

二维稳态热传导问题的正六边形流形元研究*

谭育新, 张慧华, 胡国栋

(南昌航空大学 土木建筑学院, 南昌 330063)

摘要: 发展了用于分析二维稳态热传导问题的多边形数值流形方法(numerical manifold method, NMM).根据热传导问题的控制方程、边界条件以及多边形 NMM 的温度近似函数,采用修正变分原理导出了多边形 NMM 求解稳态热传导问题的总体方程,给出了多边形单元上的域积分策略.考虑到 NMM 中数学覆盖系统可不与物理域边界一致以及规则单元的精度优势,采用 Wachspress 正六边形数学单元对两个典型热传导问题进行了仿真,计算结果与参考解能较好地吻合,表明多边形 NMM 可以很好地模拟平面稳态热传导问题.

关键词: 数值流形方法; 多边形单元; 稳态热传导; 温度; 二维; 正六边形

中图分类号: O241; TK124 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370306

引言

热传导问题是工程科学和技术领域中的热点问题.数值方法因其适用范围广,分析成本低,求解效率高等特点成为求解此类问题的重要工具.

常用的数值方法包括有限差分法(finite difference method,简称 FDM),有限元法(finite element method,简称 FEM),边界元法(boundary element method,简称 BEM),各类无网格法(meshless methods),扩展有限元法(extended finite element method,简称 XFEM)及上述方法的耦合衍生方法(如 FDM-FEM 耦合法)等.Li 和 Sun^[1]采用 FDM 和部分隐式 Euler(欧拉)法研究了织物中的非线性热及湿扩散问题;Wang 和 Tian^[2]结合 FDM 和 FEM 考察了高温环境下功能梯度材料的一维和二维瞬态热传导问题;Aguirre-Ramirez 和 Oden^[3]基于 FEM 分析了非均质各向异性材料中的三维非线性热传导问题;Adam 等^[4]结合 FEM 与正交分解法研究了非线性瞬态热传导问题;欧贵宝和费纪生^[5]采用 BEM 研究了二维瞬态热传导问题,使用分离变量法推导出边界积分方程,并以具体实例证实其可行性;Onyango 等^[6]运用 BEM 分析了一维热传导反问题并据此重建了热传导边界条件;Cheng 等^[7]采用多域 BEM 研究涂层结构的温度场分布,有效地解决了涂层厚度限制问题;Liu 等^[8]将加权最小二乘无网格法运用到热传导中,结果表明该方法的精度与无单元 Galerkin 法相当但求解效率更高.Wang 等^[9]基于虚拟边界配置法、径向基函数和模拟方程法发展了一种用于研究非均质各向异性材料稳定热传导问题的新

* 收稿日期: 2016-10-09; 修订日期: 2016-10-18

基金项目: 国家自然科学基金(11462014);江西省自然科学基金(20151BAB202003);江西省教育厅科技项目(GJJ14526)

作者简介: 谭育新(1990—),男,硕士生;
张慧华(1982—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: hhzhang@nchu.edu.cn).

型无网格法;王冰冰等^[10]将二阶一致性3点积分无网格法应用于求解平面稳态热传导问题的分析;Merle和Dolbow^[11]基于XFEM对热传导和相变问题进行了分析,重点探讨了热源附近高度局部化问题以及温度梯度的不连续问题;Liu等^[12]采用XFEM考察了大体积混凝土内温度场分布情况,并进一步研究了热断裂问题;Liu等^[13]发展了一种界面模型并与XFEM结合分析了颗粒复合材料中热传导问题;Stapor^[14]运用XFEM探讨了包含相变的非线性瞬态热传导问题。

数值流形方法(NMM)由Shi(石根华)博士在20世纪90年代初提出^[15],通过使用数学覆盖系统和物理覆盖系统这两套覆盖系统,NMM可以统一求解连续和不连续问题.NMM的主要特点为:1)数学覆盖系统边界可不与物理域边界重合;2)可自然地描述在跨越裂纹面等不连续几何时某些场函数的跳跃;3)通过在覆盖函数中引入表征物理场局部特性的基函数可准确捕捉研究对象的特点.近年来,NMM在诸多领域得到了较为广泛的应用,其中,基于NMM的热传导问题研究工作主要有:魏高峰和冯伟^[16]发展了用于求解平面稳态热传导问题的非协调NMM;林绍忠及其合作者^[17-18]导出了高阶NMM求解温度应力和温度场的计算公式,并据此求解了大体积混凝土的热应力问题;刘泉声和刘学伟^[19]基于三角形有限覆盖NMM理论,发展了用于岩体瞬态温度场求解的NMM.刘学伟等^[20-21]基于NMM求解了裂隙岩体温度-渗流耦合和温度-应力耦合的问题;Zhang等^[22]发展了用于分析二维稳态热弹性断裂问题的NMM;李义^[23]通过条形连接单元连接独立覆盖发展了用于研究大体积混凝土温度场问题的NMM.

