

用于解析函数复分析的共轭边界元法*

李国清

(华中科技大学 力学系, 武汉 430074)

摘要: 由 2 个共轭的实调和函数构建 1 个复解析函数,其复分析在应用数学和力学领域具有重要的作用.提出了一个加权残数方程组,证明了该方程组为 2 个共轭函数的域内控制方程、边界条件和边界上 Cauchy-Riemann(柯西-黎曼)条件的近似解,等效为复解析函数的逼近方程.在离散空间中,由该加权残数方程分别推导出 2 个位势问题的直接边界积分方程和 1 个表示 Cauchy-Riemann 条件的有限差分方程,随后解决了弱奇异线性方程组的求解难题,并提出用 Cauchy 积分公式求内点值的方法,从而建立了一种用于复分析的常单元共轭边界元法.最后,用 3 个算例证明了所提出方法适用于域内或域外的幂函数、指数函数或对数函数形式的解析函数,而且其误差与 2 维位势问题是同等量级的.

关键词: 复分析; 边界元; 解析函数; 位势理论

中图分类号: O174.5; O241.8

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370315

引言

众所周知,复分析在力学及多物理场问题中都发挥着重要的作用,在电磁场、传热与传质、弹性力学、流体力学、断裂力学等广泛的物理和力学领域中,基于复变函数的复分析方法从过去到现在都是一种重要的研究手段.例如,在电磁场理论中,平面内的电场可用一个复解析函数 $\varphi(z)$ 表述^[1]:

$$\varphi(z) = - \int_{z_0}^z E_x dx + E_y dy,$$

式中, E_x 和 E_y 分别为 (x, y) 平面内的 x 向和 y 向的电场强度,而 $\varphi(z)$ 称为电势.又例如,在弹性力学中基于复变函数分析获得了许多经典问题的解析解^[2-4],可以用 2 个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表示平面弹性问题的一般解:

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)},$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Re \{ \varphi(z) \},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi'(z) + \varphi(z)],$$

式中 G 和 μ 为材料弹性常数, σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 代表应力, u 和 v 为平面内的变形, \Re 表示取实部.

长久以来,许多学者尝试采用各种复分析方法研究了各类特定的力学与物理问题,但是仅

* 收稿日期: 2016-10-17; 修订日期: 2016-12-08

基金项目: 国家自然科学基金(10972083)

作者简介: 李国清(1964—),男,教授,博士(E-mail: lig57@ hust.edu.cn).

在极少数特殊情形下才能获得问题精确的解析解答。通常,以幂函数级数、指数函数级数和对数级数表示的复变函数,作为常用的形式解答,在无限域、圆域或者矩形域等特殊的规则几何域内,获得了比较完美的最终解答。灵活普适的复分析方法最终取决于复分析的数值方法,而本文正是在这个研究方向上的一种最新尝试。

相对而言,对实数域中数值分析方法的研究比复分析的类似研究要更加成熟、成果更加丰富。通常认为,有限差分法(FDM)、有限单元法(FEM)和边界单元法(BEM)是3种主要的现代数值方法,而最近十多年兴起的无网格方法(称为 meshfree 或者 meshless)被认为是大有发展前途的数值分析方法,但是这些方法都是关于实变函数和实数域的。以各向异性弹性力学为例,有限元法被认为是通用的求解方法之一,直至最近仍然有新的单元类型被提出^[5],而 Stroh 方法是一种有效的各向异性弹性力学复分析方法,在压电断裂^[6]和表面波问题^[7]中都已经证明是成功的方法。本文的研究目标就是用边界元法拓展 Stroh 列式的一种数值求解法。自边界元法创立以来,边界元法被认为是一种低成本高效率的计算方法。以 Brebbia^[8]为代表的边界元法初创者,首先用边界元求解了经典的位势问题。随后,有关位势问题的边界元法的研究,已经涵盖了2维和3维位势问题的边界元数学理论基础、收敛性和误差分析、奇异函数及其积分的数学处理、边界单元和网格的几何处理(角点处理等)以及各种求解算法和工程应用的方方面面,这些研究成果反映在大量的书籍和文献中。虽然本文以复变函数为研究目标,但是研究的起点就是经典的2维位势问题的边界元理论和方法。

在 Hromadka 和他的同事^[9-10]提出复变量边界元(complex variable boundary element method, CVBEM)之前,边界元都是一种实分析的数值方法。本文采取与 CVBEM 不同的研究思路,并不直接在复数域进行离散计算而是将1个复变函数看作由2个实共轭调和函数组成,并分别在1个或者多个实数域或变换实数域中进行分析与计算,随后将实分析结果组合成复变函数。本文研究的目的是复变解析函数,可是仅在实数域进行计算,对平面问题也仅采纳经典的位势问题边界积分方程,在离散的实数域应用 Cauchy-Riemann 条件,最后采用复变函数(f.c.v)的 Cauchy 积分公式进行边界元中内点的计算。因此,本文所提出的方法称为“复分析共轭边界元”(conjugate boundary element method for f.c.v, CBEM)更为恰当。

从建立与解析函数的等价实变共轭函数命题入手,建立了包含2个调和函数和1个 Cauchy-Riemann 条件的加权残数方程组,随后推导出2个边界积分方程和1个 Cauchy-Riemann 条件的边界积分方程,从而获得了与原问题控制方程的弱形式等价的3个边界积分方程。需要指出的是,早在20世纪80年代,我国学者禩启沃和吴兹潜^[11]已经注意到调和函数的共轭特性并应用这一性质改进了边界元算法。而在本文中,将更进一步把 Cauchy-Riemann 条件在离散边界元上的积分方程作为一个线性方程组的约束方程来使用。随后,建立与经典2维边界元方程形式相同的离散边界方程,并解决了所建立的弱病态线性方程的求解方法问题,用复变函数的 Cauchy 积分公式解决内点回代计算,最终成功实现了一种共轭边界元的完整算法。此外,文章中简要讨论了所提出方法的收敛性、计算精度,而其他相关的深入研究将在后续文献中陆续予以阐述。

