, 陈定元¹, 吴然超², 曹进德³

(1. 安庆师范大学 数学与计算科学学院, 安徽 安庆 246133;

2. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230039;

3. 东南大学 数学学院, 南京 210096)

摘要: 基于忆阻器分数阶时滞神经网络的研究是一个热点问题, 该文主要研究了基于忆阻器分数阶时滞混沌神经网络的修正投影同步, 结合分数阶微分不等式, 得到了实现主动-被动系统获得同步的充分条件, 其研究结果更具有一般性, 相应的数值模拟证实了方法的有效性.

关键词: 分数阶; 基于忆阻器神经网络; 时滞; 修正投影同步

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.370359

引言

分数阶微积分主要集中处理任意阶微分和积分, 其研究已有 300 多年的历史, 由于其复杂性和缺乏实际应用背景而发展缓慢^[1-2]. 最近几十年, 有关专论和会议加强了分数阶微积分在物理、生物工程、信号处理等方面的应用^[3-5]. 由于分数阶微积分具有记忆和遗传性质的优点, 一些作者引入分数阶微积分到神经网络, 从而形成分数阶神经网络, 它能更好地描述神经元的动力学行为.

值得注意的是, 大部分工作研究的是不带时滞的分数阶神经网络^[6-11]. 但是在实际系统中, 不可避免地存在测量和通讯的落后, 导致系统存在时滞, 时滞微分模型也存在于大量的生物系统、工程系统和人工神经网络中^[12-17]. 并且时滞能引起系统的振动和不稳定行为, 从而导致系统具有更复杂的动力学行为. 因此, 研究时滞微分模型具有更大的意义.

另一方面, 自从 Pecora(皮卡)等在 1990 年研究了混沌同步^[18]以后, 同步已成为神经网络和复杂网络的一个热点话题. 直到现今, 许多类型的同步被研究, 譬如完全同步、滞后同步、相同步、投影同步、广义同步等, 而且同步的方法也不断涌现^[19-21]. 在众多类型的同步中, 由于

* 收稿日期: 2016-11-18; 修订日期: 2017-01-24

基金项目: 国家自然科学基金(11571016); 安徽省自然科学基金(11040606M12; 1608085MA14); 安徽省高等学校自然科学研究重点项目(KJ2015A152); 安徽省高校自然科学研究一般项目(AQKJ2014B012)

作者简介: 张玮玮(1982—), 男, 讲师, 硕士(通讯作者. E-mail: wwzhahu@aliyun.com);

陈定元(1975—), 男, 副教授, 硕士(E-mail: aqnu123@163.com);

吴然超(1971—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: rcw@ahu.edu.cn);

曹进德(1963—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 欧州科学院院士(E-mail: jdcao@seu.edu.cn).

投影同步带有一定的比例特征,能获得较快的通信,因此,投影同步的研究具有重要的理论和应用价值.最近,投影同步已被众多作者广泛研究^[6-7].

尽管一些作者研究了分数阶带时滞神经网络的稳定性和同步问题^[15-17],但是,关于基于忆阻器分数阶时滞神经网络仍然是个开放性的课题.1971年,Chua首先提出了忆阻器的概念^[22].基于忆阻器神经网络是一个特殊的神经网络类型^[23-24].由于忆阻器在新的模拟电路中有着重要的作用,其能即时模仿大脑的功能,而传统的电阻器不能实现记忆功能,故关于基于忆阻器神经网络的动力学分析和同步已经吸引了许多研究者的注意^[25-31].但就现有文献,关于基于忆阻器分数阶时滞神经网络的投影同步还很少被研究^[30-31].鉴于此,本文主要讨论基于忆阻器分数阶时滞神经网络的修正投影同步,结合分数阶微分不等式,得到了保证主动-被动系统获得同步的充分条件.

1 预备知识

关于分数阶微积分的定义有多种形式,常用有 Riemann-Liouville 分数阶导数和 Caputo 分数阶导数,从分数阶导数的 Laplace(拉普拉斯)变换中认识到, Caputo 定义的优势在于构成问题定解条件时只需要用到整数阶导数的初始条件,因此,在本文中,所采用的是 Caputo 分数阶导数.

定义 1^[1] 函数 $\mathbf{x}(t)$ 的 α 阶 Caputo 导数定义如下:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \mathbf{x}^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中 $n - 1 < \alpha < n \in \mathbf{Z}_+$.

定义 2^[1] 含两个参数的 Mittag-Leffler 函数为如下形式:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p\alpha + \beta)}, \quad (2)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbf{C}$.当 $\beta = 1$ 时, $E_\alpha(z) = E_{\alpha, 1}(z)$, 而且 $E_{1, 1}(z) = e^z$.