以上基于NMM的热传导问题研究都采用三角形或四边形单元,近年来多边形单元(边数大于4)因其独特的优势而日益受到关注^[24-29],较之常用的三角形和四边形单元,多边形单元的主要特性有^[25]:1)网格划分更加灵活;2)更适用于材料设计和多晶材料模拟;3)不易发生体积自锁和剪切自锁等.考虑到多边形单元的特色,NMM的数学覆盖可独立于物理域边界的优点(即表明可以使用完全规则的数学覆盖系统对物理域进行离散)、规则单元的精度优势^[30]以及在正多边形(边数大于4)中仅正六边形可单独镶嵌平面(即采用同一种单元无间隙且不重叠地覆盖平面的一部分)等因素,本文基于NMM并使用正六边形数学单元对二维稳态热传导问题进行研究.

1 控制方程及边界条件

考虑图1所示平面域内的稳态热传导问题,物理域 Ω 由边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 两两无交集)围成, n 为外法线向量.该问题的控制方程为^[31]

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0, \quad (1)$$

其中, k 为导热系数, T 为温度, Q 为热源密度.相应的边界条件为

$$T = \bar{T} \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_1), \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \bar{q} \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_2), \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \alpha(T - T_m) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_3), \quad (4)$$

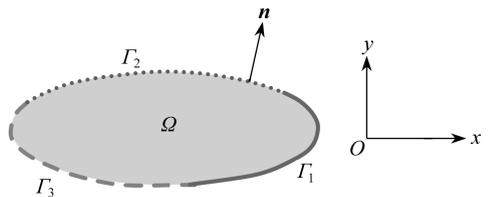


图1 物理域及其边界

Fig. 1 The physical domain and its boundary

其中, \bar{T} 和 \bar{q} 分别为第一类边界 Γ_1 和第二类边界 Γ_2 上给定的温度和热流, $\mathbf{x} = (x, y)$, n_x, n_y 为外法线方向余弦, α 为第三类边界 Γ_3 上的表面换热系数, T_m 表示环境温度。

2 多边形 NMM 基础

2.1 NMM 简介

NMM 是以两套独特的覆盖系统(数学覆盖系统和物理覆盖系统)为基础,单元近似场函数建立在流形单元上的一种数值方法,数学覆盖是由用户自定义、由若干个形状任意的数学单元组成的几何分片^[15]。一系列的数学覆盖组成数学覆盖系统,该系统可不依赖于物理域的边界(包括外边界以及域内可能存在的裂纹、夹杂和孔洞等不连续)。物理覆盖由数学覆盖系统和物理域相交得到(所有物理覆盖的合集统称为物理覆盖系统),若干个物理覆盖的公共部分则形成流形单元(以下简称为单元)。

