

# 超音速后掠椭圆柱横流定常涡的不稳定特性及转捩预测\*

杨志洋, 赵磊, 罗纪生

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委罗纪生来稿)

**摘要:** 实验发现,一定条件下超声速后掠圆柱的前半圆上可能发生定常涡引起的转捩。为了模拟高空超音速飞行器后掠翼前缘,以无限展向长度后掠椭圆柱为模型,基于  $e^N$  方法,根据积分的  $N$  值,分析了迎风轴长度、Reynolds (雷诺)数、后掠角和 Mach (马赫)数等参数的变化对超音速后掠椭圆柱横流定常涡不稳定性的影响。研究结果表明,后掠椭圆柱的迎风轴长度增加,会使横流定常涡的不稳定性增强;Reynolds 数增大,使横流定常涡模态的不稳定性增强;不稳定性的强度与 Reynolds 数的大小为近似线性关系;飞行高度增加,Mach 数变大,使横流定常涡的不稳定性变弱;后掠角在一定范围内的变化对横流定常涡的不稳定性影响不大。这些结果有助于提高对高空超音速飞行器翼前缘转捩机理的认识,为横流转捩预测提供理论指导。

**关键词:** 后掠椭圆柱; 横流定常涡; 流动稳定性理论;  $e^N$  方法; 数值模拟

**中图分类号:** O354.3; V224+.3 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370303

## 引言

一般三维边界层中包含 4 类失稳机制:流向(T-S波)失稳、横流失稳、曲率引起的 Görtler 涡失稳、前缘附着线失稳。后掠机翼的转捩主要由横流失稳引起,由于横流不稳定性的特殊性,对其的研究成为了边界层转捩预测研究的重要内容之一。

人们已经对三维边界层横流不稳定性做过众多的研究<sup>[1-6]</sup>,Reed 等<sup>[7]</sup>、Malik 等<sup>[8]</sup>和 Saric 等<sup>[9]</sup>通过综述文章对研究结果进行了概述;在国内,徐国亮等<sup>[10]</sup>也对横流不稳定性进行过概述。研究发现,后掠翼前缘边界层转捩通常是横流不稳定性引起的,横流失稳能引起定常涡与行进波两种模态。如果来流湍流度较大,横流边界层的转捩可能由行进波引起,其初始扰动来自外界扰动;如果来流中扰动较小,转捩一般是由定常涡引起的,其初始扰动来自物体壁面的粗糙度。在实际飞行条件下,来流的扰动较低,因此定常涡受到了更多的关注。

2004 年,Archambaud 等<sup>[11]</sup>给出了来流 Mach 数为 3、不同 Reynolds 数和不同后掠角条件

\* 收稿日期: 2016-10-09; 修订日期: 2016-11-04

基金项目: 国家自然科学基金(重点项目)(11332007)

作者简介: 杨志洋(1993—),男,硕士生(E-mail: y799796151@163.com);

赵磊(1987—),男,博士生(E-mail: zhaolei\_tju@163.com);

罗纪生(1954—2017),男,教授,博士生导师(通讯作者, E-mail: jsluo@tju.edu.cn)。

下,平板、圆柱、尖前缘翼和钝前缘翼的转捩实验结果,给出了转捩位置处定常涡和行进波所能达到的  $N$  值变化范围,Balakumar 等<sup>[12]</sup>对 Archambaud 等<sup>[11]</sup>的实验工况进行了计算研究.他们的研究结果都表明,对于适当的 Reynolds 数,在后掠圆柱的前半圆上就会发生横流转捩.这个结果很重要,因为一般超声速飞行器如果有后掠翼,则后掠翼的前缘近似为后掠圆柱,在一定条件下可能在后掠翼的前缘就发生转捩.对于转捩预测来说,必须认识这类横流引起转捩的机理,预测这类转捩的发生,回答是否可以通过改变形状抑制转捩的发生.

本文在 Archambaud 等<sup>[11]</sup>实验中后掠圆柱工况相同来流条件下,以及飞行高度 20, 25, 30 km,相对应的来流 Mach 数 4, 6, 8 的条件下,采用基于线性稳定性的  $e^N$  方法<sup>[13-14]</sup>研究了不同半径、不同迎风轴/竖直轴长度比、不同后掠角对超音速后掠椭圆圆柱的横流定常涡不稳定性的影响,给出了各因素的影响规律.

本文还采用数值模拟的方法,研究了有限幅值扰动的演化特性.采用了线性稳定性理论、线性抛物化稳定性方程和非线性抛物化稳定性方程对扰动波沿流向的演化情况进行了预测,并与数值模拟的结果进行对比,给出扰动满足线性规律的幅值条件、扰动非线性演化的规律、以及扰动幅值达到第一峰值时可能得到的幅值.

## 1 计算方法及验证

### 1.1 基本流的计算方法

研究的模型为无限展长的后掠椭圆圆柱,坐标系选取如图 1.