1 复解析函数的等价共轭实函数命题

设待求解析函数为 $f(z) = u + iv$, 其中 u 和 v 是一组共轭的实函数, 该函数定义在域 Ω 内而边界 Γ 包围域 Ω 。本文中, 仅考虑单连通域围域内和域外的问题, 作为定义在域 Ω 的复解析函

数, u 和 v 是两个实调和函数^[12], 即

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla^2 v = 0, \quad \text{in } \Omega. \tag{2}$$

另外, 这一组实函数是共轭的, 即解析域内满足 Cauchy-Riemann 条件:

$$u_{,x} = v_{,y}, \quad \text{in } \Omega, \tag{3}$$

$$u_{,y} = -v_{,x}, \quad \text{in } \Omega, \tag{4}$$

或者在边界上满足 Cauchy-Riemann 条件

$$u_{,n} = v_{,s}, \quad \text{on } \Gamma, \tag{5}$$

$$u_{,s} = -v_{,n}, \quad \text{on } \Gamma, \tag{6}$$

式中 (x, y) 和 (n, s) 都定义在平面内的右手系中, 域及坐标系的定义如图 1 所示. 容易证明, 式(1)~(6)是单个复域解析函数充分而且必要的条件. 通常, 复函数 $f(z)$ 在域内有定解的边界条件可写为

$$\Re \{ Af \} = U_0, \quad \text{on } \Gamma_u = \Gamma_v \tag{7}$$

和

$$\Re \{ Bf_{,n} \} = S_0, \quad \text{on } \Gamma_p = \Gamma_q, \tag{8}$$

式中 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p = \Gamma_v + \Gamma_q$, A 和 B 为复常数, U_0 和 S_0 为边界上的给定值. 因此, 求解复解析函数 $f(z)$ 的等价命题是获取两个共轭实函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$, 满足如下条件:

- 1) 域 Ω 内满足式(1)和式(2);
- 2) 边界 Γ 上满足式(5)或者式(6);
- 3) 边界 Γ 上满足式(7)和式(8).

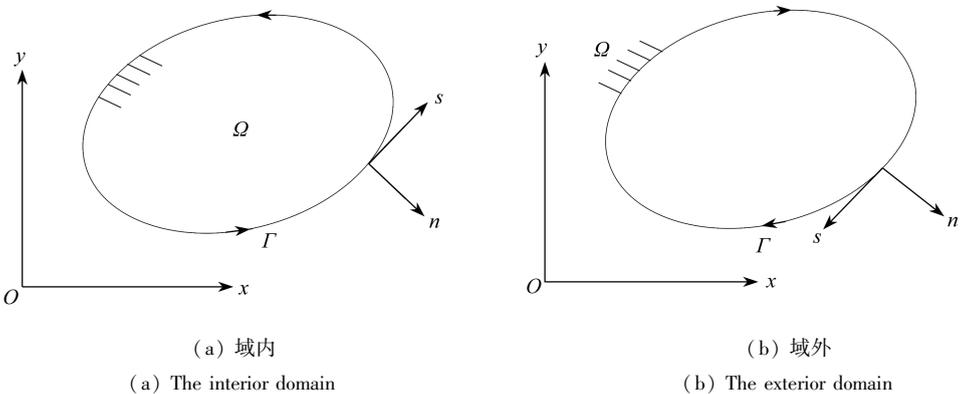


图 1 平面域及坐标系

Fig. 1 The coordinates and the domain in a plane

2 复解析函数的加权残数理论

由上节可知, 复解析函数的求解可归结为两个共轭调和实函数的求解, 其中满足 2 个域内调和问题和 1 个边界 Cauchy-Riemann 方程. 考虑到加权残数理论是广泛应用于计算固体力学的一种有效方法^[13], 因此, 可定义如下加权残数方程组^[14]:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 w_1 d\Omega - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w_1}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} p w_1 d\Gamma = 0, \tag{9}$$

$$\int_{\Omega} v \nabla^2 w_2 d\Omega - \int_{\Gamma} v \frac{\partial w_2}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} q w_2 d\Gamma = 0, \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial s} \right) w_3 d\Gamma = 0, \quad (11)$$

或者^[15]

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w_1 d\Omega + \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) \frac{\partial w_1}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} (p - \bar{p}) w_1 d\Gamma = 0, \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 v) w_2 d\Omega + \int_{\Gamma_v} (v - \bar{v}) \frac{\partial w_2}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} (q - \bar{q}) w_2 d\Gamma = 0, \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w_3 d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} w_3 d\Gamma = 0, \quad (14)$$

式中, $w_i, i = 1, 2, 3$ 为权函数或试函数. 方程组(9)、(10)可看作如下控制方程的弱形式:

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (15)$$

$$\nabla^2 v = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (16)$$

$$u_{,n} = v_{,s}, \quad \text{on } \Gamma, \quad (17)$$

$$u = \bar{u}, \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (18)$$

$$v = \bar{v}, \quad \text{on } \Gamma_v, \quad (19)$$

$$p = \bar{p}, \quad \text{on } \Gamma_p, \quad (20)$$

$$q = \bar{q}, \quad \text{on } \Gamma_q, \quad (21)$$

其中引入记号 $p = u_{,n}$ 和 $q = v_{,s}$ 分别表示 u 和 v 的法向导数, \bar{X} 代表 X 的给定值. 显然上面一组控制方程与第 1 节控制方程组是等价的.

