

# 概率密度演化理论的若干研究进展\*

李 杰, 陈建兵

(同济大学 土木工程学院;  
土木工程防灾国家重点实验室(同济大学), 上海 200092)

**摘要:** 介绍了随机动力系统中概率密度演化理论的基本方程与求解方法.在此基础上,论述了广义概率密度演化方程求解的若干新进展,包括群演化方程及其求解、概率空间剖分的理性准则、点集加密技术与信息拓展方法等.

**关键词:** 随机动力系统; 概率密度演化理论; 群演化; GF 偏差; 点集加密

**中图分类号:** O324

**文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370336

## 引 言

在现实工程中,广泛地存在各类随机动力系统.对这类系统的理论研究,可以上溯到 1905 年 Einstein(爱因斯坦)在 Brown(布朗)运动研究中的工作.迄至 20 世纪 50 年代中期,基于航空工程、机械工程、土木工程、海洋工程等多个领域面临的共性问题,催生了随机振动学科<sup>[1]</sup>. 20 世纪 60 年代中后期,以关注结构参数随机性影响为主要研究目标的随机结构分析开始引起人们的关注,并在此后的 30 年中发展和形成了随机模拟方法<sup>[2]</sup>、随机摄动技术<sup>[3-4]</sup>和正交多项式展开理论<sup>[5-6]</sup>等主流方法.20 世纪 90 年代中期以来,作为工程随机动力学核心的随机振动与随机结构分析开始酝酿新的突破,非线性随机动力学分析的 Hamilton 系统理论框架<sup>[7-9]</sup>、不确定性量化理论与方法的蓬勃发展<sup>[10-11]</sup>,将随机动力学研究推进到一个重要的新阶段.

在土木与海洋工程中,动力激励的随机性早已为人们所察觉.早在 1947 年, Housner 即指出地震动加速度过程是随机过程,并建议采用白噪声模型加以反映<sup>[12]</sup>.到 20 世纪 60 年代后期,人们逐步建立了地震动功率谱模型,如 Kanai-Tajimi 谱<sup>[13-14]</sup>、胡聿贤-周锡元谱<sup>[15]</sup>、Clough-Penzien 谱<sup>[16]</sup>等.几乎与此同时,人们也逐步建立了风、海浪的功率谱模型<sup>[17-18]</sup>.另一方面,人们逐步认识到工程结构在灾害性动力作用下将难以避免地要进入非线性受力阶段.因此,自 20 世纪 60 年代中期以来,结构非线性随机动力分析研究开始得到重视<sup>[19-21]</sup>,并成为此后 30 年中土木工程研究的主战场之一.然而,经过 30 余年的努力,尽管取得了明显的进步,但对于自由度巨大、非线性很强的土木工程结构系统在非平稳随机过程激励下的分析问题,依然面临巨大的挑战<sup>[22]</sup>.21 世纪初以来,我国学者发展和建立了随机动力系统分析的概率密度演化理论<sup>[23-24]</sup>,为大型复杂工程结构的非线性随机动力响应、可靠性分析<sup>[25]</sup>与最优控制<sup>[26]</sup>提供了新的途径.

\* 收稿日期: 2016-11-04

基金项目: 国家自然科学基金(51538010;11672209)

作者简介: 李杰(1957—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: lijie@tongji.edu.cn).

本文将论述随机动力系统中概率密度演化理论研究的若干新进展。

## 1 概率密度演化理论基础

### 1.1 结构随机响应分析的基本物理方程

对于土木工程结构,运用有限元方法可以得到如下多自由度结构动力方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{L}\mathbf{F}(t), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$  为结构位移向量,  $\dot{\mathbf{X}}$  和  $\ddot{\mathbf{X}}$  分别为速度和加速度向量,  $n$  为自由度数,  $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{n \times n}$  为  $n \times n$  阶质量矩阵,  $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n \times n}$  为  $n \times n$  阶阻尼矩阵,  $\mathbf{f}(\cdot) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^\top$  为  $n \times 1$  阶恢复力(单元节点力)向量,  $\mathbf{L} = [L_{ij}]_{n \times r}$  为  $n \times r$  阶外力作用位置矩阵,  $\mathbf{F}(t) = (F_1, F_2, \dots, F_r)^\top$  为  $r \times 1$  阶外力向量。

土木工程中结构的基本参数(如刚度和强度参数)往往具有较大的变异性。例如,钢材强度的变异系数可达 6% 左右、混凝土强度的变异系数可达 12~15%。原则上,结构中不同空间部位的材料性质是不同的,因而材料参数本质上是随机场。通过随机场分解<sup>[6,27]</sup>,可以将这些参数表示为一系列基本随机变量的函数。为了方便,可记这些基本随机变量为  $\boldsymbol{\Theta}_1 = (\Theta_{1_1}, \Theta_{1_2}, \dots, \Theta_{1_{s_1}})$ , 这里  $s_1$  为结构参数中基本随机变量的个数。这样,方程(1)中的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵都是基本随机向量  $\boldsymbol{\Theta}_1$  的函数。

另一方面,结构的外部激励(如地震动或脉动风速)也具有显著的随机性,表现为随机过程或时变随机场。通过物理随机过程建模<sup>[28]</sup>或数学分解方法(如 Karhunen-Loève 分解<sup>[5]</sup>、二重正交分解<sup>[29]</sup>或随机谐和函数方法<sup>[30]</sup>等),也可将上述随机过程或时变随机场表达为基本随机变量的函数。记这些基本随机变量集合为  $\boldsymbol{\Theta}_2 = (\Theta_{s_1+1}, \Theta_{s_1+2}, \dots, \Theta_{s_1+s_2})$ , 其中  $s_2$  为随机激励中的基本随机变量的个数。

