

二维黏弹性力学问题的无网格自然单元法*

陈莘莘, 钟 斌

(华东交通大学 土木建筑学院, 南昌 330013)

摘要: 基于无网格自然单元法,建立了求解二维黏弹性力学问题的一条新途径.基于弹性-黏弹性对应原理和 Laplace(拉普拉斯)变换技术,首先将黏弹性问题转换成 Laplace 域内与弹性力学问题相同的形式,然后推导出基于自然单元法分析黏弹性问题的基本公式.作为一种新兴的无网格数值计算方法,自然单元法的实质是一种基于自然邻近插值的 Galerkin(伽辽金)法.相对于其他无网格法,自然单元法的形函数具有插值性和支持域各向异性等特点.算例结果证明了所提分析方法的有效性.

关键词: 无网格法; 自然单元法; 黏弹性; 对应原理; Laplace 变换

中图分类号: O39; TB12 **文献标志码:** A doi: 10.21656/1000-0887.370300

引 言

近代工程中有不少材料,它们的应力-应变关系都与时间有关,这种现象称为黏弹性.黏弹性问题与很多工程实际问题相关,尤其是随着高分子聚合物的广泛应用,黏弹性问题的研究引起了国内外学者的极大关注^[1-4].一般而言,积分变换技术^[5]是处理黏弹性问题的重要数学工具.利用 Laplace 变换,将黏弹性问题转化为一个准弹性问题,进而利用已有的边值问题求解方法求解相应的准弹性问题,再借助积分变换反演数值方法求得时间域的解.因此,如何求解相应的准弹性问题是整个分析过程的关键.由于相关解析解往往不容易得到,求解相应的准弹性问题必须借助各种数值方法^[6-7].

无网格方法^[8-11]是继有限元法之后发展起来的一种重要数值方法,近二十年来发展非常迅速.无网格法基于节点建立逼近或插值函数,可以部分或彻底消除网格,从而能够有效地消除网格存在带来的数值困难,且在节点不规则分布时,不会损失多少计算精度.较晚出现的自然单元法^[12]在众多无网格法中展示了其独特的优点.自然单元法的形函数计算不仅具有不涉及矩阵求逆运算以及计算量较小的优点,而且没有任何人为参数的选择问题,避免了无单元 Galerkin 法^[8]中由于不确定的影响半径造成影响域计算的不确定性.此外,自然单元法的形函数具有插值特性,从而可以方便地施加本质边界条件.因此,自然单元法是一种发展前景广阔的求解力学和其他工程技术中偏微分方程的数值方法^[13-16].

本文将弹性-黏弹性对应原理、Laplace 变换和数值逆变换及自然单元法等相结合,建立了求解二维黏弹性力学问题的自然单元法.利用 Laplace 变换,首先将黏弹性平面问题转化为 La-

* 收稿日期: 2016-09-29; 修订日期: 2016-11-22

基金项目: 国家自然科学基金(11462006;21466012)

作者简介: 陈莘莘(1975—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn).

place 域内的准弹性问题,并通过在计算域内布置一系列的离散节点对准弹性问题采用自然单元法求解,然后采用 Laplace 逆变换 Stehfest 算法^[17]求得原黏弹性问题的解.最后,通过典型算例的计算和对比分析验证了本文方法的有效性和合理性.

1 黏弹性力学问题的控制方程

考虑二维拟静态黏弹性问题,其计算域为 Ω , 边界为 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$, 则平衡方程为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (1)$$

式中 σ_{ij} 为应力, $\sigma_{ij,j}$ 为 σ_{ij} 对 j 求偏导, b_i 为体力矢量, Γ_u 和 Γ_t 分别为位移和面力已知的边界. 应变 ε_{ij} 与位移 u_i, u_j 的几何关系为

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (2)$$

线性黏弹性材料的本构关系可表示为^[3]

$$s_{ij}(t) = 2 \int_0^t \mu(t - \tau) \frac{de_{ij}}{d\tau} d\tau, \quad \sigma_{kk}(t) = 3 \int_0^t K(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}}{d\tau} d\tau, \quad (3)$$

式中, $\mu(t)$ 和 $K(t)$ 分别为材料的剪切松弛函数和体积松弛函数, s_{ij} 和 e_{ij} 分别为应力、应变的偏张量. 应力和位移应满足的边界条件可表示为

$$u_i = \hat{u}_i, \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i, \quad \text{on } \Gamma_t, \quad (5)$$

式中, n_j 为边界单位外法线分量; \hat{u}_i 和 \hat{t}_i 分别为已知的位移和面力分量.