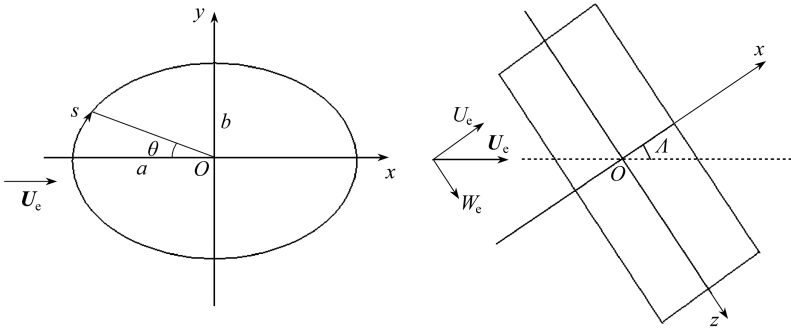


图 1 后掠椭圆圆柱示意图

Fig. 1 Schematic of the swept elliptic cylinder

椭圆的两个轴,迎风轴称为  $a$  轴,竖直轴称为  $b$  轴,其长度分别用  $a, b$  表示.取轴  $a$  正方向为  $x$  方向,轴  $b$  正方向为  $y$  方向,展向正向为  $z$  方向,椭圆上任意一点与前缘点夹角记为  $\theta$ ,到前缘点的弧长记为  $s^*$ ,  $\theta = 90^\circ$  时的弧长记为  $s_0^*$ ,为了比较方便,记归一的弧长  $s = s^*/s_0^*$ .来流方向在  $x, z$  平面内,可以写为:  $\mathbf{U}_e = (U_e, 0, W_e)$ ,与  $x$  轴的夹角为  $\Lambda$ ,称为后掠角,有  $\tan \Lambda = W_e/U_e$ .

基本方程为 Navier-Stokes 方程,用  $b$  轴长度、来流速度  $U_\infty^*$ 、密度  $\rho_\infty^*$ 、温度  $T_\infty^*$  作为特征参量对方程进行无量纲化,单位 Reynolds 数的定义为:  $Re_u = \rho_\infty^* U_\infty^* / \mu_\infty$ ,用竖直轴长度定义 Reynolds 数为:  $Re = \rho_\infty^* U_\infty^* b / \mu_\infty$ .

本文采用通量分裂格式,对流项采用五阶迎风格式,黏性项采用六阶中心差分格式,时间项采用两步两阶有 TVD 特性的 Runge-Kutta 格式.

计算基本流场时的边界条件为:对称轴处采用对称边界条件,出口采用外推,壁面为无滑移及等温条件.采用变间距网格划分,在激波附近加密了网格.圆柱工况的网格分布如图 2 所示,沿流向分布 600 个网格,沿法向分布 300 个网格.

### 1.2 扰动演化的预测方法

利用线性稳定性理论,预测扰动的演化.将流场中的物理量沿弧长  $s$  和展向  $z$  写成基本流与小扰动行进波的形式:

$$q = q_0 + \hat{q}(\eta) e^{i(\alpha s + \beta z - \omega t)} + c.c.,$$

其中,  $\eta$  为壁面的法向坐标,  $q_0$  为基本流,  $\hat{q}$  为扰动沿壁面法向的分布,  $c.c.$  为共轭项.将上式代入到线性化的小扰动方程中,可以得到关于  $\alpha, \beta$  和  $\omega$  的特征值问题.采用空间模式,流向波数为复数,记为  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ , 扰动的增长率为  $-\alpha_i$ .给定不同的  $\omega, \beta$ , 根据特征值问题,可以求得特征值  $\alpha$ .沿流向积分增长率,可得扰动波幅值相对增长的  $N$  值,即

$$A = A_0 e^N, \quad N = \int_{s_0}^s -\alpha_i ds,$$

其中  $s_0$  为扰动开始增长的位置.根据  $e^N$  方法,由  $N$  值和转捩判据  $N_T$  可以预测转捩发生的位置.

为了与 Archambaud 等<sup>[11]</sup>的结果进行比较,根据其实验条件,本文对后掠圆柱进行了稳定性分析.图 3 给出了结果,同时给出了 Balakumar 等<sup>[12]</sup>按 Archambaud 等<sup>[11]</sup>的实验条件给出的分析结果,二者吻合很好,表明本文采用的网格划分合理,基本流和稳定性分析计算正确可靠.

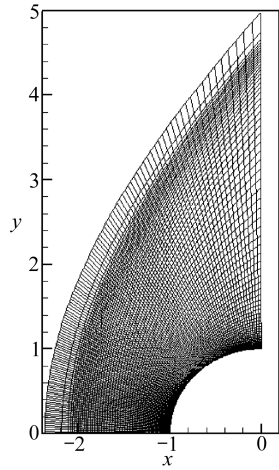


图 2 基本流场计算网格

Fig. 2 The grid for the basic flow field

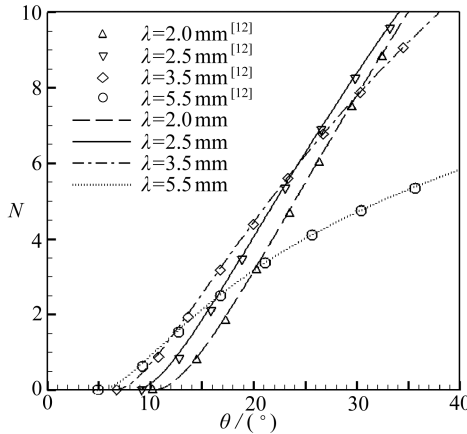


图 3  $N$  值分布及与 Balakumar 等<sup>[12]</sup>结果的比较

Fig. 3 The  $N$ -factor distributions and the comparisons with the results by Balakumar et al.<sup>[12]</sup>

## 2 稳定性分析

为了比较,本文采用了 Archambaud 等<sup>[11]</sup>的实验条件(以下记为 A2004)和不同飞行高度、对应不同来流 Mach 数条件作为计算工况,分别对不同迎风轴与竖直轴比、后掠角、Reynolds 数的椭圆柱进行了稳定性分析及转捩预测,以期了解后掠椭圆柱横流定常涡引起转捩的可能性.表 1 给出了本文各计算工况的来流参数.

