

太阳帆塔轨道和姿态耦合 动力学建模及辛求解*

文奋强, 邓子辰, 魏乙, 李庆军

(西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(我刊编委邓子辰来稿)

摘要: 在建立太阳帆塔太阳能电站简化模型的基础上,将系统的动力学方程从 Lagrange 体系导入到了 Hamilton 体系,给出了带约束的 Hamilton 正则方程;进而采用祖冲之类算法和辛 Runge-Kutta 方法分析了太阳帆塔轨道和姿态耦合系统的动力学特性,并讨论了算法的保能量、保约束特性;最后,数值模拟了系统的动力学特性,说明了所提方法的有效性。

关键词: 太阳帆塔; 约束 Hamilton 系统; 祖冲之类算法; 保能量

中图分类号: V412.4 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370321

引 言

随着人类社会的发展,人类对能源的需求不断增长,而常规能源如煤和石油等也不能长久维持人类需求,而且煤和石油的长期使用也带来了严重的环境问题,所以人们越来越重视可再生能源的开发和研究.太阳能是一种可再生的绿色能源,对于解决世界能源紧张和环境污染问题将发挥重大的作用.空间太阳能电站是指在空间将太阳能转化为电能,再通过无线方式传输到地面的电力系统.1968 年,美国人 Glaser 首次提出空间太阳能电站(solar power satellite, SPS)构想,并在 1979 年提出了第一个比较完整的空间太阳能电站的设计方案,即“1979 SPS 基准系统”;日本自 20 世纪 80 年代开始进行 SPS 概念和关键技术研究,并于 20 世纪 90 年代陆续推出一系列概念设计,包括 SPS2000, SPS2001, SPS2002, SPS2003 和分布式绳系 SPS 系统;欧洲在 1998 年提出了欧洲太阳帆塔的概念^[1-3],采用了可展开的轻型结构——太阳帆,大大降低了系统的总重量、减小了系统的装配难度,每一块太阳帆电池阵为一个模块,尺寸为 150 m×150 m,发射入轨后自动展开,在低地轨道进行系统组装,再通过电推力器转移至地球同步轨道。

本文将太阳帆电池简化为刚体,太阳帆电池之间由刚性轻质杆相连,这是一个约束动力学系统,以此建立的动力学方程是微分-代数方程.微分-代数方程的数值求解方法是计算多体力学的一个难点,原因在于在数值计算过程中约束条件难以很好地得到满足^[4].国外一般采用

* 收稿日期: 2016-11-03; 修订日期: 2017-05-16

基金项目: 国家自然科学基金(11432010;11572254)

作者简介: 文奋强(1993—),男,硕士生(E-mail: fqwen@outlook.com);

邓子辰(1964—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

index 法求解,将代数方程转化为微分方程,再联立常微分方程组进行数值求解,这种求解方法约束条件满足得不够好^[5-6]。钟万勰等^[7]提出了祖冲之类算法,不但能解决微分-代数方程的约束违约问题,还能保持系统的能量不变。祖冲之类算法的思路是,用保辛方法离散代数方程,在时间积分的节点处要求约束严格满足,而在时间区段内则不管约束^[8]。文献^[9-11]根据祖冲之类算法的思路,构造出保约束保能量的方法。本文将太阳帆塔的动力学模型引入到 Hamilton 体系下,建立带有约束的 Hamilton 方程。已有文献^[12-13]表明,采用辛算法求解 Hamilton 系统可以保持系统的定性性质,能保证长时间积分的精度。文献^[14-16]中采用辛算法求解约束多体动力学方程,得到很好的数值结果。所以本文采用辛算法并结合祖冲之类算法的思路,求解微分-代数方程。

1 动力学建模

如图 1 所示,太阳帆塔是由数百个尺寸为 150 m×150 m 的薄膜太阳帆电池阵模块组成^[3]。本文取其中两块薄膜太阳帆电池为研究对象,中间有刚性轻质杆件连接,不考虑轻质杆件的质量(如图 2),太阳帆垂直于赤道平面绕地球旋转,接收太阳照射储存能量。



图 1 太阳帆塔^[3]

Fig. 1 The solar sail tower^[3]