本文考虑下面基于忆阻器分数阶时滞神经网络系统作为主动系统:

$$D^\alpha x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j(t)) f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_j(t)) f_j(x_j(t - \tau)) + I_i, \quad (3)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n, t \geq 0, n$ 是神经网络单位的数目, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, x_i(t)$ 为第 i 个神经元的状态变量, c_i 为正的常数, I_i 是外部输出常数, $f_i(\cdot)$ 是非线性激励函数, τ 是时滞且是正的常数, $a_{ij}(x_j(t)), b_{ij}(x_j(t))$ 分别是不带时滞和带时滞链接忆阻权重, 其定义如下:

$$a_{ij}(x_j(t)) = \begin{cases} \hat{a}_{ij}, & |x_j(t)| > T_j, \\ \check{a}_{ij}, & |x_j(t)| < T_j, \end{cases}$$

$$b_{ij}(x_j(t)) = \begin{cases} \hat{b}_{ij}, & |x_j(t)| > T_j, \\ \check{b}_{ij}, & |x_j(t)| < T_j, \end{cases}$$

且 $a_{ij}(\pm T_j) = \hat{a}_{ij}$ 或 $\check{a}_{ij}, b_{ij}(\pm T_j) = \hat{b}_{ij}$ 或 $\check{b}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, 其中切换界值 $T_j > 0$, 权 $\hat{a}_{ij}, \check{a}_{ij}, \hat{b}_{ij}, \check{b}_{ij}$ 都是常数.反应系统描述如下:

$$D^\alpha y_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_j(t)) f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(y_j(t)) f_j(y_j(t - \tau)) + I_i + u_i(t), \quad (4)$$

其中 $u_i(t)$ 是控制输入函数, $i = 1, 2, \dots, n, t \geq 0$.

在本文中, 由于 $a_{ij}(x_j(t)), b_{ij}(x_j(t))$ 都是不连续的, 所以, 通常研究右端连续微分方程动力学行为的方法已经不再适用. 本文中所有系统的解都在 Filippov 意义下处理. 下面引入 Filippov 解的概念.

定义 3^[29] 对于右不连续系统 $dx/dt = f(t, \mathbf{x}), f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 其集合映射定义为

$$F(t, \mathbf{x}) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(N) = 0} \overline{\text{co}}[f(t, B(\mathbf{x}, \delta)/N)],$$

其中 $\overline{\text{co}}[E]$ 表示集合 E 的闭凸包, $B(\mathbf{x}, \delta) = \mathbf{y}: \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \delta, \mu(N)$ 是 N 上的 Lebesgue 测度.

定义 4^[29] 称函数 $\mathbf{x}(t)$ 为非线性系统定义在非退化区间 $I \subset \mathbf{R}$ 上的一个 Filippov 解, 若函数 $\mathbf{x}(t)$ 在区间 I 的任意子区间 $[t_1, t_2]$ 是绝对连续的, 并且其满足的微分包含 $d\mathbf{x}/dt \in F(t, \mathbf{x})$, 几乎处处 $t \in I$.

下面定义系统(3)和(4)的 Filippov 解. 设集值映射为

$$\begin{aligned} \text{co}[a_{ij}(x_j(t))] &= \begin{cases} \hat{a}_{ij}, & |x_j(t)| > T_j, \\ \text{co}\{\hat{a}_{ij}, \check{a}_{ij}\}, & |x_j(t)| = T_j, \\ \check{a}_{ij}, & |x_j(t)| < T_j, \end{cases} \\ \text{co}[b_{ij}(x_j(t))] &= \begin{cases} \hat{b}_{ij}, & |x_j(t)| > T_j, \\ \text{co}\{\hat{b}_{ij}, \check{b}_{ij}\}, & |x_j(t)| = T_j, \\ \check{b}_{ij}, & |x_j(t)| < T_j, \end{cases} \\ \text{co}[a_{ij}(y_j(t))] &= \begin{cases} \hat{a}_{ij}, & |y_j(t)| > T_j, \\ \text{co}\{\hat{a}_{ij}, \check{a}_{ij}\}, & |y_j(t)| = T_j, \\ \check{a}_{ij}, & |y_j(t)| < T_j, \end{cases} \\ \text{co}[b_{ij}(y_j(t))] &= \begin{cases} \hat{b}_{ij}, & |y_j(t)| > T_j, \\ \text{co}\{\hat{b}_{ij}, \check{b}_{ij}\}, & |y_j(t)| = T_j, \\ \check{b}_{ij}, & |y_j(t)| < T_j. \end{cases} \end{aligned}$$