将系统中的全部随机变量记为  $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2) = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s)$ , 其中  $s = s_1 + s_2$  为结构动力系统中的随机变量总个数。在上述建模过程中,  $\boldsymbol{\Theta}$  的联合概率函数  $p_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})$  已知、其分布区域为  $\Omega_{\boldsymbol{\Theta}}$ , 于是,方程(1)可以进一步表示为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X}) = \mathbf{L}\mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}, t). \quad (2)$$

上述方程就是工程结构非线性随机动力响应分析的基本物理方程。它以统一的方式考虑了结构参数随机场与外部激励的随机过程(场)。应该强调指出:由于必须耦合求解整体动力平衡方程与本构层次的非线性微分方程组<sup>[31]</sup>,上述方程解的解析表达式是几乎不可能给出的。

### 1.2 广义概率密度演化方程

从方程(2)可见,由于系统参数与外部激励的随机性,结构的响应  $\mathbf{X}(t)$  是一个向量随机过程。值得强调的是,正是由于同时考虑系统参数与外部激励的随机性,  $\mathbf{X}(t)$  一般不是 Markov 向量过程。这使得经典随机动力学中的 FPK 方程难以应用于方程(2)所描述的物理问题。

但是,注意到方程(2)中的随机性来自  $\boldsymbol{\Theta}$ ,而在增广向量  $(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\Theta})$  的演化过程中,既没有随机因素消失,也没有新的随机因素加入,因此  $(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\Theta})$  是一个概率保守的随机过程。根据概率守恒原理,必有<sup>[32]</sup>

$$P\{(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\Theta}) \in (\Omega_t \times \Omega_{\boldsymbol{\Theta}})\} = P\{(\mathbf{X}(t_0), \boldsymbol{\Theta}) \in (\Omega_{t_0} \times \Omega_{\boldsymbol{\Theta}})\}, \quad (3)$$

这里  $P\{\cdot\}$  表示随机事件的概率,  $\Omega_{\boldsymbol{\Theta}}$  为  $\Omega_{\boldsymbol{\Theta}}$  中的任意子集,  $\Omega_t$  为与初始时刻  $t_0$  时结构响应空间中的子集  $\Omega_{t_0}$  相对应的  $t$  时刻的子集。

式(3)可以等价地表示为

$$\frac{d}{dt} P \{ (\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\Theta}) \in (\Omega_t \times \Omega_\theta) \} = 0. \quad (4)$$

记  $(\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\Theta})$  的联合概率密度函数为  $p_{\mathbf{X}\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 由式(4)可得<sup>[33]</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t \times \Omega_\theta} p_{\mathbf{X}\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\theta} = 0, \quad (5)$$

经进一步推导可得

$$\frac{\partial p_{\mathbf{X}\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{X}_j(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{\mathbf{X}\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x_j} = 0, \quad (6)$$

其中  $\dot{X}_j(\boldsymbol{\theta}, t)$  是  $\{\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}\}$  时方程给出的速度解答, 它在本质上反映了系统演化过程中物理状态的即时变化。

式(6)称为广义概率密度演化方程<sup>[32]</sup>. 对比分析可知, 在经典的 FPK 方程中, 物理系统的信息是以漂移与扩散系数的形式植入概率密度控制方程之中的(表现为一阶与二阶导数矩). 因此, 概率密度的控制方程是状态向量之间完全耦合、物理状态与密度演化完全耦合的方程. 由于这种耦合, 造成了高维 FPK 方程求解的巨大困难. 而在式(3)~(6)的推导过程中, 并没有涉及到具体的物理系统性质, 因此可以认为广义概率密度演化方程(6)与物理方程(2)是解耦的. 事实上, 系统物理状态变化对系统概率密度演化的影响, 是以物理方程解  $\dot{X}_j(\boldsymbol{\theta}, t)$  的形式体现在广义概率密度演化方程之中的. 这种背景, 将广义概率密度演化方程与经典的 FPK 方程(及其简化的 Liouville 方程)鲜明地区别出来。

当考察系统响应的某一个分量(例如第  $\ell$  个分量  $X_\ell(t)$ ) 的概率信息时, 由于过程  $(X_\ell(t), \boldsymbol{\Theta})$  也是一个概率保守的随机过程, 从而类似地可得如下偏微分方程:

$$\frac{\partial p_{X_\ell \boldsymbol{\Theta}}(x_\ell, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{X}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{X_\ell \boldsymbol{\Theta}}(x_\ell, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x_\ell} = 0. \quad (7)$$

这是一个一维偏微分方程。

### 1.3 广义概率密度演化方程的求解步骤

对于简单的单自由度问题, 可以获得广义概率密度演化方程的解析解<sup>[34]</sup>. 而对于复杂的多自由度系统, 解析解就很难获得了. 事实上, 对于土木工程结构, 在前述物理方程(2)中, 需要耦合本构方程与结构方程求解结构非线性内力<sup>[31]</sup>, 在一般情况下是无法给出其解析解的. 这样, 自然也无法给出广义概率密度演化方程的解析解。

然而, 由于广义概率密度演化方程实现了概率空间与物理空间的解耦, 通过联立物理方程与广义概率密度演化方程并通过数值方法次序求解, 则不难给出复杂结构系统的随机非线性动力响应解答. 基本的求解策略如下:

1) 数值求解物理系统(2), 给出  $\{\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}\}$  时的解答  $\dot{X}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t)$ , 可以采用各种成熟的非线性计算力学分析方法进行这一工作。

2) 将求解物理方程获得的信息  $\dot{X}_\ell(\boldsymbol{\theta}, t)$  代入广义概率密度演化方程(7), 采用适当数值方法求解该方程. 研究表明, 采用具有 TVD 性质的有限差分格式可以获得较为理想的解答<sup>[35]</sup>. 最近, Papadopoulos 和 Kalogeris 成功尝试了采用 Petrov-Galerkin 有限元方法(SUPG)求解广义概率密度演化方程的可能性<sup>[36]</sup>.