接下来, 将加权残数表达式(9)、(10)和式(11)转化为边界积分方程. 通常, 当 w_i 取不同的形式时, 可获得不同的边界积分方程^[14]. 首先, 考虑以奇异的基本函数为权函数形式, 直接推导出一系列边界积分方程. 对于所谓的直接边界元法, 选取基本解 G^* 作为权函数,

$$w = w_1 = w_2 = G^*(X - X^*) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|X - X^*|), \quad (22)$$

且基本解 G^* 满足方程

$$\nabla^2 G^*(X, X^*) + \delta(X - X^*) = 0, \quad (23)$$

其中, X 代表源点, X^* 为边界配置点, δ 为 Dirac delta 函数. 因满足上式, 有

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 w) d\Omega = -u^c, \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} v(\nabla^2 w) d\Omega = -v^c, \quad (25)$$

式中, u^c 和 v^c 代表域内源点 c 处作用下的函数值. 在光滑曲线边界上, 可通过超强奇异积分获得 u^c 和 v^c . 例如

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 G^*(X, X^*) d\Omega = -c(X^*) u(X^*) = -c^* u^*. \quad (26)$$

对于 2 维位势问题,

$$c^* = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow X^* \in \Omega, \\ \frac{\beta}{2\pi} \Leftrightarrow X^* \in \Gamma, \\ 0 \Leftrightarrow X^* \notin \Omega = \Omega \cup \Gamma, \end{cases} \quad (27)$$

式中, β 为以源点 X^* 为观察点域 Ω 的边界的张角, 例如光滑直线段 $\beta = \pi$. 可以看到, v^e 具有与上式相同的表达式. 可以观察到: 由式(9)和式(10)至此可以推导出直接边界积分方程, 可写为

$$u^e = \int_{\Gamma} \left(pw - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (28)$$

以及

$$v^e = \int_{\Gamma} \left(qw - v \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma, \quad (29)$$

分别对应着 u 和 v 的直接边界积分方程, 也是通常所称的超奇异直接边界元的列式^[14].

特别地, 对于基于 Cauchy-Riemann 条件的加权残数表述式(11), 选取配点法建立边界积分方程. 设式(11)中的权函数取如下形式:

$$w' = w_3 = \delta(X - X^*), \quad (30)$$

于是, 式(11)或者式(14)改写为

$$0 = \int_{\Gamma} (pw' - v_s w') d\Gamma. \quad (31)$$

在下一节中, 将式(28)、(29)和式(31)转化为离散化的边界配点方程.

3 复分析用共轭边界元

首先将边界离散化, 即 $\Gamma \approx \sum_{j=1}^{n_e} \Gamma^j$, n_e 为边界单元数. 先讨论直线单元, 定义单元内的几何插值函数

$$x = \sum N_g(\xi_j) x^e, \quad (32)$$

$$y = \sum N_g(\xi_j) y^e. \quad (33)$$

因为边界为封闭曲线, 将其离散为 n_e 个直线元, 单元连接点依次为 (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n_e$, 即 Γ^j 由两 endpoints (x_{j-1}, y_{j-1}) 和 (x_j, y_j) 所定义且 $\xi_j \in [-1, 1]$, $(x, y) \in \Gamma^j$. 直线单元的几何插值函数为

$$x = \frac{1 - \xi_j}{2} x_{i-1} + \frac{1 + \xi_j}{2} x_i, \quad (34)$$

$$y = \frac{1 - \xi_j}{2} y_{i-1} + \frac{1 + \xi_j}{2} y_i. \quad (35)$$

接下来, 考虑物理场在离散边界单元内的插值关系

$$u(x, y) = \sum N_u(\xi_j) u^e, \quad (36)$$

$$v(x, y) = \sum N_v(\xi_j) v^e, \quad (37)$$

$$p(x, y) = \sum N_p(\xi_j) p^e, \quad (38)$$

$$q(x, y) = \sum N_q(\xi_j) q^e. \quad (39)$$

对于常数单元,

$$N_u(\xi_j) = N_v(\xi_j) = N_p(\xi_j) = N_q(\xi_j) = 1. \quad (40)$$

对于线性单元,以单元内 u 场为例写出

$$u = \frac{1 - \xi_j}{2} u_{i-1} + \frac{1 + \xi_j}{2} u_i. \quad (41)$$

为了计算沿边界切向的方向导数,建立一个全局的自然坐标系 s ,以第 1 单元的中节点为坐标原点,即

$$\begin{cases} s = \{0, s_1, s_2, \dots, s_{n_e}\}, \\ s_1 = 0.5(\| \Gamma^1 \| + \| \Gamma^2 \|), \\ s_k = s_{k-1} + 0.5(\| \Gamma^{k-1} \| + \| \Gamma^k \|), \quad k = 2, 3, \dots, n_e, \end{cases} \quad (42)$$

式中, $\| \Gamma^j \|$ 表示单元 Γ^j 的长度.至此出现了 2 个层次的插值函数:在常单元内,物理场近似为不变的常数;而在全局或者单元之间的函数变化近似为分片的一次函数,即在临近的任意 2 个单元中心点 ($\xi_j = 0$,也是常数单元的中节点)之间的函数变化是线性的.于是, v 沿边界点切向方向的导数近似为

$$v_{,s} \approx \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} v_i + \frac{s_i - s}{s_i - s_{i-1}} v_{i-1}, \quad s \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_e. \quad (43)$$

需要说明的是:本文的 2 个层次插值函数选择的是最简单的形式.基于单元内插值函数式(36)~(39)所完成的积分或微分运算,称为单元内积分或单元内微分(in-element integral or differential),而基于式(43)所完成的微分,称为跨单元微分(across-element differential).针对不同的边界单元类型(高阶的插值函数)和单元划分(均匀或非均匀网格),有关单元内微积分和跨单元微积分的相互关系及其对计算收敛性的影响,将专文讨论.本文仅限于讨论常单元和跨单元的一次函数近似.