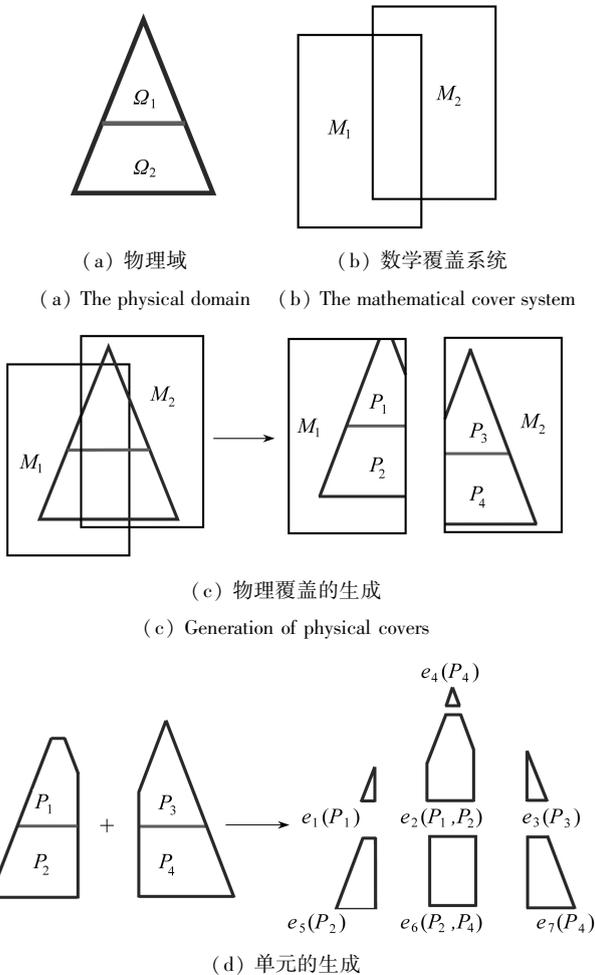


图2 NMM 基本概念图示

Fig. 2 Illustration of basic concepts in the NMM

下面以图 2 为例对以上概念做进一步说明。考察图 2(a) 所示的物理域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 采用

图 2(b) 所示的两个矩形数学覆盖 M_1 和 M_2 组成的数学覆盖系统对物理域进行离散. 物理域先后与数学覆盖 M_1 和 M_2 相交得到 4 个物理覆盖, 即图 2(c) 中的 P_1, P_2, P_3 和 P_4 . 4 个物理覆盖的公共区域最终形成图 2(d) 中的 e_1, e_2, \dots, e_7 共 7 个单元 (图 2(d) 中单元后的括号内给出了与之对应的物理覆盖号).

基于上述概念, 对热传导问题, 任一单元 e 上的温度场近似函数可表示为

$$T^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_i} w_i(\mathbf{x}) T_i(\mathbf{x}), \tag{5}$$

其中, n_i 是组成单元 e 的物理覆盖的个数, $w_i(\mathbf{x})$ 是物理覆盖 P_i 对应的权函数, 其由定义在包含 P_i 的数学覆盖 M_i 上的权函数 $w_i(\mathbf{x})$ 继承而来. 对多边形数学单元组成的数学覆盖, 其权函数的具体形式将在下一小节阐述. $T_i(\mathbf{x})$ 是定义在 P_i 上的覆盖函数, 常采用多项式, 即

$$T_i(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i, \tag{6}$$

其中, \mathbf{a}_i 为定义在 P_i 上的广义自由度, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ 为多项式基, 对平面问题可表示为

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots]. \tag{7}$$

2.2 多边形 NMM 的权函数

NMM 的权函数 $w_i(\mathbf{x})$ 定义在数学覆盖 M_i 上, 其应满足

$$\begin{cases} w_i(\mathbf{x}) \in C_0(M_i), \\ w_i(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \notin M_i, \end{cases} \tag{8}$$

其中, C_0 表示自身连续的函数空间. 此外, 对所有包含 \mathbf{x} 的数学覆盖, 权函数尚应满足

$$\sum_{J, \mathbf{x} \in M_J} w_J(\mathbf{x}) = 1. \tag{9}$$

对本文研究的由多边形数学单元 (见图 3) 组成的数学覆盖, 其权函数采用 Wachspress 形式^[32], 即

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\phi_i(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x})}, \tag{10}$$

其中, N 为单元边数,

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{A(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1})}{A(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{p})A(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \mathbf{p})} = \frac{\cot \gamma_i + \cot \delta_i}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_i\|^2}, \tag{11}$$

$$\cot \gamma_i = \frac{\mathbf{q}_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{i-1}}{|\mathbf{q}_i \mathbf{p} \times \mathbf{q}_i \mathbf{q}_{i-1}|}, \tag{12}$$

$$\cot \delta_i = \frac{\mathbf{q}_i \mathbf{q}_{i+1} \cdot \mathbf{q}_i \mathbf{p}}{|\mathbf{q}_i \mathbf{q}_{i+1} \times \mathbf{q}_i \mathbf{p}|}, \tag{13}$$

式中, $A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ 表示由顶点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 组成的三角形的面积, $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_i\|$ 为点 \mathbf{p} 和 \mathbf{q}_i 之间的距离, δ_i 为线段 $\mathbf{p}\mathbf{q}_i$ 与 $\mathbf{q}_{i+1}\mathbf{q}_i$ 间的夹角, γ_i 为线段 $\mathbf{p}\mathbf{q}_i$ 和 $\mathbf{q}_{i-1}\mathbf{q}_i$ 间的夹角 (见图 3). 式 (12) 和 (13) 中, 符号 “ \cdot ” 和 “ \times ” 分别表示矢量的点积和叉积. 对点 \mathbf{p} 位于单元边上的特殊情况, 相应的权函数可根据其在单元边上线性变化的特性按线性插值方式得到.