3) 采用下式计算  $\mathbf{X}(t)$  的概率密度函数

$$p_{X_\ell}(x_\ell, t) = \int_{\Omega_\theta} p_{X_\ell \boldsymbol{\Theta}}(x_\ell, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta}. \quad (8)$$

采用数值方法求解广义概率密度演化方程,必然涉及到原始概率空间的合理剖分问题.在此情况下,式(8)不再是一个常规的高维积分问题,而是在最优剖分情况下的概率叠加问题,由此,生发出一系列饶有趣味的问题.事实上,虽然式(8)具有多维积分的形式,但它与一般的多维积分具有本质的区别.由于这一区别,常用的 Smolayk 稀疏点集等并不适用于广义概率密度演化方程的求解<sup>[37]</sup>.

## 2 求解广义概率密度演化方程的新进展

### 2.1 点演化与群演化

为了数值求解广义概率密度演化方程,通常需要将基本随机变量分布空间  $\Omega_{\theta}$  剖分为一系列子域  $\Omega_q, q = 1, 2, \dots, n_{pt}$ , 即  $\cup_{q=1}^{n_{pt}} \Omega_q = \Omega_{\theta}$  且对任意  $q \neq k$  有  $\Omega_q \cap \Omega_k = \emptyset$ . 一种常用的剖分方式是首先给定一个点集,然后以该点集的 Voronoi 区域作为概率空间的剖分子域<sup>[38]</sup>. 由于方程对任意  $\Omega_{\theta}$  均成立,因此,对于任意剖分子域  $\Omega_q$ , 方程(7)变为(为方便计,在下文中略去下标  $\ell$ )

$$\frac{\partial p_q(x, t)}{\partial t} + \int_{\Omega_q} \left( \dot{X}(\theta, t) \frac{\partial p_{X\theta}(x, \theta, t)}{\partial x} \right) d\theta = 0, \quad (9)$$

其中  $p_q(x, t) = \int_{\Omega_q} p_{X\theta}(x, \theta, t) d\theta$  为子域演化概率密度.

显然

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_q(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\Omega_q} p_{X\theta}(x, \theta, t) d\theta \right) dx = \int_{\Omega_q} p_{\theta}(\theta) d\theta = P_q, \quad (10)$$

可见,  $p_q(x, t)$  的总积分  $P_q$  恰为基本随机变量空间中剖分子域  $\Omega_q$  内的概率,且

$$p_X(x, t) = \sum_{q=1}^N p_q(x, t), \quad (11)$$

$$\sum_{q=1}^N P_q = 1. \quad (12)$$

因此,  $P_q$  可称为赋得概率.

根据积分中值定理,存在

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} \left( \dot{X}(\theta, t) \frac{\partial p_{X\theta}(x, \theta, t)}{\partial x} \right) d\theta = \\ & v_q(x, t) \int_{\Omega_q} \frac{\partial p_{X\theta}(x, \theta, t)}{\partial x} d\theta = v_q(x, t) \frac{\partial p_q(x, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (13)$$

从而可将剖分子域上的方程(9)转化为

$$\frac{\partial p_q(x, t)}{\partial t} + v_q(x, t) \frac{\partial p_q(x, t)}{\partial x} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, n_{pt}, \quad (14)$$

上式中的  $v_q(x, t)$  在物理本质上是子集  $\Omega_q$  内所有样本状态变化的综合速度,因此称之为“群速度”.

在每个子域内,存在子域边界条件和初始条件

$$p_q(x, t) \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, n_{pt}, \quad (15)$$

$$p_q(x, t) \Big|_{t=t_0} = \delta(x - x_0) P_q, \quad q = 1, 2, \dots, n_{pt}, \quad (16)$$

其中,  $P_q$  是子域  $\Omega_q$  内的赋得概率.

显然, 由于涉及不同样本的演化, 群速度  $v_q(x, t)$  的解析表达式是很难获得的, 因此, 需要做适当的假定才能求解方程 (14). 作为最简单的一种假设, 可以假定子域  $\Omega_q$  内某一代表点的速度  $\dot{X}(\boldsymbol{\theta}_q, t)$  等于群速度  $v_q(x, t)$  (这实质上是假定子域  $\Omega_q$  内所有  $\boldsymbol{\theta}$  对应的状态响应都相等). 如此有

$$\int_{\Omega_q} \dot{X}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{X\boldsymbol{\theta}}(x, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x} d\boldsymbol{\theta} = \dot{X}(\boldsymbol{\theta}_q, t) \frac{\partial p_q(x, t)}{\partial x}. \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (9) 可得到

$$\frac{\partial p_q(x, t)}{\partial t} + \dot{X}(\boldsymbol{\theta}_q, t) \frac{\partial p_q(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

式 (18) 称为概率密度的子域代表点演化方程 (简称点演化方程), 所对应的数值求解方法称为点演化方法. 在此前的研究中, 广义概率密度演化方程的数值解通常是以这种形式实现的. 显然, 由于是用某一点的速度  $\dot{X}(\boldsymbol{\theta}_q, t)$  代替子域群速度  $v_q(x, t)$ , 必然会产生一定误差. 事实上, 对于不同的  $(x, t)$ , 使得式 (17) 精确成立的  $\boldsymbol{\theta}_q$  可能不同.