为了方便,下文中也称 A2004 为实验来流参数条件,称其他条件为飞行来流参数条件.

表 1 来流条件参数  
Table 1 Free stream parameters

$H/\text{km}$	$Ma_\infty$	$Re_u/\text{m}^{-1}$	$T_\infty/\text{K}$	$T_w/\text{K}$
A2004	3.0	$2.83 \times 10^7$	121.42	300
20	4.0	$7.38 \times 10^6$	216.7	300
25	6.0	$4.96 \times 10^6$	221.5	300
30	8.0	$3.01 \times 10^6$	226.5	300

2.1 圆柱的结果

本文首先对圆柱进行了稳定性分析,图 4 给出了在 A2004 条件下,后掠角  $\Lambda = 50^\circ$ 、圆柱半径  $b = 30 \text{ mm}$ 、相应 Reynolds 数  $Re = 2.21 \times 10^5$  所得到的结果.结果表明,展向波长  $\lambda$  影响定常涡增长的起始位置、增长率及  $N$  值曲线.展向波长  $\lambda$  变大,定常涡开始增长的位置向前缘靠近,在  $s = 1.0$  计算域出口的位置,  $N$  值先增大后减小,存在最大值.由于增长区在接近计算域尾部时沿流向逐渐减小,某些波长的定常涡会进入衰减区,其  $N$  值积分曲线在计算域出口附近出现下降,如图 4 中  $\lambda = 1.0 \text{ mm}$  的定常涡.

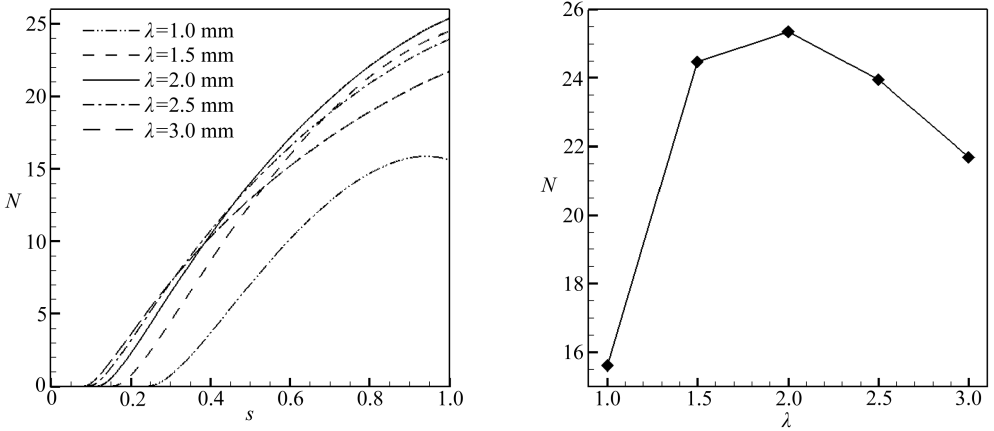
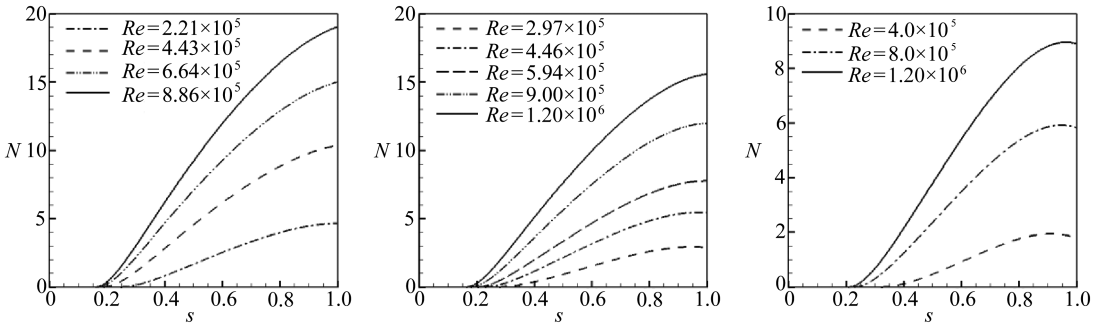


图 4 不同展向波长  $\lambda$  定常涡模式的  $N$  值积分曲线和  $s = 1.0$  处的  $N$  值

Fig. 4 The  $N$ -factor curves and  $N$ -factors at  $s = 1.0$  of stationary crossflow vortices with different spanwise wavelengths  $\lambda$



(a)  $H = 20 \text{ km}$ ,  $Ma_\infty = 4$ ,  $\Lambda = 55^\circ$     (b)  $H = 25 \text{ km}$ ,  $Ma_\infty = 6$ ,  $\Lambda = 55^\circ$     (c)  $H = 30 \text{ km}$ ,  $Ma_\infty = 8$ ,  $\Lambda = 55^\circ$

图 5 圆柱最不稳定的  $N$  值曲线随  $Re$  的变化

Fig. 5 The changes of the most unstable  $N$ -factor curves of cylinders along with Reynolds numbers

为了比较方便,将  $s = 1.0$  处  $N$  值最大的模态称为该工况的最不稳定模态,其展向波长  $\lambda$  为最不稳定的展向波长,  $N$  值曲线为最不稳定的  $N$  值曲线.