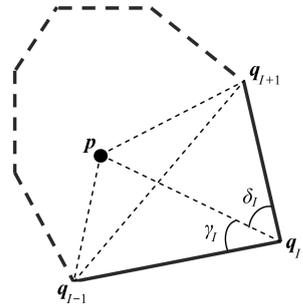


图 3 多边形数学单元图示

Fig. 3 An illustration of a polygonal element

3 热传导问题的多边形 NMM 求解

3.1 NMM 分析稳态热传导问题的总体方程

本文通过变分原理导出 NMM 分析稳态热传导问题的离散方程.根据文献[33],与微分方程(1)和边界条件(3)~(4)等价的泛函为

$$\Pi(T) = \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - QT \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{q} T d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \alpha \left(\frac{T^2}{2} - TT_m \right) d\Gamma. \quad (14)$$

考虑到 NMM 中的数学覆盖系统可不与物理域的边界重合以及式(6)中的自由度为广义自由度,本文利用罚函数法处理式(2)中的第一类边界条件,相应的修正泛函可表示为

$$\Pi^*(T) = \Pi(T) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (T - \bar{T}) \lambda (T - \bar{T}) d\Gamma, \quad (15)$$

其中, λ 为罚函数.

根据变分原理,仅真实解可使得 $\Pi^*(T)$ 取极值,即使得 $\delta\Pi^*(T) = 0$, 进一步利用式(5)、(6)以及变分的任意性,可得 NMM 求解稳态热传导问题的总体方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F}, \quad (16)$$

其中, \mathbf{K} 为热传导矩阵, \mathbf{T} 为广义自由度列阵, \mathbf{F} 为等效温度荷载列阵. \mathbf{K} 和 \mathbf{F} 通过逐单元累加得到,可进一步表示为

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}^e + \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{K}_1^e + \sum_{i=1}^{n_3} \mathbf{K}_3^e, \quad (17)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{\Omega}^e + \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{F}_1^e - \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{F}_2^e + \sum_{i=1}^{n_3} \mathbf{F}_3^e, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T k \mathbf{B} d\Omega, \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_1^e = \int_{\Gamma_1^e} (w_i \mathbf{P})^T \lambda (w_i \mathbf{P}) d\Gamma, \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_3^e = \int_{\Gamma_3^e} (w_i \mathbf{P})^T \alpha (w_i \mathbf{P}) d\Gamma, \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_{\Omega}^e = \int_{\Omega^e} (w_i \mathbf{P})^T Q d\Omega, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}_1^e = \int_{\Gamma_1^e} (w_i \mathbf{P})^T \lambda \bar{T} d\Gamma, \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_2^e = \int_{\Gamma_2^e} (w_i \mathbf{P})^T \bar{q} d\Gamma, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_3^e = \int_{\Gamma_3^e} (w_i \mathbf{P})^T \alpha T_m d\Gamma, \quad (25)$$

式中,上标 T 表示矩阵的转置, n 为单元总数, Ω^e 为单元 e 的积分域, n_1, n_2 和 n_3 分别为与第一类、第二类和第三类边界直接连接的单元数, Γ_1^e, Γ_2^e 和 Γ_3^e 分别为与单元 e 有关的第一、第二和第三类边界.矩阵 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_i \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{n_i}], \quad (26)$$

其中

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial(w_i \mathbf{P})}{\partial x} \\ \frac{\partial(w_i \mathbf{P})}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

3.2 域积分策略

常规 NMM 采用单纯型积分 (simplex integration)^[15] 计算单元热传导矩阵和等效温度荷载列阵中的相关域积分 (即式 (19) 和 (22)), 该方法要求被积函数须解析可积 (如常见的多项式函数等). 考虑到 Wachspress 多边形单元上的权函数为有理式, 很难通过单纯型积分获得精确解, 本文采用数值积分方式, 具体求积过程为: 先将单元分解为若干个子三角形, 然后在每个子三角形上采用 Gauss (高斯) 积分, 最后将每个子三角形上的计算结果进行集成以得到相应单元上的最终值. 此外, 式 (7) 中的多项式基取为常数基, 即 $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1]$, 据此对每个子三角形, 采用 25 个点进行 Gauss 积分^[26-27].

4 数值算例

本节采用本文发展的多边形 NMM 对两个典型热传导问题进行分析以验证方法的可行性和精确性.

