

# 柔性约束下压杆的一些稳定和 不稳定的临界状态\*

赵艳萍, 李琳, 金明

(北京交通大学 土木建筑工程学院 力学系, 北京 100044)

**摘要:** 研究了一端固定、一端弹簧约束滑动固定的压杆在 Euler 临界载荷作用下的稳定性.将系统的势能表示为转角的泛函,将扰动量展开成 Fourier 级数,将势能的二阶变分表示成一个二次型,得到在临界状态下势能的二阶变分半正定,并求得临界载荷与屈曲模态.进一步研究临界状态下高阶变分的正定性,包括四阶和六阶变分的正定性.结果表明,与刚性约束不同的是,柔性约束压杆临界状态的稳定性与约束的刚度有关,有稳定与不稳定之分,并给出了临界状态是稳定和不安定的情况下柔性约束相对刚度的范围.

**关键词:** 柔性约束; 相对刚度; 高阶变分; 正定; 稳定性

**中图分类号:** O342; TB12      **文献标志码:** A      doi: 10.21656/1000-0887.370299

## 引言

杆件在结构设计中被广泛应用,但这类构件受到轴向压力作用时容易失稳.Euler 压杆是分析这类问题的基本模型.另一方面,工程上其他一些构件的稳定性问题,如海底埋设管道的屈曲问题<sup>[1]</sup>,也可以用 Euler 压杆模型进行初步分析.用平衡法或缺陷法<sup>[2]</sup>可求出临界载荷,但无法判断临界点的稳定性.因此临界点的稳定性问题是 Euler 压杆模型中的一个重要问题,并且临界点的稳定性还与后屈曲行为密切相关<sup>[3]</sup>.文献[4-6]应用共轭点理论研究了弹性杆的屈曲问题,文献[7-10]给出了 Euler 压杆稳定和不安定的一些充分条件及其证明.文献[11-12]研究了不可压缩弹性杆在曲线平衡状态下的后屈曲稳定性.文献[13]则进一步对任意的 Dirichlet 边界条件,由最小势能原理对平面内可压缩和不可压缩弹性杆屈曲后的稳定性做了归纳.文献[14]证明了 Euler 压杆在后屈曲状态有多个分支.文献[15-16]用共轭点理论分析了后屈曲过程中 Euler 弹性线稳定与不稳定性,并与实验结果进行了比较.一般情况下,势能的二阶变分在临界点处为半正定,所以仅仅分析二阶变分的正定性还不能判别临界点的稳定性,需要进一步分析高阶变分的正定性.而上述文献都是以分析二阶变分为前提的,所以没有明确临界点的稳定性.

文献[17-18]分析了一种刚性约束下杆的临界点稳定性.但是目前很少有文献分析柔性约束下杆的临界点稳定性.对于一端固定、一端弹簧约束下滑动固定的压杆,本文研究了势能的

\* 收稿日期: 2016-09-29; 修订日期: 2016-12-01

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金(20120009110019)

作者简介: 赵艳萍(1982—),女,博士生(通讯作者). E-mail: zhaoyanping1103@126.com).

二阶、四阶及六阶变分的正定性,得到了临界状态稳定性分析结果.与刚性约束不同的是,柔性约束压杆临界状态的稳定性与柔性约束的刚度有关,有稳定与不稳定之分,并给出了稳定和不安定的区域.

## 1 势能

图 1 为一端固定、一端弹簧约束下滑动固定的压杆,其势能为

$$\Pi(\theta) = \int_0^b \frac{1}{2} EI \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds - N \int_0^b (1 - \cos \theta) ds + \frac{K}{2} \left( \int_0^b \sin \theta ds \right)^2, \quad (1)$$

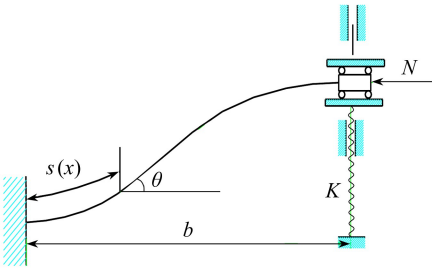


图 1 一端固定、一端弹簧约束下滑动固定的压杆

Fig. 1 A slender column with one end fixed, the other clamped in rotation and restrained by a spring

式中,  $b$  为杆变形前的长度,  $s$  为杆轴线的弧长坐标 ( $0 \leq s \leq b$ ),  $\theta$  为杆弯曲时的转角,  $N$  为轴向压力,  $EI$  为抗弯刚度,  $K$  为弹簧常数.