为了通过数值途径求解群演化方程, 可以假设  $p_q(x, t)$  服从正态分布, 如此可得<sup>[39]</sup>

$$v_q(x, t) \approx \dot{\mu}_q(t) + \frac{\dot{\sigma}_q(t)}{\sigma_q(t)}(x - \dot{\mu}_q(t)), \quad (19)$$

其中  $\mu_q(t)$  是子域响应的均值,  $\sigma_q(t)$  是子域响应的标准差, 对均值与标准差的估计可以采用子域内的局部加密算法.

将式 (19) 代入式 (14), 即得到近似的群演化方程:

$$\frac{\partial p_q(x, t)}{\partial t} + \left[ \dot{\mu}_q(t) + \frac{\dot{\sigma}_q(t)}{\sigma_q(t)}(x - \dot{\mu}_q(t)) \right] \frac{\partial p_q(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

采用差分算法, 不难求解上述方程.

显然, 由于群演化方程反映了子域内各样本的概率信息, 采用群演化方程求解的精度将高于点演化算法. 图 1 给出了对一个 8 层剪切型框架结构的分析结果. 其中, 相对熵是指某给定时刻理论计算概率密度与 Monte Carlo 模拟计算概率密度的相对误差, 且是以 50 000 次 Monte Carlo 模拟为依据计算的. 可以很清楚地看到: 对于点演化方法, 随着差分网格尺寸的减小, 理论方法的误差反而逐渐增大; 而对于群演化方法, 随着差分网格尺寸的减小, 相对熵则逐渐减小并趋于收敛.

## 2.2 概率空间剖分的理性准则

尽管对任意的概率空间剖分, 方程 (9) 均严格成立. 但在实际应用中, 只能剖分为有限且尽可能少的子域, 并在子域内采用数值方法求解. 因此, 如何进行基本随机变量分布区域的最佳剖分、以获得精度较高的数值解, 是一个重要的问题.

引入  $\bar{p}_q(x, t) = \frac{1}{P} p_q(x, t)$ , 由式 (11) 可以得到  $p_X(x, t) = \sum_{q=1}^N P_q \cdot \bar{p}_q(x, t)$ , 显然  $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_q(x, t) dx = 1$ . 记  $\tilde{p}_q(x, t)$  为  $\bar{p}_q(x, t)$  的近似数值解, 由式 (11) 有

$$p_X(x, t) \approx \tilde{p}_X(x, t) = \sum_{q=1}^N P_q \cdot \tilde{p}_q(x, t), \quad (21)$$

因而近似数值解的误差为

$$e_{\text{PDF}}(x, t) = |p_X(x, t) - \tilde{p}_X(x, t)| = \left| \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p_{X\boldsymbol{\theta}}(x, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} - \sum_{q=1}^N P_q \cdot \tilde{p}_q(x, t) \right|. \quad (22)$$

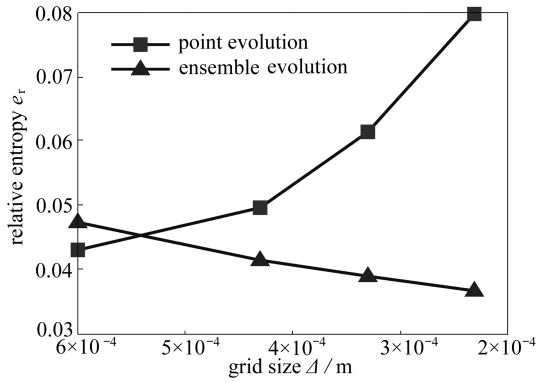


图 1 不同算法的误差比较

Fig. 1 The errors of different algorithms

概率密度函数可以通过特征函数表达为各阶矩的组合<sup>[40]</sup>.因此,若其各阶矩的误差均很小,则概率密度函数的误差亦很小.据此,可以通过矩估计建立概率空间剖分的理性准则.

为方便计,记  $p_X(x, t)$  的  $\alpha$  阶中心矩为

$$m_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha p_X(x, t) dx = \int_{\Omega_\theta} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \bar{p}_{X\theta}(x, \theta, t) dx \right) p_\theta(\theta) d\theta = \int_{\Omega_\theta} f_\alpha(\theta, t) p_\theta(\theta) d\theta, \quad (23)$$

其中

$$\bar{p}_{X\theta}(x, \theta, t) = p_{X\theta}(x, \theta, t) / p_\theta(\theta), f_\alpha(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \bar{p}_{X\theta}(x, \theta, t) dx.$$

$\alpha$  阶中心矩的数值近似解为

$$\tilde{m}_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \tilde{p}_X(x, t) dx = \sum_{q=1}^{n_{pt}} P_q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \tilde{p}_q(x, t) dx = \sum_{q=1}^{n_{pt}} P_q \cdot f_\alpha(\theta_q, t). \quad (24)$$

因此,  $\alpha$  阶中心矩的误差为

$$e_\alpha(t) = |m_\alpha(t) - \tilde{m}_\alpha(t)| = \left| \int_{\Omega_\theta} f_\alpha(\theta, t) p_\theta(\theta) d\theta - \sum_{q=1}^{n_{pt}} P_q \cdot f_\alpha(\theta_q, t) \right|. \quad (25)$$