根据 Laplace 变换

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad (6)$$

方程(1)~(5)可变换为

$$\bar{\sigma}_{ij,j}(p) + \bar{b}_i(p) = 0, \quad (7a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(p) = (\bar{u}_{i,j}(p) + \bar{u}_{j,i}(p))/2, \quad (7b)$$

$$\bar{s}_{ij}(p) = 2p\bar{\mu}(p)\bar{e}_{ij}(p), \quad (7c)$$

$$\bar{\sigma}_{kk}(p) = 3p\bar{K}(p)\bar{\varepsilon}_{kk}(p), \quad (7d)$$

$$\bar{u}_i(p) = \hat{u}_i(p), \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (7e)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(p)n_j = \hat{t}_i(p), \quad \text{on } \Gamma_t, \quad (7f)$$

式中, p 为 Laplace 变换的转换参数, $\bar{u}_i, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{\sigma}_{ij}, \dots$ 分别对应为 $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \dots$ 的 Laplace 变换.

2 无网格自然单元法

2.1 自然邻近插值

自然单元法采用自然邻近插值构造函数近似空间. 目前发展的自然邻近插值包括 Sibson 插值和 Laplace 插值. 本文在构造自然单元法形函数时采用 Sibson 自然邻近插值.

考虑二维空间中由 M 个离散节点构成的点集 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$ 描述的封闭区域. 按照 Delaunay 空圆准则, 将区域全自动地 Delaunay 三角网格化, 并根据三角网格化的信息建立求解域 Ω 的 Voronoi 结构. 对于区域 Ω 内任一节点 \mathbf{x}_I , 其 Voronoi 结构可定义为

$$T_I = \{\mathbf{x} \in R^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J), \quad \forall J \neq I\}, \quad (8)$$

式中, $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ 是点 \mathbf{x} 与节点 \mathbf{x}_I 的距离.

为了确定 Sibson 插值形函数,定义二次 Voronoi 结构 T_{IJ} 为

$$T_{IJ} = \{ \mathbf{x} \in R^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_K), \forall J \neq I \neq K \} . \quad (9)$$

从几何上讲, T_{IJ} 实际上是以节点 \mathbf{x}_I 为最近点、节点 \mathbf{x}_J 为次近点的空间点位置的集合.图 1 所示为平面 7 个节点的 Voronoi 结构和待插值点 \mathbf{x} 的二次 Voronoi 结构.

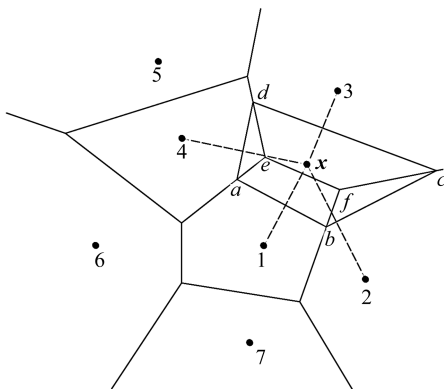


图 1 点 \mathbf{x} 的一次和二次 Voronoi 结构

Fig. 1 The 1st-order and 2nd-order Voronoi cells about \mathbf{x}

构造出插值点 \mathbf{x} 的一次和二次 Voronoi 结构后,插值点 \mathbf{x} 的形函数及其导数可以写为^[13]

$$\phi_I(\mathbf{x}) = A_I(\mathbf{x})/A(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$\phi_{I,j}(\mathbf{x}) = \frac{A_{I,j}(\mathbf{x}) - \phi_I(\mathbf{x})A_{,j}(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})}, \quad (11)$$

式中, $A_I(\mathbf{x})$ 表示插值点 \mathbf{x} 的二次 Voronoi 结构 T_{xI} 的面积, $A(\mathbf{x})$ 表示插值点 \mathbf{x} 的一次 Voronoi 结构 T_x 的面积,即 T_{xI} 的总和.