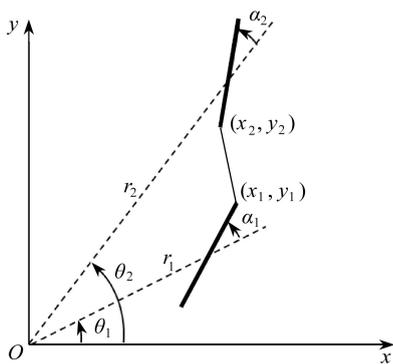


图 2 坐标系

Fig. 2 The coordinate system

如图 2 所示,在地球赤道平面以地心 O 为原点建立直角坐标系 xOy , 选取广义坐标

$$\mathbf{q} = [r_1 \quad \theta_1 \quad \alpha_1 \quad r_2 \quad \theta_2 \quad \alpha_2]^T,$$

则系统的动能可表示为

$$T = \frac{\rho l}{24} \sum_{i=1}^2 (12[\dot{r}_i^2 + (r_i \dot{\theta}_i)^2] + l^2(\dot{\theta}_i + \dot{\alpha}_i)^2), \quad (1)$$

系统的势能可表示为

$$V = \frac{\rho l}{24} \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{24\mu}{r_i} + \frac{\mu l^2}{r_i^3} (1 - 3\cos^2 \alpha_i) \right), \quad (2)$$

其中, ρ 为太阳帆的线密度, l 为太阳帆的长度, μ 为地球引力常数。则系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{\rho l}{24} \sum_{i=1}^2 \left(12[\dot{r}_i^2 + (r_i \dot{\theta}_i)^2] + l^2(\dot{\theta}_i + \dot{\alpha}_i)^2 + \frac{24\mu}{r_i} - \frac{\mu l^2}{r_i^3} (1 - 3\cos^2 \alpha_i) \right). \quad (3)$$

引入广义动量 $\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]^T$, 有

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = \rho l \dot{r}_1, p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \rho l r_1^2 \dot{\theta}_1, \\ p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} = \frac{\rho l^3}{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\alpha}_1), p_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = \rho l \dot{r}_2, \\ p_5 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \rho l r_2^2 \dot{\theta}_2, p_6 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} = \frac{\rho l^3}{12} (\dot{\theta}_2 + \dot{\alpha}_2). \end{cases} \quad (4)$$

通过 Legendre 变换,可得系统的 Hamilton 函数:

$$\begin{aligned} H = \sum_{j=1}^6 p_j \dot{q}_j - L = \\ \frac{p_{r_1}^2}{2\rho l} + \frac{p_{\theta_1}^2}{2\rho l r_1^2} + \frac{6p_{\alpha_1}^2}{\rho l^3} - \frac{p_{\alpha_1} p_{\theta_1}}{\rho l r_1^2} + \frac{p_{r_2}^2}{2\rho l} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2\rho l r_2^2} + \frac{6p_{\alpha_2}^2}{\rho l^3} - \frac{p_{\alpha_2} p_{\theta_2}}{\rho l r_2^2} - \\ \frac{\mu \rho l}{r_1} + \frac{\mu \rho l^3}{24r_1^3} (1 - 3\cos^2 \alpha_1) - \frac{\mu \rho l}{r_2} + \frac{\mu \rho l^3}{24r_2^3} (1 - 3\cos^2 \alpha_2). \end{aligned} \quad (5)$$

考虑到两块太阳帆电池被一长度为 L 的刚性杆相连,所以系统还满足一个约束条件,即

$$g(\mathbf{q}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2 = 0, \quad (6)$$

其中,直角坐标与广义坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos(\alpha_1 + \theta_1), \\ y_1 = r_1 \sin \theta_1 + \frac{l}{2} \sin(\alpha_1 + \theta_1), \\ x_2 = r_2 \cos \theta_2 - \frac{l}{2} \cos(\alpha_2 + \theta_2), \\ y_2 = r_2 \sin \theta_2 - \frac{l}{2} \sin(\alpha_2 + \theta_2), \end{cases} \quad (7)$$

所以可以得到约束下的 Hamilton 方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q} - \partial g / \partial \mathbf{q} \cdot \lambda, \\ g(\mathbf{q}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

2 基于辛算法的求解

二级四阶辛 Runge-Kutta 方法格式为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2), \\ \mathbf{K}_1 = f\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \Delta t, \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{K}_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \Delta t \mathbf{K}_2\right), \\ \mathbf{K}_2 = f\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \Delta t, \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{K}_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \Delta t \mathbf{K}_1\right). \end{cases} \quad (9)$$