$f_\alpha(\theta, t)$  的解析表达通常是未知的,且对不同的  $\alpha$  其表达式也不相同.但当  $p_\theta(\theta)$  是超立方体  $[0, 1]^s$  上的均匀分布且  $P_q = \frac{1}{n_{pt}}$  时,存在如下的 Koksma-Hlawka 不等式<sup>[41-42]</sup>:

$$\left| \int_{[0,1]^s} f_\alpha(\theta, t) d\theta - \frac{1}{n_{pt}} \sum_{q=1}^{n_{pt}} f_\alpha(\theta_q, t) \right| \leq V(f_\alpha) \cdot D(M), \quad (26)$$

其中  $V(f_\alpha)$  是有界变差函数  $f_\alpha(\theta, t)$  的变差,  $M = \{\theta_q\}_{q=1}^{n_{pt}}$  是  $[0, 1]^s$  上的点集,  $D(M)$  是点集  $M$  的偏差

$$D(M) = \sup_{x \in [0,1]^s} \left| \frac{N(M, [\mathbf{0}, x])}{n_{pt}} - V([\mathbf{0}, x]) \right|, \quad (27)$$

这里  $N(M, [\mathbf{0}, x])$  表示点集  $M$  中的点包含在超长方体  $[\mathbf{0}, x]$  内的数目,  $V([\mathbf{0}, x]) = \prod_{j=1}^s x_j$  是超长方体  $[\mathbf{0}, x]$  的体积.

Koksma-Hlawka 不等式(26)表明,数值求解误差取决于函数本身的变差与点集的偏差.因此,点集偏差越小、数值误差将越小.从这一意义上说,对于不同阶  $\alpha$  的不同函数  $f_\alpha(\theta, t)$ ,只要

点集偏差很小,则各阶矩的误差必然都很小,换句话说,同一个点集适用于不同阶矩的误差估计.由此,也可给出概率密度函数数值误差的界限.

工程中的基本随机变量往往并非均匀分布(例如一般认为混凝土强度服从正态或对数正态分布).在近期的研究工作中,对于非均匀的一般概率分布,严格地证明了如下不等式<sup>[43-44]</sup>:

$$e_{\alpha}(t) = \left| \int_{\Omega_{\theta}} f_{\alpha}(\theta, t) p_{\theta}(\theta) d\theta - \sum_{q=1}^{n_{pt}} P_q \cdot f_{\alpha}(\theta_q, t) \right| \leq V(f_{\alpha}) \cdot D_{EF}(M), \quad (28)$$

其中推广的偏差(又称 EF 偏差)  $D_{EF}(M)$  为

$$D_{EF}(M) = \sup_{x \in \Omega_{\theta}} |F_{\theta}(x) - F_{\theta, n_{pt}}(x; M)|, \quad (29)$$

这里  $F_{\theta}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\theta}(\theta) d\theta$  为随机变量  $\theta$  的概率分布函数,  $F_{\theta, n_{pt}}(x; M)$  为由点集  $M = \{\theta_q \in \Omega_{\theta}\}_{q=1}^{n_{pt}}$  与相应赋得概率  $\{P_q\}_{q=1}^{n_{pt}}$  (由式(10)确定)所得到的经验分布函数:

$$F_{\theta, n_{pt}}(x; M) = \sum_{q=1}^{n_{pt}} P_q \cdot I\{\theta_q \leq x\}, \quad (30)$$

这里  $I\{\theta_q \leq x\}$  是示性函数,当  $\{\theta_q \leq x\}$  为真时其值为 1、否则为 0.值得注意,在一般的经验分布函数定义中,上式中的  $P_q$  取为  $1/n_{pt}$ .

遗憾的是,通常难以得到 EF 偏差  $D_{EF}(M)$  的解析表达,而其数值计算则是 NP 难解问题.为此,进一步引入了广义 F 偏差(GF 偏差)的概念

$$D_{GF}(M) = \max_{1 \leq j \leq s} \left\{ \sup_{-\infty < x_j < \infty} |F_{\theta_j}(x_j) - F_{\theta_j, n_{pt}}(x_j; M)| \right\} = \max_{1 \leq j \leq s} \{D_j(M)\}, \quad (31)$$

其中  $D_j(M) = \sup_{-\infty < x_j < \infty} |F_{\theta_j}(x_j) - F_{\theta_j, n_{pt}}(x_j; M)|$  是第  $j$  个随机变量的边缘偏差.

由于在各边缘偏差的计算中需要采用赋得概率,而赋得概率的计算需要联合概率密度函数和点集的空间构形,因此在 GF 偏差中事实上包括了联合概率分布与点集空间构形信息、而不仅包含通常意义上的边缘概率信息.文献[43-44]中论证了 GF 偏差与 EF 偏差的关系