由 Lagrange-Dirichlet 定理<sup>[19]</sup>知,当系统的势能取最小值时,平衡是稳定的.在线弹性范围内,转角的导数可能分段连续,也就是  $\theta \in C^0$ .在式(1)中,令  $x = s/b$ ,  $k^2 = Nb^2/(EI)$ ,  $\eta = Kb^3/(EI)$ ,其中无量纲参数  $\eta$  与弹簧常数、杆长的三次方成正比,与杆的抗弯刚度成反比,表示弹簧对整个结构约束的强弱程度. $\eta$  可称为柔性约束的相对刚度.在式(1)中去掉常数项,可以得到

$$J(\theta) = J_1 + J_2, \quad (2)$$

式中

$$J_1 = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (\theta')^2 + k^2 \cos \theta \right] dx, \quad (3)$$

$$J_2 = \frac{\eta}{2} \left( \int_0^1 \sin \theta dx \right)^2. \quad (4)$$

显然  $J(\theta)$  与  $\Pi(\theta)$  的极值条件是一致的. $J(\theta)$  是关于转角的非线性泛函.

## 2 势能的增量

当杆为直线平衡状态时,  $\theta \equiv 0$ ,  $\theta' \equiv 0$ .由式(3)、(4)可得  $J_1(0) = k^2$ ,  $J_2(0) = 0$ .设扰动量为  $\delta\theta$ ,将  $\cos(\delta\theta)$ ,  $\sin(\delta\theta)$  展开为 Taylor 级数,再代入式(2),得到二阶变分以及高阶变分,其中二阶变分为

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 (\delta\theta')^2 dx - k^2 \int_0^1 (\delta\theta)^2 dx + \eta \left( \int_0^1 \delta\theta dx \right)^2 \right], \quad (5)$$

四阶变分为

$$\delta^4 J = \frac{k^2}{24} \int_0^1 (\delta\theta)^4 dx - \frac{\eta}{6} \int_0^1 \delta\theta dx \int_0^1 (\delta\theta)^3 dx, \quad (6)$$

六阶变分为

$$\delta^6 J = -\frac{k^2}{6!} \int_0^1 (\delta\theta)^6 dx + \frac{1}{5!} \eta \int_0^1 \delta\theta dx \int_0^1 (\delta\theta)^5 dx + \frac{\eta}{2 \cdot (3!)^2} \left[ \int_0^1 (\delta\theta)^3 dx \right]^2. \quad (7)$$

由于从势能的一阶变分得到的平衡方程为非线性积分方程,求解后屈曲行为十分困难.因

此,临界点的稳定性分析就显得尤为重要.

### 3 势能泛函的二次型的正定性分析

图 1 所示的一端固定、一端弹簧约束滑动固定的压杆,边界条件为

$$\delta\theta(0) = 0, \delta\theta(1) = 0. \tag{8}$$

令  $\delta\theta(x)$  在  $x \in [-1, 1]$  上为奇函数,即  $\delta\theta(-x) = -\delta\theta(x)$ ,可将  $\delta\theta(x)$  的定义域从  $x \in [0, 1]$  拓展到  $x \in [-1, 1]$ .根据边界条件可得到  $\delta\theta(1) = \delta\theta(-1) = 0, \delta\theta'(1) = \delta\theta'(-1)$ .考虑到关于 Fourier 级数的 Dirichlet-Jordan 收敛性判定定理<sup>[20]</sup>,  $\delta\theta(x)$  可展开为

$$\delta\theta(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin(m\pi x), \quad x \in [-1, 1], \tag{9}$$