将上述离散化关系应用于式(28)和式(29),即得到通常的位势问题边界方程:

$$-c^* u^* - \sum_{j=1}^{n_e} u_j \int_{\Gamma_j} N_u Q^* d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_e} p_j \int_{\Gamma_j} N_p G^* d\Gamma = 0, \quad (44)$$

和

$$-c^* v^* - \sum_{j=1}^{n_e} u_j \int_{\Gamma_j} N_v Q^* d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_e} q_j \int_{\Gamma_j} N_q G^* d\Gamma = 0. \quad (45)$$

将以上两式重写为矩阵形式

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P}, \quad (46)$$

和

$$\mathbf{H}\mathbf{V} = \mathbf{G}\mathbf{Q}, \quad (47)$$

式中, \mathbf{H} 和 \mathbf{G} 即为 2 维位势问题边界元的两个影响矩阵,它们的具体计算已经列入许多经典文献中,包括 Brebbia 的著作^[8]和我国学者的著作^[16]等.注意到如下特殊函数的积分关系:

$$\int_{\Gamma} p(\mathbf{X}) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) d\Gamma(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}^*). \quad (48)$$

将式(48)和式(43)代入式(31)得

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{V}, \quad (49)$$

式中 \mathbf{D} 为经典的差分矩阵,写为

用分块矩阵算法可以获得矩阵 M 和 N 的表达式. 首先将式(57)改写为分块矩阵形式

$$\begin{cases} X \\ Y \end{cases} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{cases} U \\ V \end{cases}, \quad (60)$$

其中, $A_1 = A_r, A_2 = -A_l, B_1 = B_r G^{-1} H, B_2 = -B_l G^{-1} H$. 利用分块矩阵求逆算法, 可得

$$\begin{cases} U = T_0^{-1} B_2 X - T_0^{-1} B_1 Y, \\ V = -T_0^{-1} A_2 X + T_0^{-1} A_1 Y, \end{cases} \quad (61)$$

其中 $T_0 = A_1 B_2 - A_2 B_1$. 可以观察到: 因 T_0 是病态的, 式(61)中的 T_0^{-1} 通常是无解的. 幸运的是, 通过引入新矩阵并利用边界类型二进制向量 g 和 h 的特性, 可以方便地解决 T_0 的求逆问题. 引入新矩阵

$$A_1 = A_{11} + A_{12}, \quad A_2 = A_{21} + A_{22}$$

和

$$B_1 = B_{11} + B_{12}, \quad B_2 = B_{21} + B_{22},$$

其中

$$A_{ab}(j, :) = \begin{cases} 0, & g(j) = 1, \\ r, & g(j) = 0, \end{cases} \quad \{ab\} = \{12, 21\},$$

$$B_{ab}(j, :) = \begin{cases} 0, & h(j) = 1, \\ r, & h(j) = 0, \end{cases} \quad \{ab\} = \{12, 21\}.$$

上式中 r 可取任意的随机数, 因为矩阵中的这一列对应的 g 或者 h 值都为 0. 于是, 在 T_0 的表达式中分别用 $A_{11}, A_{22}, B_{11}, B_{22}$ 替换 A_1, A_2, B_1, B_2 的位置, 并不影响最终的计算结果. 因此, 选取恰当的 r 以改善 $T_0 = A_{11} B_{22} - A_{22} B_{11}$ 的条件数是可以方便实现的. 由此, 式(59)中的 M 和 N 的表达式为

$$\begin{cases} M = G^{-1} H T_0^{-1} B_2 + D T_0^{-1} A_2, \\ N = G^{-1} H T_0^{-1} B_1 + D T_0^{-1} A_1, \end{cases} \quad (62)$$

其中 $T_0 = A_{11} B_{22} - A_{22} B_{11}$. 采用 2 种算法求解由式(58)、(59)和式(62)给出的线性系统: 当 T_0 非病态时, 选用通用的 LU 分解法(参见 Stephen Kirkup 在其网站 www.boundary-element-method.com 介绍的程序); 当 T_0 经过处理仍然为弱病态时, 选用 Jacobsen 和 Hansen 等^[17]所提出的子空间预处理 LSQR 解法.