$$D_{GF}(M) \leq D_{EF}(M) \leq s D_{GF}(M). \quad (32)$$

据此,可将不等式(28)进一步推广为

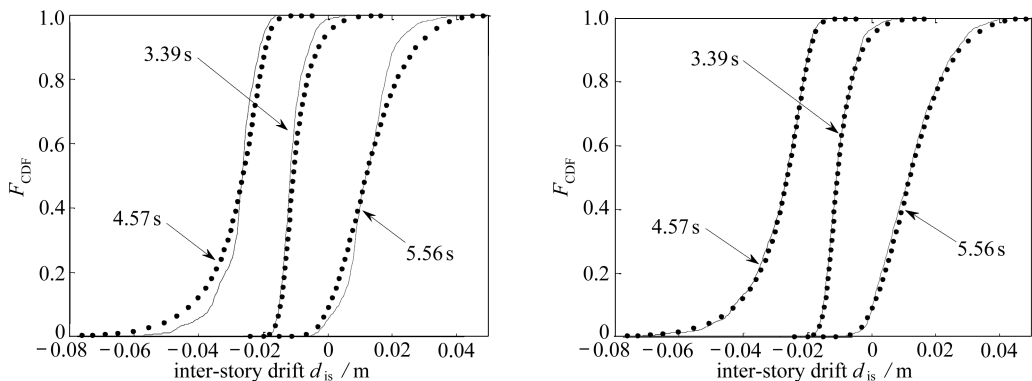
$$e_{\alpha}(t) = \left| \int_{\Omega_{\theta}} f_{\alpha}(\theta, t) p_{\theta}(\theta) d\theta - \sum_{q=1}^{n_{pt}} P_q \cdot f_{\alpha}(\theta_q, t) \right| \leq s V(f_{\alpha}) \cdot D_{GF}(M). \quad (33)$$

这一不等式表明:点集的 GF 偏差越小、数值求解误差越小.因此,使得 GF 偏差最小化的点集可以认为是最优点集.这就将点集的理性选择转化为优化问题.文献[44]进一步给出了点集优选的具体策略.

图 2 给出了一个 25 层非线性结构随机响应的概率分布函数.在这一例子中,包含了 50 个基本随机变量,其中集中质量与层间刚度分别服从对数正态分布与 Weibull 分布,变异系数为 0.2.图中点线为 10 000 次 Monte Carlo 分析获得的不同时刻响应概率分布函数,图 2(a)为采用 512 次 Monte Carlo 模拟分析获得的结果,图 2(b)为概率密度演化分析结果,其中代表性点集采用 GF 偏差最小化进行优选,代表点数目为 512.从中可以看到,在概率密度演化理论中,采用 GF 偏差最小化的代表性点集,获得的结果具有很高的精度,且适用于随机变量数目较大、服从一般非均匀分布的问题.

值得指出:引入广义  $L_2$  偏差( $GL_2$  偏差),可以获得以  $L_2$  范数表达的广义概率密度演化方程数值解误差界限估计.在文献[45-46]中,给出了  $GL_2$  偏差的解析表达式.由此,给出了一种新的点集优选的理性准则和相应选点策略.最近,在上述工作基础上, Xu 和 Wang 等进一步引

入边缘分布分数阶矩最小化研究了点集优选问题<sup>[47]</sup>.



(a) 512 次 Monte Carlo 分析结果

(b) 概率密度演化理论分析结果

(a) The results by 512 times of Monte Carlo simulation

(b) The results by the probability density evolution method

图 2 非线性结构反应的概率分布函数

Fig. 2 The cumulative distribution functions of the response of a nonlinear structure

### 2.3 点集加密策略

以上述代表点集作为基准点集,对较为稀疏的基准点集进行全局或局部加密,可以在不增加对物理系统确定性分析次数的基础上,显著地提高广义概率密度演化方程的求解精度。

对于全局加密的情况,设加密后的点集为  $M_{\text{den}} = \{\theta_q^{(\text{den})}\}_{q=1}^{n_{\text{den}}}$ ,其相应的赋得概率为  $A = \{A_q^{(\text{den})}\}_{q=1}^{n_{\text{den}}}$ .通常加密后的代表点数目  $n_{\text{den}} \gg n_{\text{pt}}$ ,且  $M \subset M_{\text{den}}$ .这里,加密后的点集可以在给定  $n_{\text{den}}$  并以  $M = \{\theta_q\}_{q=1}^{n_{\text{pt}}}$  作为子集的约束条件下求解约束优化问题得到.而优化准则,则可以使用 GF 偏差最小或  $GL_2$  偏差最小的准则。

在局部加密的情况下,可以考虑在某些剖分子域适当增加选点个数.若需要点集加密的子域有  $m$  个 ( $m \leq n_{\text{pt}}$ ),分别记为  $\Omega_{k_i}, i = 1, 2, \dots, m, 1 \leq k_i \leq n_{\text{pt}}$ ,则在每个子域  $\Omega_{k_i}$  内的加密点集可记为  $M_{k_i}^+ = \{\theta_{q,j}^+\}_{j=1}^{n_{k_i}}$  (其中包括  $\theta_q$ ),从而形成的总加密点集为  $M_{\text{den}} = M \cup_{i=1}^m M_{k_i}^+$ ,其总数目为  $n_{\text{den}} = n_{\text{pt}} + \sum_{i=1}^m n_{k_i} - m$ .与之相应的赋得概率,可以按照点集  $M_{\text{den}}$  在全空间进行 Voronoi 剖分后根据式 (10) 确定.或者仅对加密子域  $\Omega_{k_i}$  进行 Voronoi 剖分,从而得到与加密点集  $M_{k_i}^+ = \{\theta_{q,j}^+\}_{j=1}^{n_{k_i}}$  对应的赋得概率  $A_{k_i}^+ = \{P_{q,j}^+\}_{j=1}^{n_{k_i}}$ .显然,  $P_q = \sum_{j=1}^{n_{k_i}} P_{q,j}^+$ .