对于飞行来流参数工况且后掠角  $\Lambda = 55^\circ$ ，计算了不同半径圆柱对应不同 Reynolds 数的最不稳定  $N$  值曲线。图 5 给出了典型 Reynolds 数的结果，对于  $H = 20 \text{ km}$ ， $b = 30 \sim 120 \text{ mm}$ ，Reynolds 数  $Re$  的变化范围为  $2.21 \times 10^5 \sim 8.86 \times 10^5$ ；对于  $H = 25 \text{ km}$ ， $b = 60 \sim 240 \text{ mm}$ ，Reynolds 数  $Re$  变化范围约为  $2.97 \times 10^5 \sim 1.20 \times 10^6$ ；对于  $H = 30 \text{ km}$ ， $b = 130 \sim 400 \text{ mm}$ ， $Re$  变化范围约为  $4.00 \times 10^5 \sim 1.20 \times 10^6$ 。从计算结果可以看出，对于给定的  $Ma_\infty$  和  $\Lambda$ ，随 Reynolds 数增大，最不稳定性展向波长变长，定常涡开始增长的位置前移，由于积分起始位置前移和圆柱半径变化导致的积分路径变长，最不稳定的  $N$  值曲线的数值变大， $s = 1.0$  处的最不稳定性  $N$  值也变大。

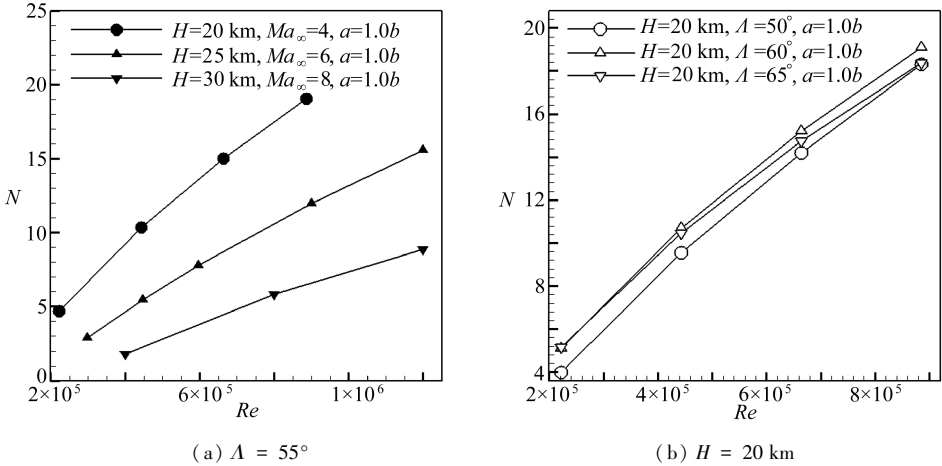


图 6 圆柱出口最大  $N$  值随 Reynolds 数的变化

Fig. 6 The changes of the maximum  $N$ -factors at  $s = 1.0$  of cylinders along with Reynolds numbers

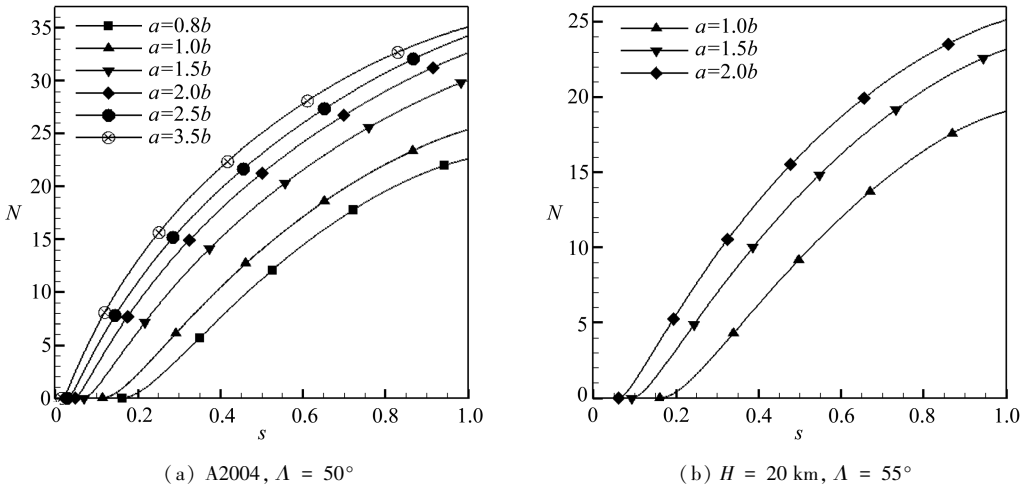


图 7 不同迎风轴长度的最不稳定性  $N$  值曲线

Fig. 7 The most unstable  $N$ -factor curves of elliptic cylinders with different upwind axis lengths