定义了各节点的插值函数后,点 \mathbf{x} 的位移函数类似于有限元法可写为

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x})u_I, \quad (12)$$

式中, $u_I(I = 1, 2, \dots, n)$ 是点 \mathbf{x} 周围自然邻节点 I 的节点位移, $\phi_I(\mathbf{x})$ 为对应节点的形函数.

2.2 Laplace 域内的离散化方程

利用加权余量法,平衡方程式(7a)及力的边界条件式(7f)的等效积分形式的 Galerkin 法可以表示为

$$\int_{\Omega} \delta \bar{u}_i(p) (\bar{\sigma}_{ij,j}(p) + \bar{b}_i(p)) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \bar{u}_i(p) (\bar{\sigma}_{ij}(p)n_j - \hat{t}_i(p)) d\Gamma = 0. \quad (13)$$

对式(13)进行分部积分,则有

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\epsilon}_{ij}(p) \bar{\sigma}_{ij}(p) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \bar{u}_i(p) \bar{b}_i(p) d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \bar{u}_i(p) \hat{t}_i(p) d\Gamma. \quad (14)$$

为了便于进行数值计算,把上式改写成矩阵形式,有

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\epsilon}^T(p) \bar{\sigma}(p) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T(p) \bar{\mathbf{b}}(p) d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \bar{\mathbf{u}}^T(p) \hat{\mathbf{t}}(p) d\Gamma, \quad (15)$$

式中

$$\bar{\sigma}(p) = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\epsilon}(p) = \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}(p) = \begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}(p) = \begin{Bmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{t}}(p) = \begin{Bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

基于自然邻近插值,任一点 \mathbf{x} 处位移的 Laplace 变换 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, p)$ 可由式(12)表示为

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, p) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_I(p). \quad (17)$$

将式(17)代入式(7b),可求得应变向量的 Laplace 变换 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(p)$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(p) = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \bar{\mathbf{u}}_I(p), \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

再将式(18)代入式(7c)和式(7d),可求得应力向量的 Laplace 变换 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(p)$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(p) = \mathbf{D}(p) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(p) = \mathbf{D}(p) \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \bar{\mathbf{u}}_I(p), \quad (20)$$

式中,对于平面应力问题,弹性矩阵的 Laplace 变换 $\mathbf{D}(p)$ 可表达为

$$\mathbf{D}(p) = \frac{\hat{E}(p)}{1 - \hat{\nu}(p)^2} \begin{bmatrix} 1 & \hat{\nu}(p) & 0 \\ \hat{\nu}(p) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \hat{\nu}(p)}{2} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中

$$\hat{\nu}(p) = \frac{3p\bar{K}(p) - 2p\bar{\mu}(p)}{6p\bar{K}(p) + 2p\bar{\mu}(p)}, \quad (22a)$$

$$\hat{E}(p) = 2p\bar{\mu}(p)(1 + \hat{\nu}(p)). \quad (22b)$$

将式(17)、(18)和(20)代入式(15),并注意到 $\delta \bar{\mathbf{u}}_I(p)$ 的任意性,最终得到 Laplace 域内黏弹性平面问题的控制方程为

$$\mathbf{K}(p) \bar{\mathbf{u}}(p) = \mathbf{f}(p), \quad (23)$$

式中, $\bar{\mathbf{u}}(p)$ 为节点位移向量的 Laplace 变换, $\mathbf{K}(p)$ 和 $\mathbf{f}(p)$ 分别为刚度矩阵和节点载荷列向量,且它们各元素可具体表示为

$$\mathbf{K}_{IJ}(p) = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}(p) \mathbf{B}_J d\Omega, \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_I(p) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}_I \bar{\mathbf{b}}(p) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\Phi}_I \hat{\mathbf{t}}(p) d\Gamma, \quad (25)$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix}. \quad (26)$$

2.3 Laplace 变换的数值反演法

在求得 Laplace 域中的解答后,需要借助数值方法作 Laplace 逆变换.本文采用具有结构简单、不涉及复数运算且简单易行的 Laplace 逆变换 Stehfest 算法^[17].借助这种方法,任何在 Laplace 域中的函数 $\bar{f}(p)$ 都可以变换到时间域 $f(t)$, 其公式如下:

$$f(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \bar{f}\left(\frac{\ln 2}{t} i\right), \quad (27)$$

式中

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=(i+1)/2}^{\min(i,N/2)} \frac{k^{N/2}(2k)!}{(N/2-k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}, \quad (28)$$

其中, N 必须是正偶数. 经过实际运算发现, 当 N 在 14~20 范围内选取, 效果较佳.