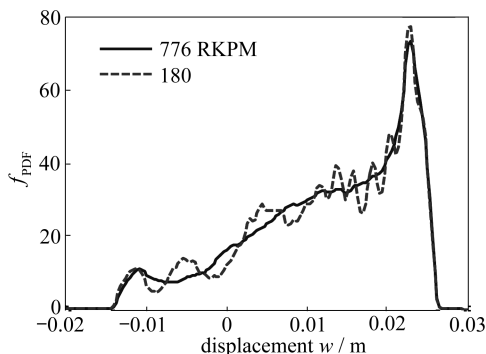


图 3 加密算法分析实例

Fig. 3 An example of applying the densification algorithm



在获得加密点集后,可以采用基准点集进行物理系统的确定性分析、以获取结构响应信息.而对加密点集,则可以采用基准点集求解结果进行信息拓展.研究表明,采用再生核质点近似方法(RKPM)<sup>[48]</sup>、Kriging 方法<sup>[49]</sup>以及支持向量机<sup>[50]</sup>均有望获得较为满意的信息拓展结果.在此基础上,利用上述所有点集的信息求解广义概率密度演化方程,即可获得精度更高的结果.图 3 是一个 8 层剪切型框架结构的分析结果.在这一实例中,采用 180 个基本点、776 个加密点集,利用再生核质点近似方法计算加密点集的动力响应.显然,仅利用基本点集计算获得的结构响应概率密度函数产生了数值震荡,而采用加密算法能够有效地避免这一问题.

### 3 结 语

概率密度演化理论为大型复杂工程结构的灾害动力响应分析与可靠性设计提供了基础.近年来,在广义概率密度演化方程求解方面又取得了系列新进展,包括:

- 1) 建立了群演化概率密度演化方程,发展了相应的求解算法;
- 2) 建立了广义概率密度演化方程数值求解误差估计的理论基础,提出了概率空间最优剖分的理性准则;
- 3) 提出了点集加密策略,发展了系列的信息拓展技术,进一步提高了广义概率密度演化方程求解效率和计算精度.

作者相信,这些研究进展,为将概率密度演化理论应用于更为广泛的工程领域进一步奠定了基础.

### 参考文献(References):

- [1] Crandall S H. *Random Vibration*[M]. Cambridge: MIT Press, 1958.
- [2] Shinozuka M. Monte Carlo solution of structural dynamics[J]. *Computers & Structures*, 1972, 2(5/6): 855-874.
- [3] Liu W K, Bestefield G, Belytschko T. Transient probabilistic systems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 67(1): 27-54.
- [4] Kleiber M, Hien T D. *The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*[M]. John Wiley & Sons, 1992.
- [5] Ghanem R, Spanos P D. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [6] 李杰. 随机结构系统——分析与建模[M]. 北京: 科学出版社, 1996.(LI Jie. *Stochastic Structural Systems—Analysis and Modeling*[M]. Beijing: Science Press, 1996.(in Chinese))
- [7] ZHU Wei-qiu, HUANG Zhi-long. Lyapunov exponents and stochastic stability of quasi-integrable-Hamiltonian systems[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66(1): 211-217.
- [8] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003.(ZHU Wei-qiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control*[M]. Beijing: Science Press, 2003.(in Chinese))
- [9] ZHU Wei-qiu. Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2006, 59(4): 230-248.
- [10] Fang T, Leng X L, Song C Q. Chebyshev polynomial approximation for dynamical response problems of random system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266(1): 198-206.
- [11] XIU Dong-bin. Fast numerical methods for stochastic computations: a review[J]. *Communications in Computational Physics*, 2009, 5(2/4): 242-272.
- [12] Housner G W. Characteristics of strong-motion earthquakes[J]. *Bulletin of the Seismological*

- Society of America*, 1947, **37**(1): 19-31.
- [13] Kanai K. Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground[J]. *Bull Earthquake Research Institute, University of Tokyo*, 1957, **35**(2): 309-325.
- [14] Tajimi H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake[C]// *Proc Second World Conf on Earthq Eng*. Vol **11**. Tokyo, Japan, 1960.
- [15] 胡聿贤, 周锡元. 地震力统计理论的评介[C]//刘恢先, 编. 地震工程研究报告集(第一集). 北京: 科学出版社, 1962: 21-32.(HU YU-xian, ZHOU Xi-yuan. A review on statistical theory for seismic forces[C]//LIU Hui-xian, ed. *Collected Research Reports on Earthquake Engineering (Volume One)*. Beijing: Science Press, 1962: 21-32.(in Chinese))
- [16] Clough R W, Penzien J. *Dynamics of Structures*[M]. 2nd ed. McGraw-Hill College, 1973.
- [17] Davenport A G. The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds[J]. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 1961, **87**(372): 194-211.
- [18] Hasselmann K, Barnett T P, Bouws E, et al. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)[J]. *Erga nzungsheft Deut Hydr Zeit*, 1973, **12**: 1-95.
- [19] Wen Y K. Method for random vibration of hysteretic systems[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976, **102**(2): 249-263.
- [20] Roberts J B, Spanos P D. *Random Vibration and Statistical Linearization*[M]. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1990.
- [21] Lutes L D, Sarkani S. *Random Vibrations: Analysis of Structural and Mechanical Systems* [M]. Amsterdam: Elsevier, 2004.
- [22] Goller B, Pradlwarter H J, Schueller G I. Reliability assessment in structural dynamics[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(10): 2488-2499.
- [23] 李杰, 陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化分析[J]. 力学学报, 2003, **35**(6): 716-722.(LI Jie, CHEN Jian-bing. The probability density evolution method for analysis of dynamic nonlinear response of stochastic structures[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(6): 716-722.(in Chinese))
- [24] LI Jie, CHEN Jian-bing. *Stochastic Dynamics of Structures*[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2009.
- [25] LI Jie, CHEN Jian-bing, FAN Wen-liang. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability[J]. *Structural Safety*, 2007, **29**(2): 112-131.
- [26] LI Jie, PENG Yong-bo, CHEN Jian-bing. A physical approach to structural stochastic optimal controls[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, **25**(1): 127-141.
- [27] Vanmarcke E. *Random Fields*[M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2010.
- [28] LI Jie, YAN Qi, CHEN Jian-bing. Stochastic modeling of engineering dynamic excitations for stochastic dynamics of structures[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, **27**(1): 19-28.
- [29] LIU Zhang-jun, LIU Wei, PENG Yong-bo. Random function based spectral representation of stationary and non-stationary stochastic processes[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2016, **45**: 115-126.
- [30] CHEN Jian-bing, SUN Wei-ling, LI Jie, et al. Stochastic harmonic function representation of stochastic processes[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2013, **80**(1): 011001-1-011001-11.
- [31] 李杰, 吴建营, 陈建兵. 混凝土随机损伤力学[M]. 北京: 科学出版社, 2014.(LI Jie, WU Jian-