定义 5^[29] 称函数 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 分别为系统(3)和(4)定义在区间 $[0, T)$ 上的 Filippov 解, 若函数 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ 在区间 $[0, T)$ 的任意子区间是绝对连续的, 并且满足

$$\begin{aligned} D^\alpha x_i(t) &\in -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \text{co}[a_{ij}(x_j(t))] f_j(x_j(t)) + \\ &\sum_{j=1}^n \text{co}[b_{ij}(x_j(t))] f_j(x_j(t - \tau)) + I_i \end{aligned} \quad (5)$$

和

$$\begin{aligned} D^\alpha y_i(t) &\in -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n \text{co}[a_{ij}(y_j(t))] f_j(y_j(t)) + \\ &\sum_{j=1}^n \text{co}[b_{ij}(y_j(t))] f_j(y_j(t - \tau)) + I_i + u_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $0 < \alpha < 1, t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \text{co}[u, v]$ 表示由实数 u, v 或是实矩阵 \mathbf{u}, \mathbf{v} 产生的凸闭包.

或等价地, 对于几乎处处 $t \in [0, T), i, j = 1, 2, \dots, n$, 存在

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(x_j(t)) &\in \text{co}[a_{ij}(x_j(t))], \gamma_{ij}(y_j(t)) \in \text{co}[a_{ij}(y_j(t))], \\ \alpha_{ij}(x_j(t)) &\in \text{co}[b_{ij}(x_j(t))], \beta_{ij}(y_j(t)) \in \text{co}[b_{ij}(y_j(t))], \end{aligned}$$

使得

$$D^\alpha x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij}(x_j(t)) f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x_j(t)) f_j(x_j(t-\tau)) + I_i \quad (7)$$

和

$$D^\alpha y_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}(y_j(t)) f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(y_j(t)) f_j(y_j(t-\tau)) + I_i + u_i(t). \quad (8)$$

通过运用微分包含和集值映射等理论,系统(3)和(4)在 Filippov 意义下,等价于分数阶微分包含系统(5)和(6).

为了获得主动系统和反应系统的修正投影同步,本文给出了如下假设、定义和引理.

假设 1 函数 f_j 满足 Lipschitz 条件,即对任意的 $u_j, v_j \in \mathbf{R}$, 存在常数 $L_j > 0$, 使得 $|f_j(u_j) - f_j(v_j)| \leq L_j |u_j - v_j|, j = 1, 2, \dots, n$ 成立.

定义 6 若存在控制函数 $u_i(t)$ 和非零对角常数矩阵 $\Theta \in R^{n \times n}$ 使得下列等式 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \Theta \mathbf{x}(t)\| = 0$ 成立,则称分数阶时滞主动系统(4)和反应系统(5)是修正投影同步的.

引理 1^[32] 设 $V(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的一个连续函数,且满足 $D^\alpha V(t) \leq -\lambda V(t)$, 则 $V(t) \leq V(t_0) \cdot E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$, λ 是正常数.

引理 2^[32] 设 $\alpha < 2, \beta$ 是任意实数, $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, C 是一个实常数,使得下列式子成立:

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi, \quad |z| > 0.$$

引理 3^[33] 设 $h(t) \in C^1([0, +\infty], \mathbf{R})$ 是一个连续可导的函数,对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, 有下列不等式成立: $D^\alpha |h(t)| \leq \text{sgn}(h(t)) D^\alpha h(t)$.

引理 4 在假设 1 成立的情况下,如果 $f_j(\pm T_j) = 0, j = N$, 则

$$\begin{aligned} |\text{co}[a_{ij}(y_j(t))] f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))] f_j(x_j(t))| &\leq \bar{a}_{ij} L_j |y_j(t) - x_j(t)|, \\ |\text{co}[b_{ij}(y_j(t))] f_j(y_j(t)) - \text{co}[b_{ij}(x_j(t))] f_j(x_j(t))| &\leq \bar{b}_{ij} L_j |y_j(t) - x_j(t)|. \end{aligned}$$

即对任意

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(x_j(t)) &\in \text{co}[a_{ij}(x_j(t))], \gamma_{ij}(y_j(t)) \in \text{co}[a_{ij}(y_j(t))], \\ \alpha_{ij}(x_j(t)) &\in \text{co}[b_{ij}(x_j(t))], \beta_{ij}(y_j(t)) \in \text{co}[b_{ij}(y_j(t))], \end{aligned}$$