3 数值算例

3.1 受均匀拉伸的黏弹性板条

如图 2 所示, 一个长 $L = 3.0 \text{ m}$ 、宽 $w = 1.0 \text{ m}$ 的黏弹性平板条, 在端部受到突加的轴向均布载荷 $P = 2.0 \text{ MPa}$. 计算中黏弹性材料的弹性模量 E 取为

$$E = E_\infty + (E_0 - E_\infty) \exp(-t/t_0), \quad (29)$$

式中

$$E_0 = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}, E_\infty = 1.0 \times 10^{11} \text{ Pa}, t_0 = 1.0 \text{ s}.$$

Poisson(泊松) 比取为 $\nu = 0.0$. 忽略惯性影响, 在拟静态情况下黏弹性板条右端轴向位移的解析解为

$$u = PL \left[\frac{E_\infty - E_0}{E_\infty E_0} \exp\left(-\frac{E_\infty t}{E_0 t_0}\right) + \frac{1}{E_\infty} \right]. \quad (30)$$

均匀布置 21×5 个节点计算得到了图 3 所示的板条右端轴向位移随时间的变化曲线, 从图中可以看出本文的计算结果与解析解吻合很好.

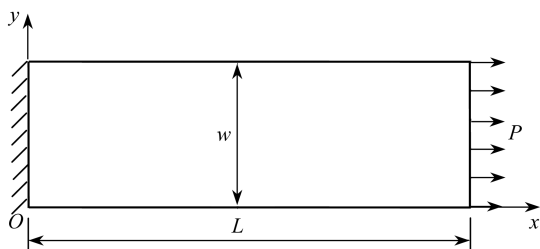


图 2 受均匀拉伸的黏弹性板条

Fig. 2 A viscoelastic strip subjected to a uniform tension

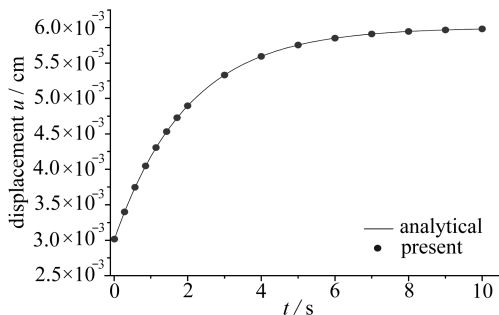


图 3 黏弹性板条右端的轴向位移

Fig. 3 The longitudinal displacement at the right end of the viscoelastic strip

3.2 受内压的黏弹性厚壁圆筒

如图 4 所示, 一内径 $a = 8 \text{ m}$ 、外径 $b = 16 \text{ m}$ 的厚壁圆筒, 其内表面承受突加的均布压力 $P = 1.0 \text{ MPa}$. 设材料呈标准线性固体的剪切与体积变形, 即

$$K(t) = K_0 g(t) = K_0, G(t) = G_0 f(t) = G_0 \left(1 + \frac{G_1}{G_0} \exp(-t/t_0) \right), \quad (31)$$

式中

$$G_0 = 1.20 \times 10^{13} \text{ Pa}, G_1 = 3.60 \times 10^{13} \text{ Pa}, K_0 = 1.280 \times 10^{14} \text{ Pa}, t_0 = 2.5 \text{ s}.$$

该问题为平面应变状态下的一个算例, 取结构的 $1/4$ 进行研究, 共布置 357 个节点, 如图 5 所示. 图 6 给出了厚壁圆筒的径向位移随时间的变化曲线, 从图中可以看出本文的计算结果与文献[18]的解析解吻合很好, 从而进一步说明了本文算法的有效性.