- ying, CHEN Jian-bing. *Stochastic Damage Mechanics of Concrete Structures* [M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese)
- [32] LI Jie, CHEN Jian-bing. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation[J]. *Structural Safety*, 2008, **30**(1): 65-77.
- [33] LI Jie, CHEN Jian-bing, SUN Wei-ling, et al. Advances of the probability density evolution method for nonlinear stochastic systems[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, **28**: 132-142.
- [34] 蒋仲铭, 李杰. 三类随机系统广义概率密度演化方程的解析解[J]. 力学学报, 2016, **48**(2): 1-9. (JIANG Zhong-ming, LI Jie. Analytical solutions of the generalized probability density evolution equation of three classes stochastic systems[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48**(2): 1-9. (in Chinese))
- [35] LI Jie, CHEN Jian-bing. Dynamic response and reliability analysis of structures with uncertain parameters[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **62**(2): 289-315.
- [36] Papadopoulos V, Kalogeris I. A Galerkin-based formulation of the probability density evolution method for general stochastic finite element systems [J]. *Computational Mechanics*, 2016, **57**(5): 701-716.
- [37] XU Jun, CHEN Jian-bing, LI Jie. Probability density evolution analysis of engineering structures via cubature points[J]. *Computational Mechanics*, 2012, **50**(1): 135-156.
- [38] CHEN Jian-bing, Ghanem R, LI Jie. Partition of the probability-assigned space in probability density evolution analysis of nonlinear stochastic structures [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, **24**(1): 27-42.
- [39] LI Jie, TAO Wei-feng. A first order assemble evolution method for solving GDEE[C]//*Proceedings of the 1st International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering*. Crete, Greece, 2015: 891-897.
- [40] Papoulis A, Pillai S U. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*[M]. 4th ed. Boston: McGraw-Hill, 2002.
- [41] 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1978. (HUA Luo-geng, WANG Yuan. *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*[M]. Beijing: Science Press, 1978. (in Chinese))
- [42] Niederreiter H. *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [43] CHEN Jian-bing, ZHANG Sheng-han. Improving point selection in cubature by a new discrepancy[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2013, **35**(5): A2121-A2149.
- [44] CHEN Jian-bing, YANG Jun-yi, LI Jie. A GF-discrepancy for point selection in stochastic seismic response analysis of structures with uncertain parameters[J]. *Structural Safety*, 2016, **59**: 20-31.
- [45] CHEN Jian-bing, SONG Peng-yan. A generalized  $L_2$ -discrepancy for cubature and uncertainty quantification of nonlinear structures[J]. *Science China: Technological Sciences*, 2016, **59**(6): 941-952.
- [46] CHEN Jian-bing, SONG Peng-yan, REN Xiao-dan. Stochastic dynamic response analysis of nonlinear structures with general nonuniform random parameters by minimizing  $GL_2$ -discrepancy[J]. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2016, **14**(3): 215-235.

- [47] XU Jun, WANG Ding, DANG Chao. A marginal fractional moments based strategy for points selection in seismic response analysis of nonlinear structures with uncertain parameters[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, **387**: 226-238.
- [48] 李杰, 孙伟玲. 广义概率密度演化方程的再生核质点加密算法[J]. 计算力学学报, 2016, **33**(4): 543-549. (LI Jie, SUN Wei-ling. The refined algorithm of generalized density evolution equation based on reproducing kernel particle method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(4): 543-549. (in Chinese))
- [49] JIANG Zhong-ming, LI Jie. A new reliability method combining Kriging and probability density evolution method[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2017. doi: 10.1142/S0219455417501139.
- [50] LI Jie, TAO Wei-feng. Application of SVM in ensemble evolution method of stochastic structural analysis[C]//5th International Symposium on Reliability Engineering and Risk Management. Seoul, Korea, 2016.

## Some New Advances in the Probability Density Evolution Method

LI Jie, CHEN Jian-bing

(College of Civil Engineering, Tongji University;  
State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering  
(Tongji University), Shanghai 200092, P.R.China)

**Abstract:** The governing equation and solving algorithm of the probability density evolution method for stochastic dynamical systems were outlined. On this basis, some new advances in the solution of the generalized density evolution equation were discussed, including the ensemble evolution equation and its solution, the rational criterion for partitioning of the probability space, the densification technique of point set and the information reconstruction, etc.

**Key words:** stochastic dynamical system; probability density evolution method; ensemble evolution; GF discrepancy; point set densification

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51538010;11672209)

---

引用本文/Cite this paper:

李杰, 陈建兵. 概率密度演化理论的若干研究进展[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1): 32-43.

LI Jie, CHEN Jian-bing. Some new advances in the probability density evolution method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 32-43.