有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} |\gamma_{ij}(y_j(t)) f_j(y_j(t)) - \rho_{ij}(x_j(t)) f_j(x_j(t))| &\leq \bar{a}_{ij} L_j |y_j(t) - x_j(t)|, \\ |\beta_{ij}(y_j(t)) f_j(y_j(t)) - \alpha_{ij}(x_j(t)) f_j(x_j(t))| &\leq \bar{b}_{ij} L_j |y_j(t) - x_j(t)|, \end{aligned}$$

其中 $\bar{a}_{ij} = \max\{|\hat{a}_{ij}|, |\check{a}_{ij}|\}, \bar{b}_{ij} = \max\{|\hat{b}_{ij}|, |\check{b}_{ij}|\}$.

证明 分以下情形讨论:

① 当 $|x_j|, |y_j| > T_j$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\text{co}[a_{ij}(y_j(t))] f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))] f_j(x_j(t))| &= \\ |\hat{a}_{ij} f_j(y_j(t)) - \hat{a}_{ij} f_j(x_j(t))| &\leq \bar{a}_{ij} L_j |y_j(t) - x_j(t)|, \\ |\text{co}[b_{ij}(y_j(t))] f_j(y_j(t)) - \text{co}[b_{ij}(x_j(t))] f_j(x_j(t))| &= \end{aligned}$$

$$| \hat{b}_{ij}f_j(y_j(t)) - \hat{b}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq \bar{b}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | .$$

② 当 $|x_j|, |y_j| < T_j$ 时, 有

$$\begin{aligned} & | \text{co}[a_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t)) | = \\ & | \check{a}_{ij}f_j(y_j(t)) - \check{a}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq \bar{a}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | , \\ & | \text{co}[b_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[b_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t)) | = \\ & | \check{b}_{ij}f_j(y_j(t)) - \check{b}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq \bar{b}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | . \end{aligned}$$

③ 当 $|x_j| \leq T_j \leq |y_j|$ 或 $|y_j| \leq T_j \leq |x_j|$ 时, 不妨设 $|x_j| \leq T_j \leq |y_j|$, 若 $y_j < -T_j$, 则有

$$\begin{aligned} & | \text{co}[a_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t)) | = \\ & | \check{a}_{ij}f_j(y_j(t)) - \hat{a}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq | \check{a}_{ij} | | f_j(y_j(t)) - f_j(-T_j) | + \\ & | \hat{a}_{ij} | | f_j(-T_j) - f_j(x_j(t)) | \leq \bar{a}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | , \\ & | \text{co}[a_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t)) | = \\ & | \check{b}_{ij}f_j(y_j(t)) - \hat{b}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq | \check{b}_{ij} | | f_j(y_j(t)) - f_j(-T_j) | + \\ & | \hat{b}_{ij} | | f_j(-T_j) - f_j(x_j(t)) | \leq \bar{b}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | . \end{aligned}$$

若 $y_j > T_j$, 则有

$$\begin{aligned} & | \text{co}[a_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t)) | = \\ & | \check{a}_{ij}f_j(y_j(t)) - \hat{a}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq | \check{a}_{ij} | | f_j(y_j(t)) - f_j(T_j) | + \\ & | \hat{a}_{ij} | | f_j(T_j) - f_j(x_j(t)) | \leq \bar{a}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | , \\ & | \text{co}[a_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))]f_j(x_j(t)) | = \\ & | \check{b}_{ij}f_j(y_j(t)) - \hat{b}_{ij}f_j(x_j(t)) | \leq | \check{b}_{ij} | | f_j(y_j(t)) - f_j(T_j) | + \\ & | \hat{b}_{ij} | | f_j(T_j) - f_j(x_j(t)) | \leq \bar{b}_{ij}L_j | y_j(t) - x_j(t) | . \end{aligned}$$

对于 $|y_j| \leq T_j \leq |x_j|$ 情形, 可类似地证明.

2 修正投影同步一般方法

本文考虑基于忆阻器分数阶时滞神经网络的修正投影同步, 其主要目的是设计一个合适的控制器使得反应系统和主动系统得到同步.

定义同步误差: $e_i(t) = y_i(t) - \theta_i x_i(t)$.