由于本文得到的系统动力学方程是微分-代数方程,直接采用式(9)的数值格式进行求解,往往会出现约束违约问题.基于祖冲之类算法,将辛 Runge-Kutta 格式和约束方程联立,并引入 Lagrange 乘子 λ 构造新的计算格式:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2), \\ \mathbf{K}_1 = F\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta t, \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{4}\mathbf{K}_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta t\mathbf{K}_2, \lambda\right), \\ \mathbf{K}_2 = F\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta t, \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{4}\mathbf{K}_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\Delta t\mathbf{K}_1, \lambda\right), \\ \phi_i(\mathbf{u}_{n+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

下面采用式(10)模拟太阳帆塔的运行过程.假设太阳帆塔在地球的低空轨道运行,太阳帆的线密度 $\rho = 10 \text{ kg/m}$,板长 $l = 150 \text{ m}$,绳长 $L = 100 \text{ m}$,地球引力常数 $\mu = 3.990 2 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$,第一个板的质心半径初值 $r_0 = 6.7 \times 10^6 \text{ m}$,角速度初值 $\dot{\theta}_0 = \sqrt{\mu/r_0^3} = 0.001 2 \text{ rad/s}$.初始条件为 $\mathbf{q}_0 = [r_0 \ 0 \ 0 \ r_0 + l + L \ 0 \ 0]^T$, $\dot{\mathbf{q}}_0 = [0 \ \dot{\theta}_0 \ 0 \ 0 \ \dot{\theta}_0 \ 0]^T$.然后根据方程(4)可以得到广义动量的初始值 \mathbf{p}_0 .令积分步长 $\Delta t = 100 \text{ s}$,积分时间为 $60\ 000 \text{ s}$,定义相对约束误差 $\Delta c = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2)/L^2$,相对能量误差 $\Delta h = (H - H_1)/H_1$, H_1 表示初始能量值.

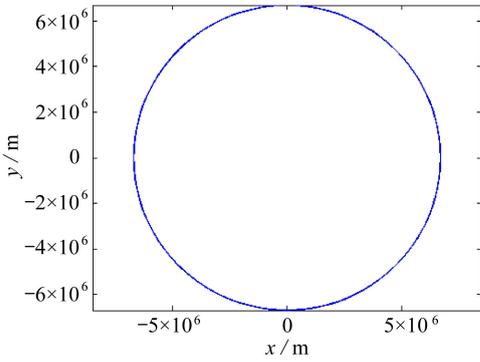


图 3 第一块太阳帆电池的质心轨迹

Fig. 3 The centroid trajectory of the first solar sail cell

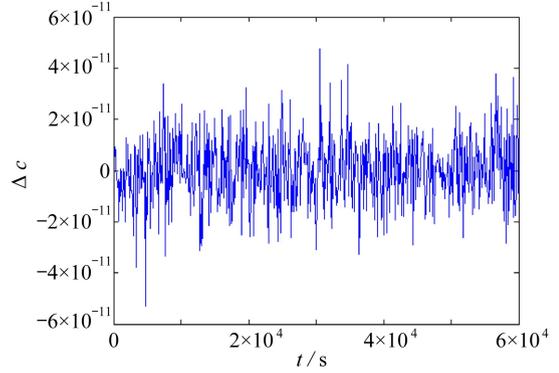


图 4 相对约束误差

Fig. 4 The relative constraint error

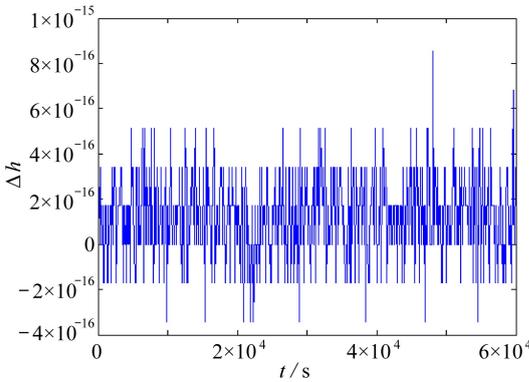


图 5 相对能量误差(辛 Runge-Kutta 方法)

Fig. 5 The relative energy error (symplectic Runge-Kutta method)