将最不稳定性  $N$  值曲线在  $s = 1.0$  处的值称为出口最大  $N$  值，图 6 给出了不同工况下出口最大  $N$  值随 Reynolds 数的变化。从图 6(a) 可以看出，对于给定的 Mach 数和后掠角，出口最大  $N$  值随 Reynolds 数基本呈线性变化，直线的斜率与纵截距都随 Mach 数的变大而减小，其中直线的斜率表征了在不同 Mach 数下，出口最大  $N$  值随 Reynolds 数变化的快慢，反映了定常涡的横流不稳定性对 Reynolds 数变化的敏感程度。而直线的纵截距则由扰动增长起始位置和来流条件等因素影响。从图 6(b) 可以看出，给定 Reynolds 数，后掠角在一定范围内变化，对出口最大

$N$  值的影响不大。

### 2.2 椭圆柱的结果

改变迎风轴长度  $a$ ，可以分析不同后掠椭圆柱对横流定常涡稳定特性的影响。在 A2004 条件下，固定竖直轴长度  $b = 30 \text{ mm}$  及后掠角  $\Lambda = 50^\circ$ ，图 7(a) 给出了不同迎风轴长度的最不稳定的  $N$  值曲线。可以看出，随着迎风轴长度  $a$  增加，最不稳定的  $N$  值增大，扰动增长的起始位置也逐渐前移，迎风轴长度越长越容易转捩。图 7(b) 给出了  $H = 20 \text{ km}$ 、后掠角  $\Lambda = 55^\circ$  的结果，结果与 A2004 条件下的变化趋势相同。

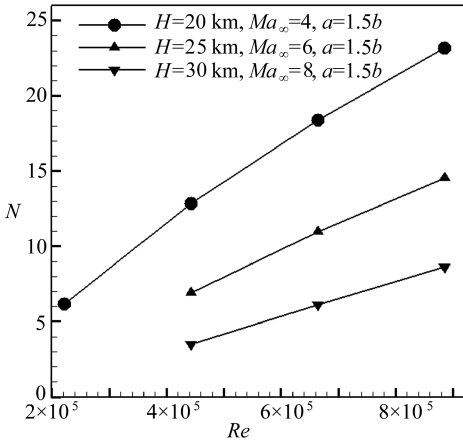


图 8 不同飞行条件下椭圆柱的最大出口  $N$  值随 Reynolds 数的变化 ( $\Lambda = 55^\circ$ )

Fig. 8 The changes of the maximum  $N$ -factors at  $s = 1.0$  of elliptic cylinders along with Reynolds numbers ( $\Lambda = 55^\circ$ )

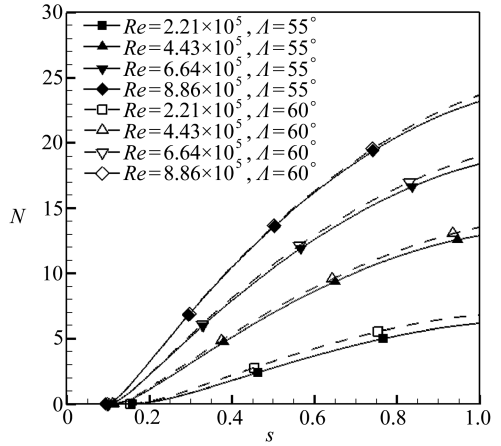


图 9 不同后掠角、Reynolds 数下椭圆柱的最不稳定  $N$  值曲线 ( $Ma_\infty = 4, H = 20 \text{ km}, a = 1.5b$ )

Fig. 9 The most unstable  $N$ -factor curves of elliptic cylinders with different swept angles and Reynolds numbers ( $Ma_\infty = 4, H = 20 \text{ km}, a = 1.5b$ )

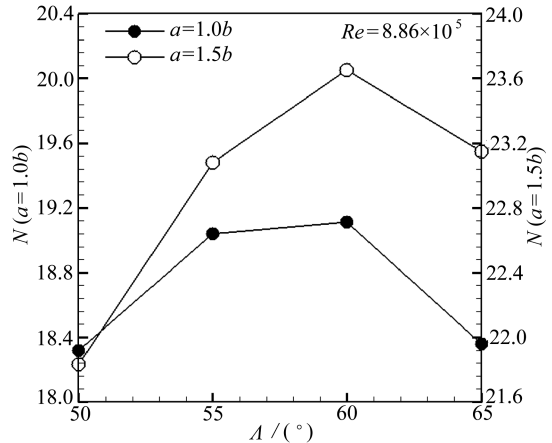
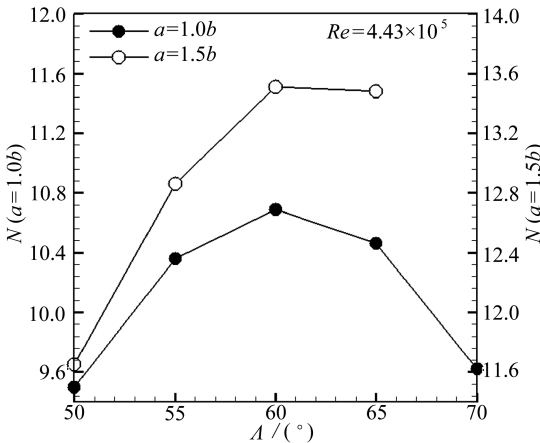