4.1 平板中的热传导问题

图 4 所示为长 a 、宽 b 的均质平板, 导热系数为 k , 坐标原点位于板左下角. 板上边界作用有热流 \bar{q} , 其余三边的温度均为 0°C , 域内无热源.

该问题的解析解为^[34]

$$T(x, y) = \frac{4\bar{q}a}{k\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sinh\left\{\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]y\right\} \sin\left\{\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]x\right\}}{\cosh\left\{\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]b\right\} (2m+1)^2}. \quad (28)$$

NMM 建模时, 取 $a = 1.0 \text{ m}$, $b = 0.8 \text{ m}$, $k = 1.2 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, $\bar{q} = 500 \text{ W}/\text{m}^2$. 使用一系列由边长为 0.028 m 的正六边形数学单元组成的数学覆盖对平板进行离散, 最终得到 971 个物理覆盖和 438 个单元 (离散后的物理域见图 5).

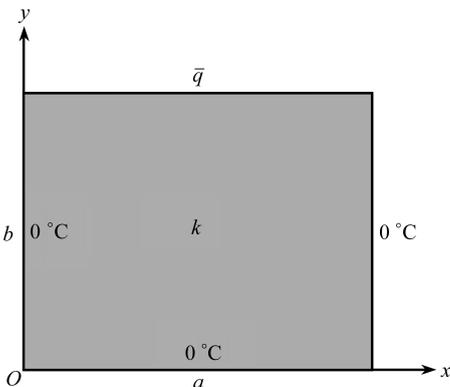


图 4 给定温度及热流作用下的平板

Fig. 4 The rectangular plate under prescribed temperature and heat flow

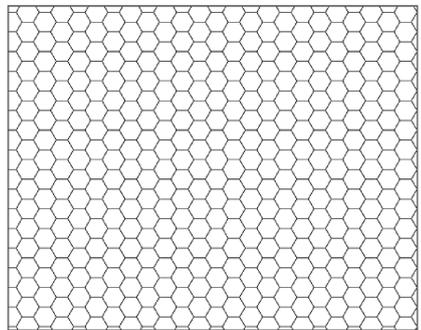


图 5 离散后的平板

Fig. 5 The discretized plate

表 1 给出了部分考察点温度场的 NMM 仿真结果, 为便于比较, 同时给出了当 $m = 15$ 时式

(28) 的计算值(试算表明 $m=15$ 时 T 的截断误差可忽略不计).由表 1 可以看出,对不同的点, NMM 解与解析解均吻合得很好,相对误差最大值仅为 0.36%,表明本文方法具有较高的精度.

表 1 NMM 计算结果与解析解的比较

Table 1 The NMM results in comparison with the analytical solutions at the sample points

sample point coordinates $(x,y)/(m,m)$	analytical solution $T_a/^\circ\text{C}$	NMM solution $T_{\text{NMM}}/^\circ\text{C}$	relative error $e_r/\%$
(0.1, 0.2)	5.684	5.673	0.19
(0.3, 0.3)	23.980	23.974	0.02
(0.3, 0.4)	35.621	35.748	0.36
(0.4, 0.2)	17.598	17.580	0.10
(0.4, 0.4)	41.479	41.470	0.02
(0.5, 0.2)	18.160	18.166	0.03
(0.5, 0.7)	114.833	114.928	0.08
(0.7, 0.3)	23.980	23.984	0.02
(0.8, 0.6)	53.885	53.813	0.13

4.2 工业烟囱中的热传导问题

如图 6 所示的小型混凝土工业烟囱^[35],导热系数 $k = 1.4 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$.烟囱外表面暴露在空气中,空气的温度为 30°C ,换热系数 $\alpha = 20 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$,烟囱内表面温度为 100°C ,相关尺寸标于图中(单位: m).

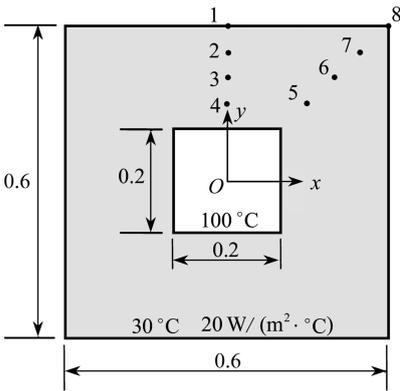


图 6 烟囱平面示意图(单位: m)

Fig. 6 The chimney plan sketch(unit: m)

NMM 分析时,采用如图 7 所示的由边长为 0.02 m 的正六边形单元形成的数学覆盖系统.该覆盖系统的边界与烟囱的内外边界均不一致,此外覆盖系统的生成也未考虑烟囱内部的空洞,很好地展示了 NMM 在物理域剖分方面的独到之处.离散后的物理域见图 8,该离散域包含 835 个物理覆盖和 362 个单元.