5 内点计算的 Cauchy 积分法

接上一节, 当边界配点上的 U, V, P 和 Q 都已经获知后, 可以 2 次采用常规的 2 维位势问题边界元法计算内点的实函数值及其导数并组成复函数. 但是, 对于本文研究的复变函数而言, 提出以复变函数中著名的 Cauchy 积分公式来直接计算内点的复函数值及其各阶导数. 通常, 复变函数的 Cauchy 积分公式写为^[12]

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (63)$$

式中 $z_0 = x_0 + iy_0$ 为复数域内一点的复数值, L 为包围 z_0 点的任意封闭曲线, $f(z)$ 是定义在 Ω 域内连续可微的复函数. 对于域内(interior domain)问题, 前文提及的边界 Γ 恰好包围了待求的内点. 而对于域外(exterior domain)问题, 通过简单的变换 $z' = 1/z$ 可以将域外问题转换为域内问题, 从而如下提出的算法仍然有效(参见本文的附录). 在离散单元空间中, 式(63)中的曲

线积分可以用边界单元积分近似,即

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (u_{e0} dx - v_{e0} dy) + i(v_{e0} dx + u_{e0} dy), \tag{64}$$

式中

$$u_{e0} = \frac{u(x - x_0) - v(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, v_{e0} = \frac{u(y - y_0) + v(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{65}$$

事实上,对于直线单元,式(64)的计算可以通过下式给出的逐个单元计算公式简单完成:

$$\begin{cases} \Re \{f(z_0)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{n_e} u_{e0}^n \Delta x^n - v_{e0}^n \Delta y^n, \\ \Im \{f(z_0)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{n_e} v_{e0}^n \Delta x^n + u_{e0}^n \Delta y^n, \end{cases} \tag{66}$$

式中 u_{e0}^n 和 v_{e0}^n 是将第 n 号单元中节点的 u, v 场值和 x, y 坐标值分别代入式(65)所得到的,而 $\Delta x^n, \Delta y^n$ 分别为第 n 号单元 x 和 y 坐标值之差.另外,对于 $f(z)$ 的高阶导数而言,同样可以方便地使用高阶导数的 Cauchy 积分公式.对 $f(z)$ 的第 n 阶导数,有^[12]

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{67}$$

显然,由式(67)可以推导出与式(64)和式(66)类似的简洁计算公式.

6 数值算例

本节提供有关 3 个复变函数的数值算例,所有计算均采用 MATLAB 自编代码而且都采用中节点的常数边界单元,算例中所用的复常数都取 $A = 1/2 - (\sqrt{3}/2)i$ 和 $B = -3/5 + (4/5)i$.

表 1 算例计算误差

Table 1 Error results of 3 problems using C^0 elements

| problem | N | $\frac{\ u - \hat{u}\ }{\ u\ }$ | $\frac{\ v - \hat{v}\ }{\ v\ }$ | $\frac{\ u^i - \hat{u}^i\ }{\ u^i\ }$ | $\frac{\ v^i - \hat{v}^i\ }{\ v^i\ }$ |
|---------|--------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 6.1 | 32 | 0.009 099 | 0.009 809 | 0.010 86 | 0.013 02 |
| | 64 | 0.002 275 | 0.002 305 | 0.002 362 | 0.002 965 |
| | 128 | 0.000 560 3 | 0.000 555 2 | 0.000 572 7 | 0.000 726 0 |
| | 256 | 0.000 139 2 | 0.000 137 1 | 0.000 141 3 | 0.000 180 4 |
| 6.2 | $2 \times 20 \times 10$ | 0.015 90 | 0.026 10 | 0.043 68 | 0.084 93 |
| | $2 \times 40 \times 20$ | 0.006 146 | 0.007 465 | 0.023 88 | 0.034 27 |
| | $2 \times 80 \times 40$ | 0.002 324 | 0.002 232 | 0.012 77 | 0.014 48 |
| | $2 \times 160 \times 80$ | 0.000 860 6 | 0.000 703 7 | 0.006 688 | 0.006 456 |
| 6.3 | $2 \times 20 \times 10$ | 0.003 061 | 0.001 946 | 0.012 07 | 0.006 420 |
| | $2 \times 40 \times 20$ | 0.001 176 | 0.000 718 5 | 0.006 558 | 0.003 352 |
| | $2 \times 80 \times 40$ | 0.000 456 0 | 0.000 273 8 | 0.003 597 | 0.001 806 |
| | $2 \times 160 \times 80$ | 0.000 176 5 | 0.000 105 2 | 0.001 970 | 0.000 981 3 |

6.1 单位圆域外的幂函数

第 1 个例子是关于单位圆域外的 1 个解析函数.边界条件为

$$\Re \{Af(z)\} = \cos \theta \sin \theta - \sqrt{3} \cos(2\theta)/2, \quad 0 < \theta \leq \pi,$$

$$\Re \{ Bf_{,n}(z) \} = 1.2\sin(2\theta) + 1.6\cos(2\theta), \quad \pi < \theta \leq 2\pi,$$

其中 θ 为圆心角.内点取在半径为 1.2 的单位圆的同心圆上.此问题的解析解 $f(z) = -iz^2$.

选取不同的等分数 N 划分单位圆,用本文提出的 CBEM 进行计算,将边界配点的数值计算结果与精确解进行对比,两者之间的相对误差列入表 1,内点的计算结果也列入表中.取 $N = 32$ 单位圆边界上 u 和 v 值结果绘于图 2 和图 3 中,取 $N = 64$ 内点的 u 和 v 值结果绘于图 4 和图 5 中.