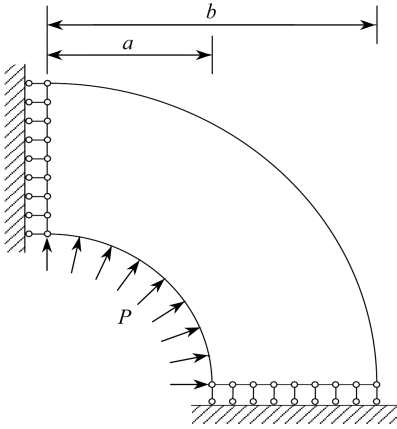


图 4 受内压的黏弹性厚壁圆筒

Fig. 4 A viscoelastic hollow cylinder under internal pressure

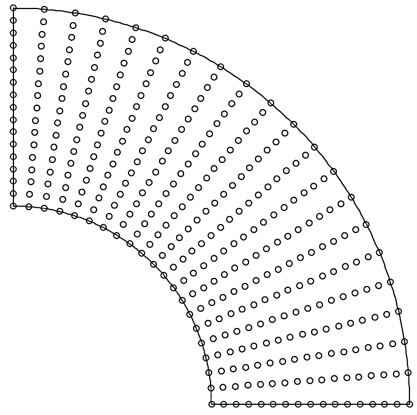


图 5 黏弹性厚壁圆筒的节点布置

Fig. 5 Nodes for the viscoelastic hollow cylinder

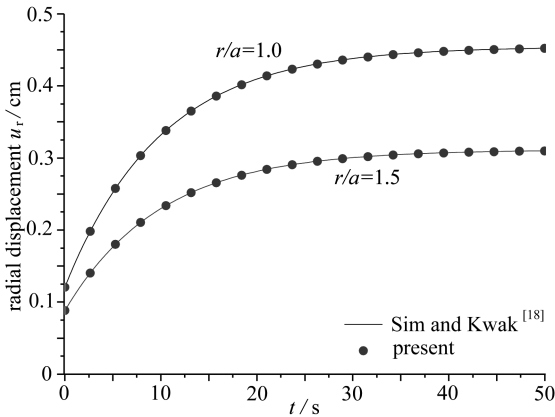


图 6 黏弹性厚壁圆筒的径向位移

Fig. 6 The radial displacement of the viscoelastic hollow cylinder

4 结 论

将弹性和黏弹性力学问题之间的对应原理、Laplace 变换和逆变换及自然单元法相结合,为求解黏弹性力学问题提供了一条新途径。相对于无单元 Galerkin 法,自然单元法的形函数具有插值性质,从而能够更准确地施加本质边界条件。尤为重要是自然单元法在构造形函数时不涉及到复杂的矩阵求逆运算,更不需要任何人为的参数,从而计算效率较一般的无网格法有较大的提高。一旦采用自然单元法获得准弹性问题的解,则由 Laplace 逆变换 Stehfest 算法即可得到黏弹性问题的解。算例分析表明,采用自然单元法进行二维黏弹性力学问题的计算分析是可行的,具有较高的计算精度。本文方法不仅推广了自然单元法的应用范围,而且也二维黏弹性力学问题的计算分析提供了一个有效并且容易实现的数值计算方法。但是,目前自然单元法的计算量仍然较大,这一点有待改进。

参考文献 (References):

- [1] Naguib H E, Park C B. A study on the onset surface melt fracture of polypropylene materials with foaming additives[J]. *Journal of Applied Polymer Science*, 2008, **109**(6): 3571-3577.