选择控制函数 $u_i(t)$ 如下:

$$u_i(t) = v_i(t) + w_i(t), \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} v_i(t) = & \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_j(t)) [\theta_j f_j(x_j(t)) - f_j(\theta_j x_j(t))] + \\ & \sum_{j=1}^n \theta_j [a_{ij}(x_j(t)) - a_{ij}(y_j(t))] f_j(x_j(t)) + \\ & \sum_{j=1}^n b_{ij}(y_j(t)) [\theta_j f_j(x_j(t - \tau)) - f_j(\theta_j x_j(t - \tau))] + \\ & \sum_{j=1}^n \theta_j [b_{ij}(x_j(t)) - b_{ij}(y_j(t))] f_j(x_j(t - \tau)) + (\theta_i - 1) I_i, \\ w_i(t) = & -d_i [y_i(t) - \theta_i x_i(t)] - \tilde{d}_i [y_i(t - \tau) - \theta_i x_i(t - \tau)], \end{aligned}$$

d_i, \tilde{d}_i 都是控制常数, θ_i 是投影系数.

联合系统(5)和(6),得到误差系统:

$$\begin{aligned} D^\alpha e_i(t) \in & -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n (\text{co}[a_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t)) - \text{co}[a_{ij}(x_j(t))]f_j(\theta_j x_j(t))) + \\ & \sum_{j=1}^n (\text{co}[b_{ij}(y_j(t))]f_j(y_j(t-\tau)) - \text{co}[b_{ij}(y_j(t))]f_j(\theta_j x_j(t-\tau))) - \\ & d_i[y_i(t) - \theta_i x_i(t)] - \tilde{d}_i[y_i(t-\tau) - \theta_i x_i(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (10)$$

或者等价于下式:

$$\begin{aligned} D^\alpha e_i(t) = & -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n [\gamma_{ij}(y_j(t))f_j(y_j(t)) - \rho_{ij}(x_j(t))f_j(\theta_j x_j(t))] + \\ & \sum_{j=1}^n [\beta_{ij}(y_j(t))f_j(y_j(t-\tau)) - \alpha_{ij}(x_j(t))f_j(\theta_j x_j(t-\tau))] - \\ & d_i[y_i(t) - \theta_i x_i(t)] - \tilde{d}_i[y_i(t-\tau) - \theta_i x_i(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (11)$$

定理 1 在假设 1 成立的情况下,基于控制函数 $u_i(t)$ 满足式(9),则系统(3)和(4)可获得全局渐近修正投影同步.

证明 根据引理 3,有

$$D^\alpha |e_i(t)| \leq \text{sgn}(e_i(t)) D^\alpha e_i(t). \quad (12)$$

构造 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n |e_i(t)|. \quad (13)$$

根据引理 4 和式(12),得到

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) = & \sum_{i=1}^n D^\alpha |e_i(t)| \leq \\ & \sum_{i=1}^n \text{sgn}(e_i(t)) \left\{ -c_i e_i(t) + \sum_{j=1}^n [\gamma_{ij}(y_j(t))f_j(y_j(t)) - \rho_{ij}(x_j(t))f_j(\theta_j x_j(t))] + \right. \\ & \sum_{j=1}^n [\beta_{ij}(y_j(t))f_j(y_j(t-\tau)) - \alpha_{ij}(x_j(t))f_j(\theta_j x_j(t-\tau))] - \\ & \left. d_i[y_i(t) - \theta_i x_i(t)] - \tilde{d}_i[y_i(t-\tau) - \theta_i x_i(t-\tau)] \right\} \leq \\ & \sum_{i=1}^n \left\{ -c_i |e_i(t)| + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j |e_i(t)| + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} L_j |e_j(t-\tau)| - d_i |e_i(t)| - \tilde{d}_i |e_i(t-\tau)| \right\} = \\ & - \sum_{i=1}^n \left\{ c_i + d_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j \right\} |e_i(t)| - \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{d}_i - \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} L_j \right\} |e_i(t-\tau)|. \end{aligned}$$

选择合适的自适应常数 d_i 可使得 $d_i > \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j - c_i$, $\tilde{d}_i > \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} L_j$. 记

$$\lambda_1 = \min \left\{ c_i + d_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j \right\}, \lambda_2 = \min \left\{ \tilde{d}_i - \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} L_j \right\},$$

则有

$$D^\alpha V(t) \leq -\lambda_1 \sum_{j=1}^n |e_j(t)| - \lambda_2 \sum_{j=1}^n |e_j(t-\tau)| \leq -\lambda_1 \sum_{j=1}^n |e_j(t)| = -\lambda_1 V(t).$$

由引理 1 和引理 2,基于忆阻器分数阶时滞神经网络(4)全局修正投影同步于系统(3).