边界条件(8)自然满足.考虑到式(9)中  $\delta\theta(x)$  平方可积,且为奇函数,得到 Pasaval 等式:

$$\int_0^1 (\delta\theta)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2. \tag{10}$$

同理,可以得到关于  $\delta\theta'(x)$  的 Fourier 级数:

$$\delta\theta'(x) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m\varepsilon_m \cos(m\pi x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{11}$$

考虑到  $\delta\theta'(x)$  平方可积,且为偶函数,所以由式(11)同样可得到关于  $\delta\theta'(x)$  的 Pasaval 等式:

$$\int_0^1 (\delta\theta')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \pi^2 \varepsilon_m^2. \tag{12}$$

对式(9)积分后平方,可以得到

$$\left(\int_0^1 \delta\theta dx\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \left(\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\varepsilon_m^2}{m}\right)^2. \tag{13}$$

把式(10)、(12)、(13)代入式(5)就得到二阶变分的二次型:

$$4\delta^2 J = D_1 + D_2, \tag{14}$$

式中

$$D_1 = \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} (p^2 \pi^2 - k^2) \varepsilon_p^2 + \frac{8\eta}{\pi^2} \left(\sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \varepsilon_p \frac{1}{p}\right)^2, \tag{15}$$

$$D_2 = \sum_{p=2,4,6,\dots}^{\infty} (p^2 \pi^2 - k^2) \varepsilon_p^2. \tag{16}$$

式(15)中,  $D_1$  是关于  $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \dots$  的二次型,其矩阵为

$$\begin{pmatrix} \pi^2 - k^2 + \phi & \frac{1}{1 \cdot 3} \phi & \frac{1}{1 \cdot 5} \phi & \cdots & \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \phi & \cdots \\ \frac{1}{3 \cdot 1} \phi & 3^2 \pi^2 - k^2 + \frac{1}{3^2} \phi & \frac{1}{3 \cdot 5} \phi & \cdots & \frac{1}{3 \cdot (2n-1)} \phi & \cdots \\ \frac{1}{5 \cdot 1} \phi & \frac{1}{5 \cdot 3} \phi & 5^2 \pi^2 - k^2 + \frac{1}{5^2} \phi & \cdots & \frac{1}{5 \cdot (2n-1)} \phi & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(2n-1) \cdot 1} \phi & \frac{1}{(2n-1) \cdot 3} \phi & \frac{1}{(2n-1) \cdot 5} \phi & \cdots & (2n-1)^2 \pi^2 - k^2 + \frac{1}{(2n-1)^2} \phi & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{17}$$

二次型  $D_1$  的  $n$  阶及无穷阶顺序主子式分别记为

$$Q_n^1 = \left(\frac{1}{4}\right)^n X_n Y_n, \quad (18)$$

$$Q_\infty^1 = \left(\frac{1}{4}\right)^\infty X_\infty Y_\infty, \quad (19)$$

式中

$$X_n = \prod_{m=1}^n [(2m-1)^2 \pi^2 - k^2], \quad (20)$$

$$Y_n = 1 + \phi \sum_{m=1}^n \frac{1}{[(2m-1)^2 \pi^2 - k^2] (2m-1)^2}, \quad (21)$$

$$X_\infty = \prod_{m=1}^{\infty} [(2m-1)^2 \pi^2 - k^2], \quad (22)$$

$$Y_\infty = 1 + \phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[(2m-1)^2 \pi^2 - k^2] (2m-1)^2}. \quad (23)$$

由于

$$\prod_{m=1}^{\infty} [(2m-1)^2 \pi^2 - k^2] = \left[ \prod_{m=1}^{\infty} (2m-1) \pi \right]^2 \cos \frac{k}{2}, \quad (24)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 [(2m-1)^2 \pi^2 - k^2]} = \frac{\pi^2}{4k^3} \tan \frac{k}{2} - \frac{\pi^2}{8k^2}, \quad (25)$$