- [2] 陈兵兵, 徐赵东, 朱一强, 等. 加入粘弹性阻尼器的高楼桅杆风振响应分析[J]. 华东交通大学学报, 2014, **31**(5): 77-85. (CHEN Bing-bing, XU Zhao-dong, ZHU Yi-qiang, et al. Wind vibration response analysis of high building masts with viscoelastic dampers[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2014, **31**(5): 77-85. (in Chinese))
- [3] Sladek J, Sladek V, Zhang Ch, et al. Meshless local Petrov-Galerkin method for continuously nonhomogeneous linear viscoelastic solids[J]. *Computational Mechanics*, 2006, **37**: 279-289.
- [4] 祝彦知, 薛保亮, 王广国. 粘弹性地基上粘弹性地基板的自由振动解析[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, **21**(1): 112-118. (ZHU Yan-zhi, XUE Bao-liang, WANG Guang-guo. Free vibration analysis of viscoelastic foundation plate on viscoelastic foundation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2002, **21**(1): 112-118. (in Chinese))
- [5] Christensen R M. *Theory of Viscoelasticity*[M]. New York: Academia Press, 1971.
- [6] 姚伟岸, 杨海天, 高强. 平面粘弹性问题的辛求解方法[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(1): 14-20. (YAO Wei-an, YANG Hai-tian, GAO Qiang. A new approach to solve plane viscoelastic problems in the symplectic space[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(1): 14-20. (in Chinese))
- [7] 丁睿, 姚林泉, 李挺. 粘弹性薄板动力响应问题的多重互易法[J]. 工程数学学报, 2005, **22**(6): 1006-1012. (DING Rui, YAO Lin-quan, LI Ting. Multiple reciprocity method for solving dynamics response of viscoelastic thin plate[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2005, **22**(6): 1006-1012. (in Chinese))
- [8] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2): 229-256.
- [9] 王伟, 伊士超, 姚林泉. 分析复合材料层合板弯曲和振动的一种有效无网格方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(12): 1274-1284. (WANG Wei, YI Shi-chao, YAO Lin-quan. An effective meshfree method for bending and vibration analyses of laminated composite plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(12): 1274-1284. (in Chinese))
- [10] 孙新志, 李小林. 复变量移动最小二乘近似在 Sobolev 空间中的误差估计[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 416-425. (SUN Xin-zhi, LI Xiao-lin. Error estimates for the complex variable moving least square approximation in Sobolev spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 416-425. (in Chinese))
- [11] 秦义校, 程玉民. 温度场分析的重构核粒子边界无单元法[J]. 机械工程学报, 2008, **44**(6): 95-100. (QIN Yi-xiao, CHENG Yu-min. Reproducing kernel particle boundary element-free method for temperature field problems[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, **44**(6): 95-100. (in Chinese))
- [12] Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids[J]. *Nature*, 1995, **376**: 655-660.
- [13] Sukumar N, Moran T, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **43**(5): 839-887.
- [14] 张勇, 易红亮, 谈和平. 求解辐射导热耦合换热的自然单元法[J]. 工程热物理学报, 2013, **34**(5): 918-922. (ZHANG Yong, YI Hong-liang, TAN He-ping. Natural element method for coupled radiative and conductive heat transfer[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2013, **34**(5): 918-922. (in Chinese))
- [15] 江涛, 章青. 直接增强自然单元法计算应力强度因子[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(2): 264-269. (JIANG Tao, ZHANG Qing. Computing stress intensity factor by enriched natural element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(2): 264-269. (in Chi-

nese))

- [16] 曾祥勇, 朱爱军, 邓安福. Winkler 地基上厚板分析的自然单元法[J]. 固体力学学报, 2008, **29**(2): 163-169. (ZENG Xiang-yong, ZHU Ai-jun, DENG An-fu. Natural element method for analysis of thick plates lying over Winkler foundations[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, **29**(2): 163-169. (in Chinese))
- [17] Stehfest H. Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transform[J]. *Communications of the ACM*, 1970, **13**(1): 47-49.
- [18] Sim W J, Kwak B M. Linear viscoelastic analysis in time domain by boundary element method [J]. *Computers & Structures*, 1988, **29**(4): 531-539.

A Meshless Natural Element Method for 2D Viscoelastic Problems

CHEN Shen-shen, ZHONG Bin

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University,
Nanchang 330013, P.R.China)

Abstract: Based on the meshless natural element method, a new algorithm was proposed to solve 2D viscoelastic problems. According to the elastic-viscoelastic correspondence principle and the Laplace transform technique, the viscoelastic problem was transformed into an elastic problem in the Laplace space and then the basic formula of the natural element method for the analysis of viscoelastic problems were derived. As a recently developed meshless method, the natural element method (NEM) is essentially a Galerkin method based on natural neighbour interpolation. Compared to most other meshless methods, the shape function employed in the NEM has interpolation property and its support domain is anisotropic. Some numerical examples verify the effectiveness of the developed method.

Key words: meshless method; natural element method; viscoelasticity; correspondence principle; Laplace transform

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11462006;21466012)

引用本文/Cite this paper:

陈莘莘, 钟斌. 二维黏弹性力学问题的无网格自然单元法[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 605-612. CHEN Shen-shen, ZHONG Bin. A meshless natural element method for 2D viscoelastic problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 605-612.