选取 8 个考察点进行研究,这些点的坐标分别为: 1(0.0, 0.3), 2(0.0, 0.25), 3(0.0, 0.2), 4(0.0, 0.15), 5(0.15, 0.15), 6(0.2, 0.2), 7(0.25, 0.25) 和 8(0.3, 0.3).据笔者所知,本例尚无可用的解析解,为便于比较,此处选取有限元软件 ANSYS R14.0 的仿真结果进行对比. ANSYS 模拟时采用四节点四边形单元,分析网格见图 9,该网格包含 1 248 个节点和 1 152 个单元.

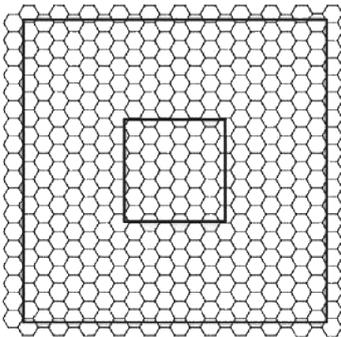


图 7 物理域和数学覆盖系统

Fig. 7 The physical domain and the mathematical cover system

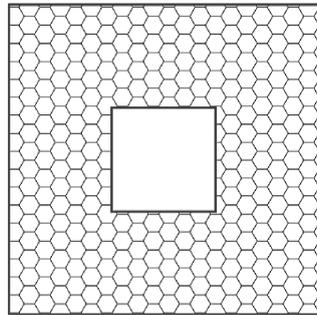


图 8 剖分后的物理域

Fig. 8 The discretized domain

NMM 分析与 ANSYS 模拟的结果均绘于图 10 中,可以看出,本文解与有限元解能很好地匹配。

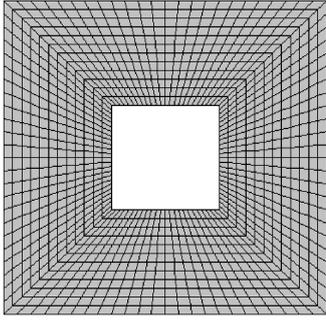


图 9 ANSYS 计算网格

Fig. 9 The finite element mesh by ANSYS

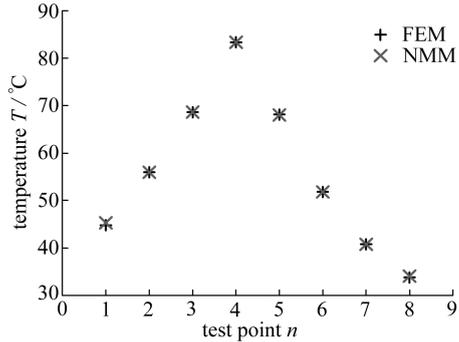


图 10 NMM 与 FEM 仿真得到的考察点温度值

Fig. 10 Temperatures at sample points by the NMM and FEM

5 结 语

本文发展了用于分析二维均质材料稳态热传导问题的多边形数值流形方法.重点阐述了由多边形数学单元组成的数学覆盖的权函数,采用修正变分原理推导了多边形 NMM 求解稳态热传导问题的离散方程,给出了多边形单元上的域积分方法.基于 Wachspress 正六边形数学单元,采用与物理域边界不一致的数学覆盖系统对两个典型热传导算例进行了研究,通过与参考解的对比表明本文发展的多边形 NMM 可以很好地分析均质材料的稳态热传导问题.本文的工作充分展示了 NMM 在物理域离散上的优势,即数学覆盖系统不须与物理域边界一致.此外,正六边形单元的应用也进一步扩充了 NMM 热传导仿真中的数学单元类型.在本工作的基础上,该方法还将进一步拓展应用于求解均质及异质材料的瞬态热传导以及热冲击断裂等问题。

参考文献 (References):