注 1 当 $\Theta = I$, 系统(3)和(4)称为全局渐近完全同步,其控制函数 $u_i(t)$ 简化为

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n [a_{ij}(x_j(t)) - a_{ij}(y_j(t))]f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n [b_{ij}(x_j(t)) - b_{ij}(y_j(t))]f_j(x_j(t - \tau)) - d_i[y_i(t) - x_i(t)] - \tilde{d}_i[y_i(t - \tau) - x_i(t - \tau)]. \quad (14)$$

注2 当 $\Theta = -I$, 系统(3)和(4)称为全局渐近反向同步,其控制函数 $u_i(t)$ 简化为

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n [a_{ij}(y_j(t))f_j(-x_j(t)) - a_{ij}(x_j(t))f_j(x_j(t))] - \sum_{j=1}^n [b_{ij}(y_j(t))f_j(-x_j(t - \tau)) - b_{ij}(x_j(t))f_j(x_j(t - \tau))] - 2I_i - d_i[y_i(t) + x_i(t)] - \tilde{d}_i[d_i(t - \tau) + x_i(t - \tau)]. \quad (15)$$

注3 当 Θ 为对角线上的元素都相等的对角阵,则系统(3)和(4)称为投影同步.

注4 由于时滞不可避免地存在于系统中,并且时滞能引起系统更复杂的动力学行为,所以考虑时滞因素有其必要性和重要性.然而,文献[6-7]研究的是不带时滞的神经网络的投影同步,本文推广了这些文献的结果.

3 数值模拟

例1 本文考虑下面的基于忆阻器分数阶时滞神经网络系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}(\mathbf{x}(t - \tau)) + \mathbf{I}, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)), \alpha = 0.98, \mathbf{C} = \text{diag}(1, 1),$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\sin(|x_1(t)| - 1), \tanh(|x_2(t)| - 1)),$$

$$L_1 = L_2 = 1, \tau = 0.5, \mathbf{I} = (0, 0)^T,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}(x_2) \\ a_{21}(x_1) & 1.8 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} b_{11}(x_1) & b_{12}(x_2) \\ b_{21}(x_1) & b_{22}(x_2) \end{bmatrix},$$

$$a_{12}(x_2) = \begin{cases} 7, & |x_2| < 1, \\ 5, & |x_2| > 1, \end{cases} \quad a_{21}(x_1) = \begin{cases} 0.8, & |x_1| < 1, \\ 1, & |x_1| > 1, \end{cases}$$

$$b_{11}(x_1) = \begin{cases} -1.5, & |x_1| < 1, \\ -1.2, & |x_1| > 1, \end{cases} \quad b_{12}(x_2) = \begin{cases} 1.0, & |x_2| < 1, \\ 0.8, & |x_2| > 1, \end{cases}$$

$$b_{21}(x_1) = \begin{cases} 0.8, & |x_1| < 1, \\ 1.0, & |x_1| > 1, \end{cases} \quad b_{22}(x_2) = \begin{cases} -1.4, & |x_2| < 1, \\ -1.6, & |x_2| > 1. \end{cases}$$