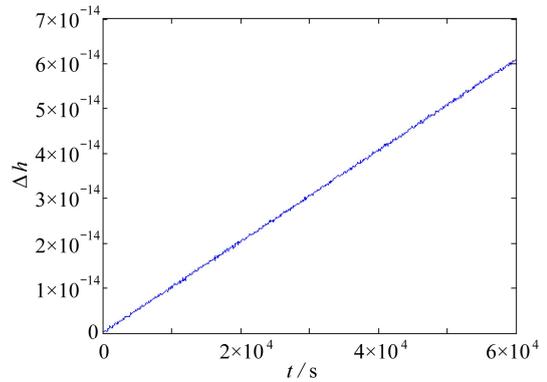


图 6 相对能量误差(经典 Runge-Kutta 方法)

Fig. 6 The relative energy error (classical Runge-Kutta method)

本文采用数值方法得到以上数值结果.图 3 给出了第一块板的质心运动轨迹,可以看出,在地球万有引力作用下,太阳帆塔绕地球作圆周运动,在积分时长内,第一块太阳帆电池的质

心轨迹一直保持得很好.图 4 给出了相对约束误差,相对约束误差一直保持 10^{-11} 量级,图 5 和图 6 给出了相对能量误差,采用辛 Runge-Kutta 格式得到的相对能量误差只有 10^{-16} 量级,且能长时间保持稳定性,未出现飘移现象,然而采用经典 Runge-Kutta 格式得到的相对能量误差要高两个数量级并且呈线性增长趋势.图 7 给出姿态角 α_1 和 α_2 的变化图,可知 α_1 和 α_2 在初始值上下波动,变化幅度很小,由此可知太阳帆塔的运行过程很平稳,两块太阳帆电池板的位置相对固定.

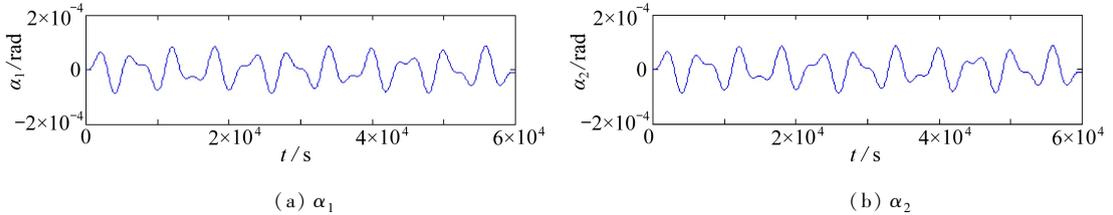


图 7 姿态角随时间变化

Fig. 7 The attitude angles of α_1 and α_2

4 结 论

本文建立了简化的太阳帆塔模型,通过 Legendre 变换将系统导入到约束 Hamilton 体系,建立了轨道、姿态耦合的动力学方程,并采用结合祖冲之类算法思路的辛 Runge-Kutta 方法进行了数值求解.通过数值结果分析了太阳帆塔的运动轨迹、相对约束、相对能量以及 α_1 和 α_2 的变化情况.

研究表明:利用结合祖冲之类算法思路的辛 Runge-Kutta 方法对太阳帆塔系统的动力学方程进行数值求解,可以长时间保持系统的约束和能量,相对约束误差只有 10^{-11} 量级,相对能量误差只有 10^{-16} 量级,并且都没有发生漂移.说明此方法在求解约束 Hamilton 系统时,在保持系统定性性质方面具有明显的优势.

致谢 本文作者衷心感谢西北工业大学博士论文创新基金(CX201517; CX201615)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] 杨阳, 张逸群, 王东旭, 等. SSPS 太阳能收集系统研究现状及发展趋势[J]. 宇航学报, 2016, 37(1): 21-28. (YANG Yang, ZHAGN Yi-qun, WANG Dong-xu, et al. Status and trend of the solar energy collection system for space solar power station[J]. *Journal of Astronautics*, 2016, 37(1): 21-28. (in Chinese))
- [2] 侯欣宾, 王力, 朱耀平, 等. 国际空间太阳能电站发展现状[J]. 太阳能学报, 2009, 30(10): 1263-1268. (HOU Xin-bin, WANG Li, ZHU Yao-ping, et al. Summary of the international space solar power systems[J]. *Acta Energiae Solaris Sinica*, 2009, 30(10): 1263-1268. (in Chinese))
- [3] 王立, 侯欣宾. 空间太阳能电站的关键技术及发展建议[J]. 航天器环境工程, 2014, 31(4): 343-350. (WANG Li, HOU Xin-bin. Key technologies and some suggestions for the development of space solar power station[J]. *Spacecraft Environment Engineering*, 2014, 31(4): 343-350. (in Chinese))
- [4] 吴永, 杜思义, 胡继云, 等. 约束多体系统动力学方程的辛算法[J]. 重庆大学学报, 2004, 27