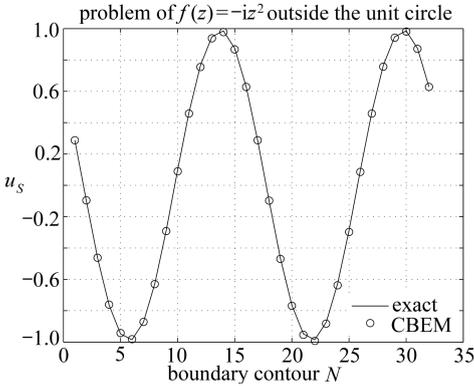


图 2 算例 6.1 中单位圆上的 u 值

Fig. 2 Values of u at the unit circle in 6.1

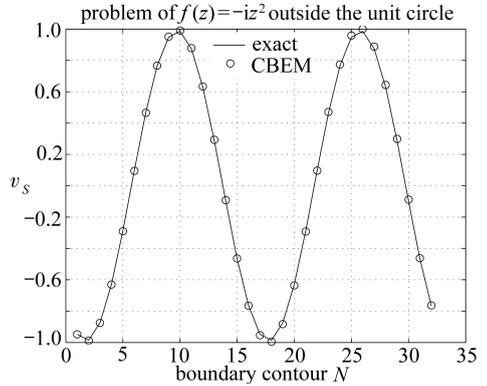


图 3 算例 6.1 中单位圆上的 v 值

Fig. 3 Values of v at the unit circle in 6.1

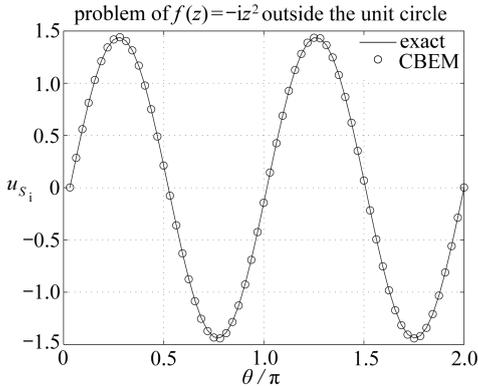


图 4 算例 6.1 中 $r = 1.2$ 圆周上的 u 值

Fig. 4 Values of u at the $r = 1.2$ circle in 6.1

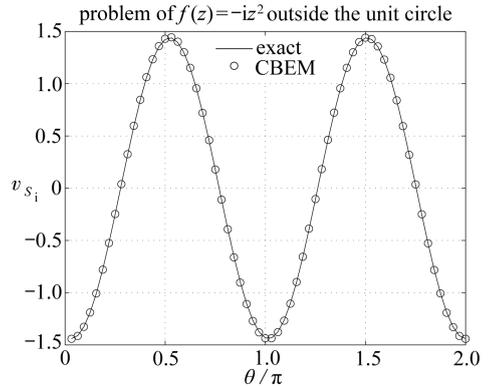


图 5 算例 6.1 中 $r = 1.2$ 圆周上的 v 值

Fig. 5 Values of v at the $r = 1.2$ circle in 6.1

6.2 矩形域外的指数函数

第 2 个例子是求矩形域外的 1 个解析函数.矩形 4 条边的边界条件写为

$$y = -1: \Re \{ Af(z) \} = \frac{\cos 1}{2} e^x - \frac{\sqrt{3} \sin 1}{2} e^x;$$

$$x = 2: \Re \{ Bf_{,n}(z) \} = \frac{3e^2 \cos y}{5} + \frac{4e^2 \sin y}{5};$$

$$y = 1: \Re \{ A(z) \} = \frac{\cos 1}{2} e^x + \frac{\sqrt{3} \sin 1}{2} e^x;$$

$$x = -2: \Re \{ Bf_{,n}(z) \} = -\frac{3e^2 \cos y}{5} - \frac{4e^2 \sin y}{5}.$$

此问题的真解为 $f(z) = e^z$.计算结果同样列入表 1.矩形边界上 u 和 v 值结果绘于图 6 和图 7 中.

6.3 矩形域内的对数函数

最后 1 个例子仍然研究上例中的矩形域,但是考虑域内问题,而边界条件给定为

$$y = -1: \Re \{ Af(z) \} = \frac{\ln((x-5)^2 + 36)}{4} + \frac{\sqrt{3} \arctan(-6/(x-5))}{2};$$

$$x = 2: \Re \{ Bf_n(z) \} = -\frac{-4y + 11}{5(y^2 - 10y + 34)};$$

$$y = 1: \Re \{ A(z) \} = \frac{\ln((x-5)^2 + 16)}{4} + \frac{\sqrt{3} \arctan(-4/(x-5))}{2};$$

$$x = -2: \Re \{ Bf_n(z) \} = \frac{-4y - 1}{5(y^2 - 10y + 74)}.$$

内点取在 $y = 0.5, -1 \leq x \leq 1$ 的直线上的等分点.此问题的真解为 $f(z) = \ln(z - z_0)$, 其中 $z_0 = 5 + 5i$. 计算结果同样列入表 1, 内点的 u 和 v 值的变化曲线如图 8 和图 9 所示.