将式(24)、(25)代入到式(22)、(23)和(19),则式(19)可化为如下的初等形式:

$$Q_\infty^1 = \left(\frac{1}{4}\right)^\infty \left[ \prod_{m=1}^{\infty} (2m-1) \pi \right]^2 \left[ 1 + \frac{2\eta}{k^3} \tan \frac{k}{2} - \frac{\eta}{k^2} \right] \cos \frac{k}{2}. \quad (26)$$

式(16)中的  $D_2$  是关于  $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6, \dots$  的二次型,该二次型的矩阵的  $n$  阶及无穷阶顺序主子式分别为

$$Q_n^2 = \prod_{m=1}^n [(2m)^2 \pi^2 - k^2], \quad (27)$$

$$Q_\infty^2 = \frac{2}{k} \prod_{m=1}^{\infty} (2m\pi)^2 \sin \frac{k}{2}. \quad (28)$$

由式(27)、(28)可知,当  $k \in (\pi, 2\pi)$  时,  $Q_n^2 > 0$  且  $Q_\infty^2 > 0$ .

由式(15)、(16)知,  $\delta^2 J$  是半正定的情况可能有 3 种:第一,  $D_1$  是半正定的,  $D_2$  是正定的;第二,  $D_1$  和  $D_2$  是都半正定的;第三,  $D_1$  是正定的,  $D_2$  是半正定的.

$\delta^2 J$  的正定性与柔性约束的相对刚度  $\eta$  及载荷因子  $k$  有关.

### 3.1 $D_1$ 半正定, $D_2$ 正定

由式(15)、(16)可知  $\eta = 0$  时,载荷因子  $k = \pi$ .此时,  $D_1$  半正定,  $D_2$  正定,所以由式(14)知二阶变分  $\delta^2 J$  是半正定的.若  $\eta > 0$ ,则意味着在图 1 所示杆的右端弹簧开始起约束作用,由此可以判定临界载荷因子  $k \geq \pi$ .

由式(19)知  $D_1$  的无穷阶顺序主子式  $Q_\infty^1$  是半正定的情况还有另一种,即  $k \in (\pi, 2\pi)$  且  $Y_\infty = 0$ ,此时  $Y_n < Y_\infty = 0$ ,且  $Q_\infty^1 = 0$ ;又由式(20)、(22)可知,  $X_n < 0, X_\infty < 0$ ,所以可以得到在  $k \in (\pi, 2\pi), Q_\infty^1 = 0$  时,  $Q_n^1 > 0$ ,即  $D_1$  是半正定的.由式(16)知,当  $k \in (\pi, 2\pi)$  时,  $D_2$  是正定的.由式(14)知二阶变分  $\delta^2 J$  是半正定的.由式(26)可以求得临界状态下系统平衡时  $\eta$  和  $k$  的关系:

$$\eta = \frac{k^2}{1 - \frac{2}{k} \tan \frac{k}{2}} \tag{29}$$

这与附录中用平衡法求得的式(A7)的第二式是一致的。

### 3.2 $D_1$ 和 $D_2$ 均半正定

由式(16)可知,当  $D_2$  半正定时,载荷因子  $k = 2\pi$ , 由式(29)可知,  $\eta = 4\pi^2$ , 由式(25)、(23)得到  $Y_\infty = 0$ . 于是,由式(18)和(26)可知,此时  $D_1$  也是半正定的. 由式(14)知二阶变分  $\delta^2 J$  是半正定的.

### 3.3 $D_1$ 正定, $D_2$ 半正定

当  $D_2$  半正定时,  $D_1$  也是半正定的,所以不会出现上述的第三种情况.

由以上分析可知,当  $\eta \in [0, 4\pi^2)$  时,  $k$  的取值范围为  $k \in [\pi, 2\pi)$ .