图 10  $H = 20 \text{ km}$  出口最大  $N$  值随后掠角的变化

Fig. 10 The changes of the maximum  $N$ -factors at  $s = 1.0$  of cylinders and elliptic cylinders along with swept angles for  $H = 20 \text{ km}$

图 8 给出了后掠角  $\Lambda = 55^\circ, a = 1.5b$  不同飞行来流参数条件下，椭圆柱出口最大  $N$  值随 Reynolds 数的变化。可以看出，对于椭圆柱出口最大  $N$  值随 Reynolds 数的变化依然基本呈线性变化，直线的斜率与纵截距都随 Mach 数的变大而减小，其变化规律与圆柱类似，变化的程度

比圆柱的大。

图 9 给出了  $H = 20 \text{ km}$ ,  $a = 1.5b$  条件下, 改变后掠角的分析结果。可以看到, 后掠角的改变对最不稳定  $N$  值曲线的影响不大。

图 10 给出了  $H = 20 \text{ km}$  条件下, 不同 Reynolds 数、圆柱及  $a = 1.5b$  椭圆柱的出口最大  $N$  值随后掠角的变化。可以看到, 在一定范围内改变后掠角, 出口最大  $N$  值先随着后掠角增大而增大, 达到极大值之后再逐渐减小, 近似为二次曲线。出口最大  $N$  值的极大值所对应的后掠角基本在  $60^\circ$  左右。

### 3 后掠圆柱有限扰动的演化

为了解后掠圆柱中有限幅值横流定常涡的演化特征, 本文用直接数值模拟方法 (DNS) 研究了有限幅值扰动的非线性演化特征, 同时用线性稳定性理论 (LST)、线性抛物化稳定性方程 (LPSE) 和非线性抛物化稳定性方程 (NPSE) 对扰动的演化进行预测。分析的来流参数为飞行高度为  $20 \text{ km}$ 、来流 Mach 数为 4、后掠角为  $55^\circ$ 、 $b = 120 \text{ mm}$ , 对应的 Reynolds 数为  $8.86 \times 10^5$ 。加入小扰动波的展向波长采用最不稳定横流定常涡模式,  $\lambda = 8.0 \text{ mm}$ , 加入的位置为线性稳定性分析得到的扰动开始增长的位置  $s_0$ , 该工况下  $s_0 \approx 0.18$ 。加入不同的初始幅值  $A_0$ , 研究扰动沿流向的演化。

图 11(a) 给出了初始幅值  $A_0$  为  $5 \times 10^{-8}$ , DNS 得到的幅值沿流向的演化。可以看到, 由于扰动的增长率很大, 在  $s = 0.72$  附近, 幅值已经接近 0.1, 非线性作用开始明显; 之后横流涡会经历一个非线性演化过程<sup>[15]</sup>, 在  $s = 0.77$  附近, 幅值达到第一峰值, 为 0.13; 之后, 幅值略有下降, 然后继续增长, 在  $s = 0.85$  附近, 达到第二峰值, 幅值超过 0.2。

图 11(a) 同时给出了 LST 及 LPSE 的结果。从 LST 和 LPSE 的预测结果看, 在幅值小于 0.07 时, 3 者符合很好, 这表明边界层的非平行性对扰动幅值演化结果影响很小, 用 LST 就能够很好地预测扰动幅值的线性演化。当扰动幅值大于 0.07, 非线性作用开始明显。

图 11(b) 给出了初始幅值  $A_0$  为  $5 \times 10^{-7}$  的结果, 幅值的演化规律与初始幅值  $A_0 = 5 \times 10^{-8}$  的类似, 幅值演化出现两个峰值, 幅值小于 0.07 时, 扰动演化为线性演化。

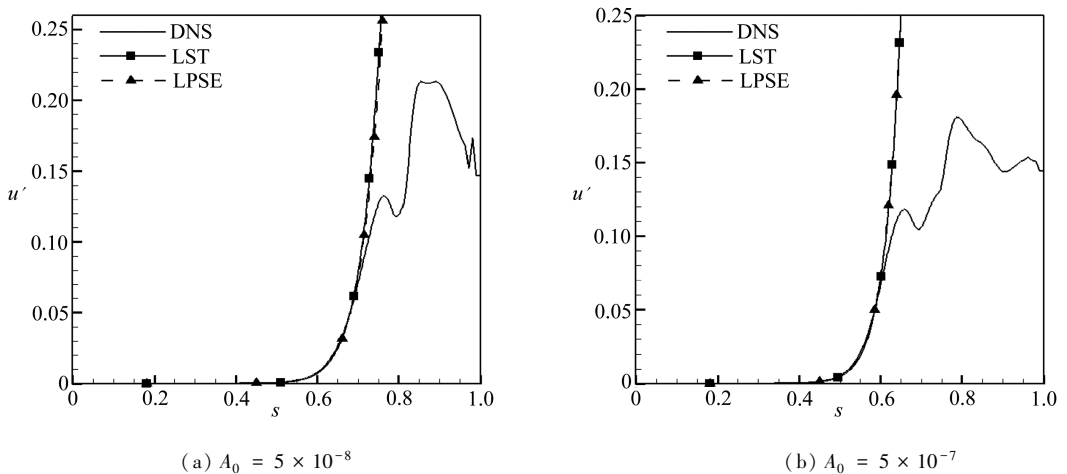


图 11 DNS 幅值演化曲线及与 LST 和 LPSE 一次谐波的比较

Fig. 11 The amplitude evolution curves obtained from DNS and the comparisons with LST and LPSE's 1st-order harmonics

图 12 给出了不同初始幅值由 NPSE 得到的 0 至 3 次谐波的幅值演化, 并与 DNS 的结果进

行了比较.在 NPSE 能计算的范围内,各次谐波都符合得很好.因此,可以利用 NPSE 代替 DNS,研究有限幅值扰动的非线性演化情况.