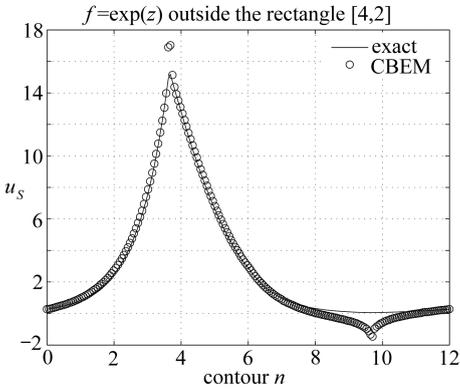


图 6 算例 6.2 中矩形边上的 u 值

Fig. 6 Boundary values of u at rectangle edges in 6.2

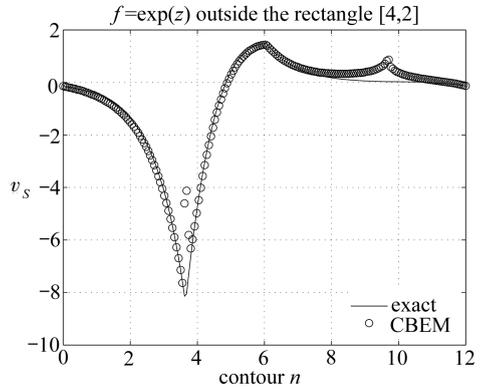


图 7 算例 6.2 中矩形边上的 v 值

Fig. 7 Boundary values of v at rectangle edges in 6.2

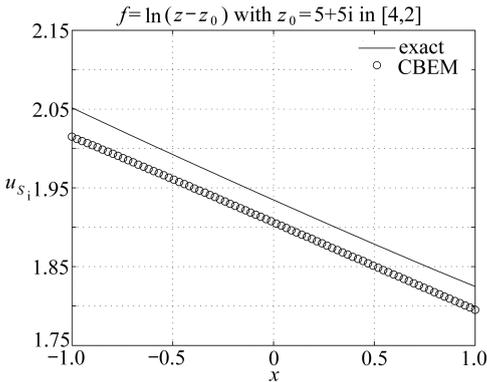


图 8 算例 6.3 中矩形域内直线上的 u 值

Fig. 8 Values of u at the internal line inside the rectangle in 6.3 ($y = 0.5$)

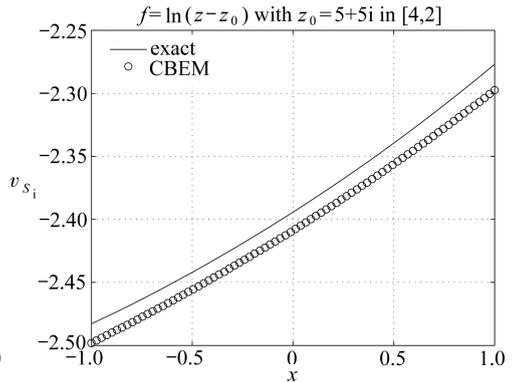


图 9 算例 6.3 中矩形域内直线上的 v 值

Fig. 9 Values of v at the internal line inside the rectangle in 6.3 ($y = 0.5$)

7 结 论

从表 1 可以看出,所提出的算法具有良好的收敛性.在例 6.1 中,即使单位圆仅划分 32 等

分,计算结果仍然具有较高的精度($\leq 1.0\%$),如图 2 和图 3.例 6.2 中粗网格的边界值最大误差 $\leq 2.6\%$,这也是所有算例中的最大误差.

从图 4 和图 5 可以看出,虽然在角点处出现了较大的计算误差,但 CBEM 常单元不需特殊处理角点问题,在矩形区域的复分析中保证了整体较高的计算精度.

从表 1 还可以看出,所提出的算法与经典 2 维位势问题具有同等的计算精度.观察表 1 中计算误差随单元数目增大而减小的趋势,可以初步得出结论:所提出的 CBEM 计算误差与网格尺寸平方或单元数平方的倒数是等价无穷小的关系,即

$$\frac{\|u - \hat{u}\|}{\|u\|} \sim O(h^2),$$

或者

$$\frac{\|u - \hat{u}\|}{\|u\|} \sim O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

从图 4、图 5、图 8 和图 9 以及表 1 的右边 2 列可以看出,所提出的内点回代算法同样具有很好的精度.

综合分析算例及其结果,所提出的新算法对于以幂函数、指数函数和对数函数表示的解析函数都是有效的,而且对于各种形状的域内或者域外问题也是适用的.

对应用数学和力学而言,研究复变函数向量(f.c.v. vector)比研究单个解析函数更具实际意义.因此,尝试用符号运算和域分解的方法,已经完成了对带孔压电板的边界元计算^[18].本文研究作为求解复变函数向量的多重共轭边界元法(multiple conjugate boundary element method for f.c.v. vector, MCBEM)的一个重要基础,后续将研究用 MCBEM 分析各向同性和各向异性弹性以及多物理场耦合等问题.

附录 域外问题应用 Cauchy 积分公式

承接第 5 节,边界 Γ 上的 u, v, u_n 和 v_n 值均为已知.在域外问题中,待求的内点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 不在边界曲线 Γ 的包围以内.因此,提出变换关系 $z' = 1/z$,可以证明,在 z' 平面中, $z_k = x_k + iy_k = 1/z_0$ 必然落在变换后的边界曲线 Γ' 的包围圈以内.在 z' 平面中,复变函数的 Cauchy 积分为

$$f(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(z')}{z' - z_k} dz',$$

与式(64)类似:

$$f(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} (u'_{c0} dx' - v'_{c0} dy') + i(v'_{c0} dx' + u'_{c0} dy'),$$

其中

$$u'_{c0} = \frac{u'(x' - x_k) - v'(y' - y_k)}{(x' - x_k)^2 + (y' - y_k)^2}, v'_{c0} = \frac{u'(y' - y_k) + v'(x' - x_k)}{(x' - x_k)^2 + (y' - y_k)^2}.$$

首先,注意到 z 平面与 z' 平面的对应关系

$$z' = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = x' + iy',$$

即

$$x' \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2}, y' \Leftrightarrow \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

另外,变换前后复函数值的对应关系

$$f(x' + iy') = u(x', y') + iv(x', y') = u' + iv'.$$

类似地,将积分转化为 z' 平面的离散边界单元的积分,可得到与式(66)形式相同的计算式,

$$\Re \{f(z_k)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{n_c} u'_{c0} \Delta x'^n - v'_{c0} \Delta y'^n,$$

$$\Im \{f(z_k)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{n_c} v'_{c0} \Delta x'^n + u'_{c0} \Delta y'^n,$$

式中 u'_{c0} 和 v'_{c0} 由上述对应关系确定,而 $\Delta x'^n = x'^J - x'^I$, $\Delta y'^n = y'^J - y'^I$ 是 z' 平面中第 n 个单元两端坐标 x' 和 y' 坐标之差.最终,利用关系 $z_k = x_k + iy_k = 1/z_0$ 由 $f(z_k)$ 计算出 $f(z_0)$.