- (6): 102-105.(WU Yong, DU Si-yi, HU Ji-yun, et al. Symplectic methods of the dynamic equations of constrained multibody systems[J]. *Journal of Chongqing University*, 2004, **27** (6): 102-105.(in Chinese))
- [5] Hairer E, Lubich C, Wanner G. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 2006.
- [6] Hairer E, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1996.
- [7] 钟万勰, 高强, 彭海军. 经典力学——辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics—Its Symplectic Description*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013.(in Chinese))
- [8] 钟万勰, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分[J]. 动力学与控制学报, 2006, **4**(3): 193-200.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, **4**(3): 193-200.(in Chinese))
- [9] 吴锋, 高强, 钟万勰. 基于祖冲之类方法的多体动力学方程保能量保约束积分[J]. 计算机辅助工程, 2014, **23**(1): 64-68, 75.(WU Feng, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Energy and constraint preservation integration for multibody equations based on ZU Chong-zhi method[J]. *Computer Aided Engineering*, 2014, **23**(1): 64-68, 75.(in Chinese))
- [10] 吴锋, 钟万勰. 浅水问题的约束 Hamilton 变分原理及祖冲之类保辛算法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(1): 1-13.(WU Feng, ZHONG Wan-xie. The constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and the Zu-type symplectic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 1-13.(in Chinese))
- [11] WEI Yi, DENG Zi-chen, WANG Yan, et al. An improved energy and constraint conserving algorithm for constrained Hamiltonian systems[J]. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 2016, **13**(1): 1055-1062.
- [12] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2003: 185-205.(FENG Kang, QIN Meng-zhao. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003: 185-205.(in Chinese))
- [13] FENG Kang, QIN Meng-zhao. Hamiltonian algorithms for Hamiltonian dynamical systems[J]. *Progress in Natural Science*, 1991, **1**(2): 105-116.
- [14] 李庆军, 叶学华, 王博, 等. 辛 Runge-Kutta 方法在卫星交会对接中的非线性动力学应用研究[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(12): 1299-1307.(LI Qing-jun, YE Xue-hua, WANG Bo, et al. Nonlinear dynamic behavior of the satellite rendezvous and docking based on the symplectic Runge-Kutta method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(12): 1299-1307.(in Chinese))
- [15] 王新栋, 胡伟鹏, 邓子辰. 空间太阳能电站太阳能接收器二维展开过程的保结构分析[J]. 动力学与控制学报, 2015, **13**(6): 406-409.(WANG Xin-dong, HU Wei-peng, DENG Zi-chen. Structure-preserving analysis of 2D deploying process for solar power receiver of solar power satellite[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, **13**(6): 406-409.(in Chinese))
- [16] 魏乙, 邓子辰, 李庆军, 等. 绳系空间太阳能电站动力学响应分析[J]. 宇航学报, 2016, **37**(9): 1041-1048.(WEI Yi, DENG Zi-chen, LI Qing-jun, et al. Analysis of dynamic response of tethered space solar power station[J]. *Journal of Astronautics*, 2016, **37**(9): 1041-1048.(in Chinese))

Dynamic Modelling and Symplectic Solution of Coupled Orbit & Attitude for Solar Sail Towers

WEN Fen-qiang, DENG Zi-chen, WEI Yi, LI Qing-jun

(School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A simplified model for solar sail towers was established. Firstly, the dynamic equations for the system were transformed from the Lagrangian system into the Hamiltonian system, and the canonical constrained Hamiltonian equations were obtained. Then the dynamic characteristics of the coupled orbit-attitude system of the solar sail tower were analyzed with the symplectic Runge-Kutta method and the Zu-class method. Energy and constraint conservation problems of the schemes were also investigated. Finally, the dynamic characteristics of the system were numerically simulated. The results illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: solar sail tower; constrained Hamiltonian system; Zu-class method; energy conservation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11432010; 11572254)

引用本文/Cite this paper:

文奋强, 邓子辰, 魏乙, 李庆军. 太阳帆塔轨道和姿态耦合动力学建模及辛求解[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(7): 762-768.

WEN Fen-qiang, DENG Zi-chen, WEI Yi, LI Qing-jun. Dynamic modelling and symplectic solution of coupled orbit & attitude for solar sail towers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(7): 762-768.