## 4 临界状态的稳定性分析及临界载荷

### 4.1 当 $\eta \in [0, 4\pi^2)$ 时,系统的临界载荷及稳定性

由式(28)可知,只要  $k < 2\pi$ , 则  $Q_z^2 > 0$ . 所以在  $\eta \in [0, 4\pi^2)$  区间内,只要  $k < 2\pi$ , 则  $Q_n^2, Q_z^2$  均是正的.

在  $k \in [\pi, 2\pi)$  范围内,  $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6, \dots$  均为 0 的状态,  $\eta$  和  $k$  满足关系式(29)是系统平衡状态,即此状态时式(5)中二阶变分  $\delta^2 J = 0$ . 要分析此区间系统的平衡状态是否稳定,则需要进一步分析四阶变分  $\delta^4 J$ .

$\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6, \dots$  均为 0 时,  $\delta^2 J = 0$  有解的条件是,其关于  $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \dots$  的二次型矩阵行列式(17)等于 0. 当式(17)半正定时,可以得到

$$\varepsilon_{2n-1} = \frac{\pi^2 - k^2}{(2n - 1)[(2n - 1)^2 \pi^2 - k^2]} \varepsilon_1 \tag{30}$$

将式(30)代入到式(9)中可以得到

$$\delta\theta(x) = (\pi^2 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n - 1)\pi x]}{(2n - 1)[(2n - 1)^2 \pi^2 - k^2]} \varepsilon_1, \quad x \in [-1, 1] \tag{31}$$

式(31)中  $\delta\theta(x)$  右边可化为如下的初等形式:

$$\delta\theta(x) = \frac{\pi^3}{4k^2} (\pi^2 - k^2) \left( \cos(kx) + \tan \frac{k}{2} \sin(kx) - 1 \right) \varepsilon_1 \tag{32}$$

将式(32)及式(29)代入到势能四阶变分的表达式(6)中,整理得到

$$\delta^4 J = C_1 \left[ k^2 \beta^5 - \frac{11k\alpha}{2} \beta^4 + (7\alpha^2 + k^2) \beta^3 - \frac{9k\alpha}{4} \beta^2 + \frac{1}{2} \left( \alpha^2 - \frac{k^2}{4} \right) \beta + \frac{k\alpha}{4} \right], \tag{33}$$

式中 
$$C_1 = \frac{k}{8(2\alpha - k\beta)} \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi^3}{4k^2} \right)^2 (\pi^2 - k^2) \right]^4 \varepsilon_1^4, \quad \alpha = \sin \frac{k}{2}, \quad \beta = \cos \frac{k}{2},$$

且当  $k \in (\pi, 2\pi], \varepsilon_1 \neq 0$  时,  $C_1 > 0$ . 可以求出四阶变分零点的数值解  $\eta_0 \approx 0.494 7\pi^2$ . 分以下 3 种情况讨论直线平衡状态的稳定性.

(i) 当  $\eta \in (0, \eta_0)$  时,式(33)大于 0. 由于此时  $\delta^2 J = 0$ , 因此,对无穷小扰动  $\delta\theta$ , 势能的四阶变分  $\delta^4 J > 0$ , 即  $\Delta J > 0$ . 势能取极小值. 可以断定,当  $\eta \in (0, \eta_0)$  时,直线平衡状态是稳定的. 此时的临界载荷由式(29)求得.

(ii) 当  $\eta \in (\eta_0, 4\pi^2)$  时,式(33)小于 0. 由于此时  $\delta^2 J = 0$ , 因此,对无穷小扰动  $\delta\theta$ , 势能的

四阶变分  $\delta^4 J < 0$ , 即  $\Delta J < 0$ , 势能并不取极小值. 这表明当  $\eta \in (\eta_0, 4\pi^2)$  时, 直线平衡状态是不稳定的. 由此可以判断, 柔性约束压杆存在不稳定的临界状态.