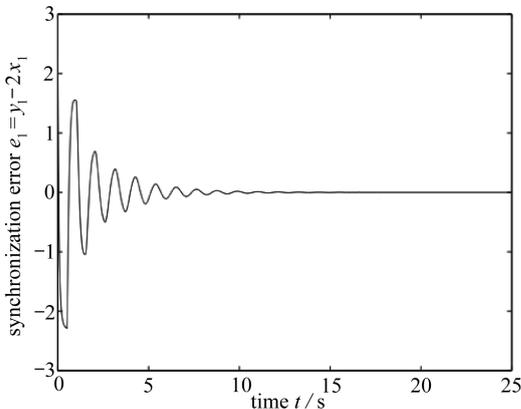


图1 同步误差 e_1

Fig. 1 Synchronization error e_1

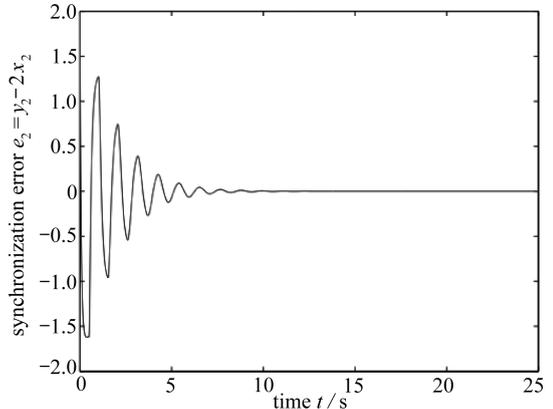
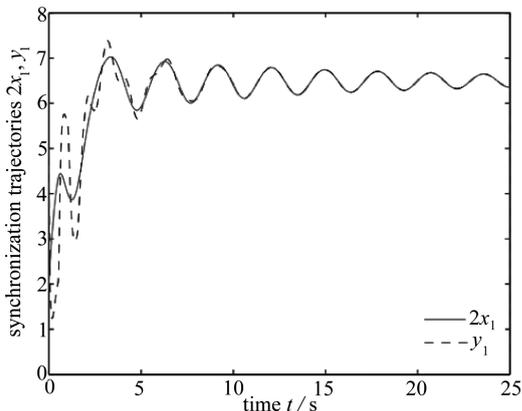
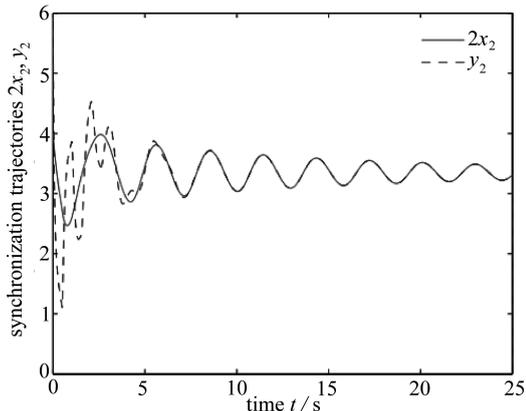


图2 同步误差 e_2

Fig. 2 Synchronization error e_2

图 3 状态变量 x_1, y_1 的同步轨迹Fig. 3 Synchronization trajectories of x_1, y_1 图 4 状态变量 x_2, y_2 的同步轨迹Fig. 4 Synchronization trajectories of x_2, y_2

设 $d_1 = 14, d_2 = 14, \tilde{d}_1 = 12, \tilde{d}_2 = 14$, 通过简单计算可得 $d_i > \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j - c_i, \tilde{d}_i > \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} L_j, i = 1, 2$. 选择投影系数 $\theta_1 = \theta_2 = 2$, 初始值 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, y_1(0) = 5, y_2(0) = 6$, 获得同步误差如图 1 和图 2, 同步轨迹如图 3 和图 4.

4 结 束 语

由于时滞不可避免地存在于神经网络中, 研究时滞神经网络的动力学形式具有重要性和必要性. 本文研究了基于忆阻器分数阶时滞神经网络的修正投影同步. 为了获得主要结果, 设计了一个有效控制器, 根据分数阶微分不等式, 得到了主动-被动系统同步的充分条件. 数值模拟证实了理论的有效性和可行性.

参考文献 (References):

- [1] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999: 105-114.
- [2] BUTZER P L, WESTPHAL U. *An Introduction to Fractional Calculus*[M]. Singapore: World Scientific, 2000: 22-45.
- [3] MANDELBROT B B. *The Fractal Geometry of Nature*[M]. New York: Freeman, 1996: 65-69.
- [4] Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*[M]. NJ: World Scientific, 2001: 87-92.
- [5] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006: 43-48.
- [6] BAO Haibo, CAO Jinde. Projective synchronization of fractional-order memristor-based neural networks[J]. *Neural Networks*, 2015, **63**(2): 1-9.
- [7] YU Juan, HUA Cheng, JIANG Haijun, et al. Projective synchronization for fractional neural networks[J]. *Neural Networks*, 2014, **49**(2): 87-95.
- [8] KASLIK E, SIVASUNDARAM S. Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2012, **32**(3): 245-256.
- [9] CHEN Jiejie, ZENG Zhigang, JIANG Ping. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2014, **51**(2): 1-8.
- [10] WU Ailong, WEN Shiping, ZENG Zhigang. Synchronization control of a class of memristor-