参考文献 (References):

- [1] Jeans J H. *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism* [M]. 4th ed. London: Cambridge University Press, 1920.
- [2] Kolosov G V. *Application of Complex Variables in the Theory of Elasticity* [M]. Moscow-Leningrad, 1935. (in Russian)
- [3] Muskhelishvili N I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [M]. Moscow: Nauka, 1966. (in Russian)
- [4] England A H. *Complex Variable Method in Elasticity* [M]. New York: Wiley, 1971.
- [5] 毛翎, 姚伟岸, 高强, 等. 空间各向异性弹性问题的二十节点理性单元[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(6): 589-597. (MAO Ling, YAO Wei-an, GAO Qiang, et al. 20 node rational elements for 3D anisotropic elastic problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 589-597. (in Chinese))
- [6] 胡元太, 李国清, 蒋树农, 等. 具有刚性双边裂纹的压电介质中的电荷相互作用分析[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(8): 911-920. (HU Yuan-tai, LI Guo-qing, JIANG Shu-nong, et al. Interaction of electric charges in a piezoelectric with rigid external cracks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **26**(8): 911-920. (in Chinese))
- [7] 周伟建, 陈伟球. 表面效应对偏场下介电高弹体表面波传播的影响[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(2): 119-127. (ZHOU Wei-jian, CHEN Wei-qiu. Surface effect on propagation of surface waves in a dielectric elastomer half space subject to biasing fields[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(2): 119-127. (in Chinese))
- [8] Brebbia C A. *The Boundary Element Method for Engineers* [M]. London: Pentech Press, 1978.
- [9] Hromadka II T V, Lai C. *The Complex Boundary Element Method in Engineering Analysis* [M]. New York: Springer, 1987.
- [10] Whitley R J, Hromadka II T V. Theoretical developments in the complex variable boundary element method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2006, **30**(12): 1020-1024.
- [11] 禰启沃, 吴兹潜. 二维位势边界元技术的共轭函数法[J]. 计算物理, 1989, **6**(2): 191-196. (XU-AN Qi-wo, WU Ci-quian. The method of conjugate function for boundary element technique [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1989, **6**(2): 191-196. (in Chinese))
- [12] M·A·拉夫连季耶夫, B·沙巴特. 复变函数论方法[M]. 第6版. 施祥林, 夏定中, 吕乃刚, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006. (Lavrentieff M A, Shabat B. *Methods of Functions of a Complex Variable* [M]. 6th ed. SHI Xiang-lin, XIA Ding-zhong, LÜ Nai-gang, transl. Beijing: Higher Education Press, 2006. (Chinese version))
- [13] 徐次达. 加权残数法解固体力学问题[J]. 力学与实践, 1980, **2**(4): 12-20. (XU Ci-da. Weighted residuals method for solid mechanics[J]. *Mechanics in Engineering*, 1980, **2**(4): 12-20. (in Chinese))

- Chinese))
- [14] Branski A, Borkowski M, Borkowska D. A comparison of boundary element methods based on inverse variational formulation[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2012, **36**(4): 505-510.
- [15] Wearing J L, Sheikh M A. A regular indirect boundary element method for thermal analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, **25**(2): 495-515.
- [16] 姚振汉, 王海涛. 边界元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (YAO Zhen-han, WANG Hai-tao. *Boundary Element Method*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [17] Jacobsen M, Hansen P C, Saunders M A. Subspace preconditioned LSQR for discrete ill-posed problems[J]. *Bit Numerical Mathematics*, 2003, **43**(5): 975-989.
- [18] Miao X Y, Li G Q. Analysis of piezoelectric plates with a hole using nature boundary integral equations and domain decomposition[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2014, **40**: 71-77.

A Conjugate Boundary Element Method for Complex Analysis of Analytic Functions

LI Guo-qing

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, P.R.China)

Abstract: An analytic function is composed of 2 real conjugate harmonic functions, of which the complex analysis plays an important role in the fields of applied mathematics and mechanics. A set of weighted residual equations were proposed and proved to be equivalent to the approximate solution to the original problem involving 2 governing equations in the domain, the boundary condition and the Cauchy-Riemann equation at the boundary. 2 conventional direct boundary integral equations at the boundary collocation points were deduced from 2 of the weighted residual equations, and 1 finite difference equation was deduced from the rest one. The mathematical problem arising from the ill-conditioned linear equations was solved and the Cauchy integral equation was adopted for numerical calculation of the fields at the internal points inside the domain. Finally, the proposed conjugate boundary element method with constant elements was completely established. 3 examples demonstrate that, the proposed method is valid for analytic functions in terms of the power function, the exponential function and the logarithmic function in interior or exterior domains, and the error estimation of the proposed method is at the same order as that of the boundary element method for 2D potential problems.

Key words: complex analysis; boundary element; analytic function; potential theory

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10972083)

引用本文/Cite this paper:

李国清. 用于解析函数复分析的共轭边界元法[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(8): 863-876.

LI Guo-qing. A conjugate boundary element method for complex analysis of analytic functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 863-876.