- [1] Li B Y, Sun W W. Numerical analysis of heat and moisture transport with a finite difference method[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2013, **29**(1): 226-250.
- [2] Wang B L, Tian Z H. Application of finite element-finite difference method to the determination of transient temperature field in functionally graded materials[J]. *Finite Elements in Analysis & Design*, 2005, **41**(4): 335-349.
- [3] Aguirre-Ramirez G, Oden J T. Finite element technique applied to heat conduction in solids with temperature dependent thermal conductivity[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, **7**(3): 345-355.
- [4] Adam Fic, Ryszard A B, Alain J K. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method[J]. *Numerical Heat Transfer Fundamentals*, 2005, **48**(2): 103-124.
- [5] 欧贵宝, 费纪生. 解瞬态热传导问题的边界元法[J]. 核动力工程, 1991, **12**(4): 76-80. (OU Gui-bao, FEI Ji-sheng. Boundary element method for solving transient heat conduction[J]. *Nuclear Power Engineering*, 1991, **12**(4): 76-80. (in Chinese))
- [6] Onyango T T M, Ingham D B, Lesnic D. Reconstruction of boundary condition laws in heat conduction using the boundary element method[J]. *Computer & Mathematics With Applica-*

- tions, 2009, **57**(1): 153-168.
- [7] Cheng C Z, Han Z L, Zhou H L, et al. Analysis of the temperature field in anisotropic coating-structures by the boundary element method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2015, **60**(1): 115-122.
- [8] Liu Y, Zhang X, Lu M W. Meshless least-squares method for solving the steady-state heat conduction equation[J]. *Journal of Tsinghua University Science and Technology*, 2005, **10**(1): 61-66.
- [9] Wang H, Qin Q H, Kang Y L. A new meshless method for steady-state heat conduction problems in anisotropic and inhomogeneous media[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, **74**(8): 563-579.
- [10] 王冰冰, 高欣, 段庆林. 稳态热传导的二阶一致无网格法[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(7): 750-755. (WANG Bing-bing, GAO Xin, DUAN Qing-lin. Quadratically consistent meshfree methods for heat conduction in steady state[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(7): 750-755. (in Chinese))
- [11] Merle R, Dolbow J. Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method[J]. *Computational Mechanics*, 2002, **28**(5): 339-350.
- [12] Liu G W, Hu Y, Li Q B, et al. XFEM for thermal crack of massive concrete[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, **2013**(12): 261-294.
- [13] Liu J T, Gu S T, Monteiro E, et al. A versatile interface model for thermal conduction phenomena and its numerical implementation by XFEM[J]. *Computational Mechanics*, 2014, **53**(4): 825-843.
- [14] Stapor P. The XFEM for nonlinear thermal and phase change problems[J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2015, **25**(2): 400-421.
- [15] Shi G H. Manifold method of material analysis[C]//*Transaction of 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing*. 1991: 57-76.
- [16] 魏高峰, 冯伟. 热传导问题的非协调数值流形方法[J]. 力学季刊, 2005, **26**(3): 451-454. (WEI Gao-feng, FENG Wei. Incompatible numerical manifold method based on heat exchange problem[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, **26**(3): 451-454. (in Chinese))
- [17] 林绍忠, 明峥嵘, 祁勇峰. 用数值流形法分析温度场及温度应力[J]. 长江科学院院报, 2007, **24**(5): 72-75. (LIN Shao-zhong, MING Zheng-rong, QI Yong-feng. Thermal field and thermal stress analysis based on numerical manifold method[J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute*, 2007, **24**(5): 72-75. (in Chinese))
- [18] 明峥嵘. 数值流形法在大体积混凝土结构温度应力仿真计算中的应用研究[D]. 硕士学位论文. 武汉: 长江科学院, 2007. (MING Zheng-rong. Research on the application of numerical manifold method in thermal stress simulation of mass concrete structures[D]. Master Thesis. Wuhan: The Yangtze River Academy of Sciences, 2007. (in Chinese))
- [19] 刘泉声, 刘学伟. 裂隙岩体温度场数值流形方法初步研究[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(4): 635-642. (LIU Quan-sheng, LIU Xue-wei. Preliminary research on numerical manifold method for temperature field of fractured rock mass[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(4): 635-642. (in Chinese))
- [20] 刘学伟, 刘泉声, 黄诗冰, 等. 裂隙岩体温度-渗流耦合数值流形方法[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2013, **45**(2): 77-83. (LIU Xue-wei, LIU Quan-sheng, HUANG Shi-bing, et al. Study