- based recurrent neural networks[J]. *Information Sciences*, 2012, **183**(1): 106-116.
- [11] LI Ning, CAO Jinde. New synchronization criteria for memristor-based networks; adaptive control and feedback control schemes[J]. *Neural Networks*, 2015, **61**: 1-9.
- [12] CHAKRABORTY K, CHAKRABORTY M, KAR T K. Bifurcation and control of a bioeconomic model of a prey-predator system with a time delay[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2011, **5**(4): 613-625.
- [13] MA Chao, WANG Xingyuan. Impulsive control and synchronization of a new unified hyperchaotic system with varying control gains and impulsive intervals[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **70**(1): 551-558.
- [14] 闫欢, 赵振江, 宋乾坤. 具有泄漏时滞的复值神经网络的全局同步性[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(8): 832-841.(YAN Huan, ZHAO Zhenjiang, SONG Qiankun. Global synchronization of complex-valued neural networks with leakage time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 832-841.(in Chinese))
- [15] ZHAO Hongyong, ZHANG Qi. Global impulsive exponential anti-synchronization of delayed chaotic neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2011, **74**(4): 563-567.
- [16] WANG Ling, ZHAO Hongyong. Synchronized stability in a reaction-diffusion neural network model[J]. *Physics Letters A*, 2014, **378**(48): 3586-3599.
- [17] WANG Ling, ZHAO Hongyong, CAO Jinde. Synchronized bifurcation and stability in a ring of diffusively coupled neurons with time delay[J]. *Neural Networks*, 2016, **75**: 32-46.
- [18] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, **64**(8): 821-824.
- [19] RAKKIYAPPAN R, VELMURUGAN G, CAO Jinde. Finite-time stability analysis of fractional-order complex-valued memristor-based neural networks with time delays[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, **78**(4): 2823-2832.
- [20] WU Ranchao, LU Yanfen, CHEN Liping. Finite-time stability of fractional delayed neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2015, **149**: 700-707.
- [21] STAMOVA I. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of impulsive fractional-order neural networks with time-varying delays[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, **77**(4): 1-10.
- [22] CHUA L O. Memristor—the missing circuit element[J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, **18**(5): 507-519.
- [23] STRUKOV D B, SNIDER G S, STEWART D R, et al. The missing memristor found[J]. *Nature*, 2011, **453**(7191): 80-88.
- [24] TOUR J M, HE Tao. Electronics: the fourth element[J]. *Nature*, 2011, **453**(7191): 42-43.
- [25] 胡进, 宋乾坤. 基于忆阻的时滞神经网络的全局稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2013, **34**(7): 724-735.(HU Jin, SONG Qiankun. Global uniform asymptotic stability of memristor-based recurrent neural networks with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(7): 724-735.(in Chinese))
- [26] GUO Zhenyuan, WANG Jun, YAN Zheng. Attractivity analysis of memristor-based cellular neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, **25**(4): 704-717.
- [27] WEN Shiping, BAO Gang, ZENG Zhigang, et al. Global exponential synchronization of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays[J]. *Neural Networks*, 2013, **48**(1): 195-203.
- [28] ZHANG Guodong, SHEN Yi. New algebraic criteria for synchronization stability of chaotic memristive neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Net-*

- works and Learning Systems*, 2013, **24**(10): 1701-1707.
- [29] CHEN Jiejie, ZENG Zhigang, JIANG Ping. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2014, **51**(1): 1-8.
- [30] ZHANG Guodong, SHEN Yi. Exponential synchronization of delayed memristor-based chaotic neural networks via periodically intermittent control[J]. *Neural Networks*, 2014, **55**: 1-10.
- [31] BAO Haibo, PARK J H, CAO Jinde. Adaptive synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delay[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **82**(3): 1343-1354.
- [32] CHEN Liping, QU Jianfeng, CHAI Yi, et al. Synchronization of a class of fractional order chaotic neural networks[J]. *Entropy*, 2013, **15**(2): 3265-3276.
- [33] ZHANG Shuo, YU Yongguang, WANG Hu. Mittag-Leffler stability of fractional order Hopfield neural networks[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2015, **16**(2): 104-121.

Modified Projective Synchronization of Memristor-Based Fractional-Order Delayed Neural Networks

ZHANG Weiwei¹, CHEN Dingyuan¹, WU Ranchao², CAO Jinde³

(1. *School of Mathematics and Computational Science, Anqing Normal University,*

Anqing, Anhui 246133, P.R.China;

2. *School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230039, P.R.China;*

3. *School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, P.R.China*)

Abstract: The discussion of fractional-order memristor-based neural networks with time delay is a hot topic. The modified projective synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delay was investigated. By means of the fractional-order inequality, sufficient conditions for the modified projective synchronization of drive-response systems were achieved. The results obtained here are more general. The corresponding numerical simulations show the feasibility of the theoretical results.

Key words: fractional order; memristor-based neural network; time delay; modified projective synchronization

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11571016)

引用本文/Cite this paper:

张玮玮, 陈定元, 吴然超, 曹进德. 一类基于忆阻器分数阶时滞神经网络的修正投影同步[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(2): 239-248.

ZHANG Weiwei, CHEN Dingyuan, WU Ranchao, CAO Jinde. Modified projective synchronization of memristor-based fractional-order delayed neural networks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(2): 239-248.