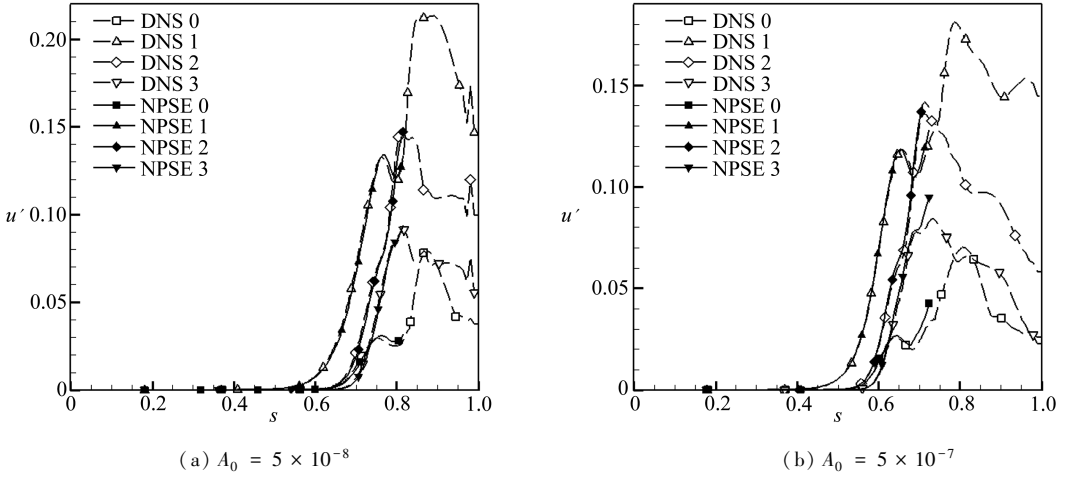


图 12 NPSE 得到的高次谐波幅值演化曲线与 DNS 的比较

Fig. 12 Comparisons between the amplitude evolution curves of high-order harmonics obtained from DNS and NPSE

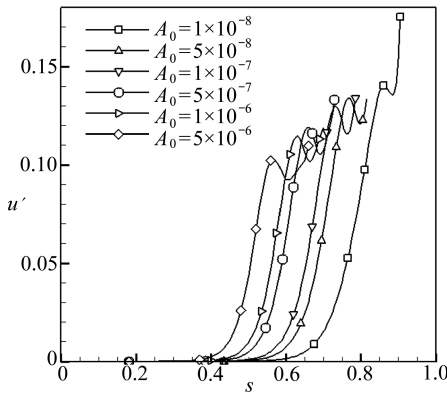


图 13 NPSE 得到的不同初始幅值  $A_0$  扰动的一次谐波幅值演化

Fig. 13 The amplitude evolution curves of the 1st-order harmonics with different initial amplitudes  $A_0$  obtained from NPSE

利用 NPSE 研究了初始幅值  $A_0$  从  $1 \times 10^{-8}$  到  $1 \times 10^{-6}$  的扰动沿流向的演化,图 13 给出了计算结果.各初始幅值的扰动沿流向逐渐增大,都会先达到一个峰值,然后经过一段微小的衰减,再次快速增长.随着初始幅值的增加,峰值位置逐渐向上游移动,从  $s = 0.8$  移动到  $s = 0.5$ ,峰值的大小逐渐减小,从 0.13 变为 0.1 左右.

根据研究经验,当幅值达到 0.1 量级时,可能发生二次失稳,产生横流转捩.根据 DNS 的结果,在经过峰值后,非线性作用更强,幅值的变化迅速,流动变得混乱.初始扰动的幅值越大,扰动幅值得到峰值的位置越靠上游,转捩也就越靠上游.

### 4 结 论

本文基于  $e^N$  方法,以沿流向对增长率积分得到的  $N$  值为判别标准,较系统地研究了在 Archambaud 等<sup>[11]</sup>实验中圆柱工况相同的来流参数下,以及飞行高度 20, 25, 30 km, 对应飞行 Mach 数 4, 6, 8 的条件下,竖直轴长度、迎风轴长度、后掠角等参数对后掠椭圆柱横流定常涡不



稳定性的影响,所得结论如下:

1) 迎风轴长度增加会导致后掠椭圆柱横流定常涡的不稳定性增强。

2) 竖直轴长度增加,导致 Reynolds 数增大,横流定常涡的不稳定性增强,最大增长的  $N$  值与 Reynolds 数呈近似线性关系。

3) 飞行高度增加,相应的 Mach 数变大时,横流定常涡的不稳定性变弱。

4) 在一定范围内,后掠角对横流定常涡不稳定性的影响,相对于 Reynolds 数和 Mach 数要小得多,其变化近似为二次曲线。

本文还用数值模拟的方法研究了有限幅值扰动的演化,发现在扰动幅值小于 0.07 前,演化基本符合线性演化,之后非线性作用明显,用 LST, LPSE 可以预测线性演化,幅值达到的第一峰值约为 0.1~0.13 左右,用 NPSE 可以预测扰动幅值的第一峰值;之后,幅值略有下降,然后继续增长,达到第二峰值,幅值可以超过 0.2。

### 参考文献(References):

- [1] Bippes H. Basic experiments on transition in three-dimensional boundary layers dominated by crossflow instability[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 1999, **35**(4): 363-412.
- [2] Bippes H, Nitschke-Kowsky P. Experimental study of instability modes in a three-dimensional boundary layer[J]. *AIAA Journal*, 1990, **28**(10): 1758-1763.
- [3] Bippes H. Instability features appearing on swept wing configurations[C]//Arnal D, Michel R, ed. *Laminar-Turbulent Transition*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1990: 419-430.
- [4] Deyhle H, Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, **316**: 73-113.
- [5] Saric W S, Yeates L G. Experiments on the stability of crossflow vortices in swept-wing flows [C]//*23rd Aerospace Sciences Meeting*. Reno, NV, 1985.
- [6] Mach L M. On the stability of the boundary layer on transonic swept wing[C]//*17th Aerospace Sciences Meeting*. New Orleans, LA, 1979.
- [7] Reed H L, Saric W S, Arnal D. Linear stability theory applied to boundary layers[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2003, **28**(1): 389-428.
- [8] Malik M R, Hampton V A. Boundary-layer transition prediction toolkit[C]//*28th Fluid Dynamics Conference, Fluid Dynamics and Co-Located Conferences*. Snowmass Village, CO, 1998.
- [9] Saric W S, Reed H L, White E B. Stability and transition of three-dimensional boundary layers [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2003, **35**(1): 413-440.
- [10] 徐国亮, 符松. 可压缩横流失稳及其控制[J]. *力学进展*, 2012, **42**(3): 262-273. (XU Guo-liang, FU Song. The instability and control of compressible cross flows[J]. *Advances in Mechanics*, 2012, **42**(3): 262-273. (in Chinese))
- [11] Archambaud J P, Louis F, Séraudie A, et al. Natural transition in supersonic flows: flat plate, swept cylinder, swept wing[C]//*34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Fluid Dynamics and Co-Located Conferences*. Portland, Oregon: AIAA 2004-2245.
- [12] Balakumar P, King R A. Receptivity and stability of supersonic swept flows[J]. *AIAA Journal*, 2012, **50**(7): 1476-1489.
- [13] Cebeci T, Stewartson K. On stability and transition in three-dimensional flows[J]. *AIAA Journal*, 1980, **18**(4): 398-405.
- [14] Sousa J M M, Silva L M G. Transition prediction in infinite swept wings using Navier-Stokes

- computations and linear stability theory [J]. *Computers & Structures*, 2004, **82**(17/19): 1551-1560.
- [15] 逯学志, 赵磊, 罗纪生. 后掠翼边界层定常横流涡的非线性演化[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(10): 1073-1084. (LU Xue-zhi, ZHAO Lei, LUO Ji-sheng. Nonlinear evolution of stationary crossflow vortices in swept-wing boundary layers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(10): 1073-1084. (in Chinese))

## Instability and Transition Prediction of Stationary Crossflow Vortices Over Supersonic Swept Elliptic Cylinders

YANG Zhi-yang, ZHAO Lei, LUO Ji-sheng

(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P.R.China*)

(Contributed by LUO Ji-sheng, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Some experiments had shown that stationary crossflow vortices may cause transition over the 1st halves of supersonic swept cylinders. The swept elliptic cylinders with infinite span-wise lengths were used to simulate the swept wings of supersonic aircrafts at high altitudes. Based on the  $e^N$  method and the  $N$ -factor, the influence of changing the parameters including the upwind axis length, the Reynolds number, the swept angle and the Mach number on the instability of the stationary crossflow vortices over supersonic infinite swept elliptic cylinders was studied. The results show that, the instability of stationary crossflow vortices is stronger with longer upwind axes or larger Reynolds numbers. Meanwhile, the relationship between the instability of stationary crossflow vortices and the Reynolds number is almost linear. The results also show that the stationary crossflow vortices are more stable in the conditions with greater Mach numbers. The change of the swept angle in a certain range has a small effect on the instability of stationary crossflow vortices. These results would be helpful to improve the understanding of the transition mechanism over the leading edges of supersonic aircraft wings and provide theoretical guidance for crossflow transition prediction.

**Key words:** swept elliptic cylinder; stationary crossflow vortex; theory of hydrodynamic stability;  $e^N$  method; numerical simulation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (Key Program)  
(11332007)

---

引用本文/Cite this paper:

杨志洋, 赵磊, 罗纪生. 超音速后掠椭圆柱横流定常涡的不稳定特性及转捩预测[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(8): 853-862.

YANG Zhi-yang, ZHAO Lei, LUO Ji-sheng. Instability and transition prediction of stationary crossflow vortices over supersonic swept elliptic cylinders [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 853-862.