- on numerical manifold method of coupled thermo-hydraulic of fractured rock masses[J]. *Journal of Sichuan University(Engineering Science)*, 2013, **45**(2): 77-83.(in Chinese)
- [21] 刘学伟, 刘泉声, 卢超波, 等. 温度-应力耦合作用下岩体裂隙扩展的数值流形方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(7): 1432-1441.(LIU Xue-wei, LIU Quan-sheng, LU Chao-bo, et al. A numerical manifold method for fracture propagation of rock mass considering thermo-mechanical coupling[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics & Engineering*, 2014, **33**(7): 1432-1441.(in Chinese))
- [22] Zhang H H, Ma G W, Ren F. Implementation of the numerical manifold method for thermo-mechanical fracture of planar solids[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2014, **44**(1): 45-54.
- [23] 李义. 基于独立覆盖数值流形法的大体积混凝土温度场仿真计算[D]. 硕士学位论文. 武汉: 长江科学院, 2015.(LI Yi. Simulation of mass concrete temperature field based on the numerical manifold method with independent cover[D]. Master Thesis. Wuhan: The Yangtze River Academy of Sciences, 2015.(in Chinese))
- [24] 王兆清. 有理单元法研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2004.(WANG Zhao-qing. Study on rational element method[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai University, 2004.(in Chinese))
- [25] Sukumar N, Tabarraei A. Conforming polygonal finite elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **61**(12): 2045-2066.
- [26] Tabarraei A, Sukumar N. Extended finite element method on polygonal and quadtree meshes[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2008, **197**(5): 425-438.
- [27] 张慧华, 严家祥. 基于蜂窝数值流形元的静弹性力学问题求解[J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2011, **25**(4): 1-8.(ZHANG Hui-hua, YAN Jia-xiang. Investigation of elastostatic problems by the numerical manifold method on honeycomb elements[J]. *Journal of Nanchang Hangkong University (Natural Science Edition)*, 2011, **25**(4): 1-8.(in Chinese))
- [28] Zhang H H, Zhang S Q. Extract of stress intensity factors on honeycomb elements by the numerical manifold method[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, **59**(10): 55-65.
- [29] 张慧华, 祝晶晶. 复杂裂纹问题的多边形数值流形方法研究[J]. 固体力学学报, 2013, **34**(1): 38-46.(ZHANG Hui-hua, ZHU Jing-jing. Numerical manifold analysis of complex crack problems on polygonal elements[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2013, **34**(1): 38-46.(in Chinese))
- [30] Zhang H H, Chen Y L, Li L X, et al. Accuracy comparison of rectangular and triangular mathematical elements in the numerical manifold method[C]//*Proceeding of the 9th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation*. 2010: 297-303.
- [31] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.(WANG Xu-cheng. *Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.(in Chinese))
- [32] Wachspress E L. *A Rational Finite Element Basis*[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [33] 余天堂, 万林林. 非均质材料热传导问题的扩展有限元法[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(6): 884-890.(YU Tian-tang, WAN Lin-lin. Extended finite element method for heat transfer problems in heterogeneous material[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(6): 884-890.(in Chinese))
- [34] Liu Y, Zhang X, Lu M W. A meshless method based on least-squares approach for steady and

unsteady state heat conduction problems[J]. *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, 2007, **47**(3): 257-275.

- [35] Moaveni S. *Finite Element Analysis Theory and Application With ANSYS*[M]. 3rd ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007.

2D Steady Heat Conduction Analysis With the Regular Hexagon Numerical Manifold Method

TAN Yu-xin, ZHANG Hui-hua, HU Guo-dong

(College of Civil Engineering and Architecture, Nanchang Hangkong University,
Nanchang 330063, P.R. China)

Abstract: The polygonal numerical manifold method (NMM) was developed to analyze two-dimensional (2D) steady heat conduction problems. Based on the governing equation, the boundary conditions and the NMM temperature approximation, the discrete NMM equations were deduced according to the modified variational principle. The domain integration schemes on the polygonal elements were presented. Due to the independence between the mathematical cover system and the physical domain and in virtue of the accuracy advantage of regular polygonal elements, the Wachspress regular hexagon mathematical elements were adopted in 2 typical examples, and the computed temperatures agreed well with the referential ones. The study shows that the regular hexagon NMM can well tackle 2D heat conduction problems.

Key words: numerical manifold method; polygonal element; steady heat conduction; temperature; 2D; regular hexagon

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11462014)

引用本文/Cite this paper:

谭育新, 张慧华, 胡国栋. 二维稳态热传导问题的正六边形流形元研究[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(5): 594-604.

TAN Yu-xin, ZHANG Hui-hua, HU Guo-dong. 2D steady heat conduction analysis with the regular hexagon numerical manifold method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 594-604.