(iii) 当  $\eta = \eta_0$  时, 式(33)等于 0, 即  $\delta^4 J = 0$ , 此时的临界载荷  $k_0$  可以由式(29)求得,  $k_0 \approx 1.1825\pi$ . 要判断临界状态的稳定性, 需进一步计算系统势能的六阶变分式(7). 将  $\delta\theta(x)$  的表达式(32)代入到式(7), 得到

$$\delta^6 J = C_2 \left[ -k^2 \beta^7 + \frac{127}{18} k \alpha \beta^6 - \left( \frac{7}{2} k^2 + \frac{323}{27} \alpha^2 \right) \beta^5 + \frac{155}{9} k \alpha \beta^4 - \left( \frac{15}{8} k^2 + \frac{329}{27} \alpha^2 \right) \beta^3 + \frac{83}{24} k \alpha \beta^2 + \left( \frac{1}{48} k^2 - \frac{137}{108} \alpha^2 \right) \beta - \frac{k}{24} \alpha \right], \quad (34)$$

$$\text{式中 } C_2 = \frac{k}{48(2\alpha - k\beta)} \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi^3}{4k^2} \right)^2 (\pi^2 - k^2) \right]^6 \varepsilon_1^6$$

且当  $k \in (\pi, 2\pi]$ ,  $\varepsilon_1 \neq 0$  时,  $C_2 > 0$ .

将  $\eta = \eta_0, k = k_0$  代入到式(34)中, 计算得到  $\delta^6 J > 0$ . 又考虑到此时  $\delta^2 J = 0, \delta^4 J = 0$ , 可以判断, 当  $\eta = \eta_0$  时, 对无穷小扰动  $\delta\theta$ , 直线平衡状态是稳定的.

#### 4.2 当 $\eta \in [4\pi^2, +\infty)$ 时, 系统的临界载荷及稳定性

(i) 当  $\eta \in (4\pi^2, +\infty)$  时, 由式(29)可以得到  $k > 2\pi$ . 但当  $k > 2\pi$  时, 由式(27)、(28)可以得到,  $Q_n^2 < 0, Q_\infty^2 < 0$ , 所以, 此时临界载荷因子只能是  $k = 2\pi$ . 当  $k = 2\pi$  时, 由式(26)可以得到  $Q_\infty^1 > 0$ , 由式(27)、(28)可以得到  $Q_n^2 \geq 0, Q_\infty^2 = 0$ , 所以势能的二阶变分是半正定的. 因此, 可以断定, 对于一端固定、一端弹簧约束滑动固定的杆, 直线平衡状态是稳定的. 当  $\eta > 4\pi^2$  时, 随着柔性约束相对刚度的增大, 临界载荷保持不变, 可见, 当柔性约束相对刚度增大到一定程度, 与理想刚性约束下求得的临界载荷是一致的,  $k = 2\pi$ . 这说明, 当支座基础的刚度足够大时, 简化为刚性约束是合理的.

(ii) 当  $\eta = 4\pi^2$  时, 由式(29)可以得到  $k = 2\pi$ , 此时式(18)、(19)、(27)、(28)、(14)中  $Q_\infty^1 > 0, Q_n^2 \geq 0, Q_\infty^2 = 0$ , 即  $\delta^2 J \geq 0$ . 事实上, 附录中由平衡法求得临界载荷时, 其特征方程(A6)系数矩阵的秩  $\text{rank}(\mathbf{H}) = 1$ , 即特征值有二重根, 所以除了以下两种模态及其线性组合模态之外, 其余情况下,  $\delta^2 J > 0$ .

第一, 当  $\varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_m = 0, m = 3, 4, 5, \dots$  时,  $\delta^2 J = 0$ . 此时, 由式(9)知

$$\delta\theta(x) = \varepsilon_2 \sin(2\pi x). \quad (35)$$

第二, 当式(29)等于 0 时, 即

$$1 + \frac{2\eta}{k^3} \tan \frac{k}{2} - \frac{\eta}{k^2} = 0$$

时,  $\delta^2 J = 0$ . 此时, 由  $\delta\theta(x)$  的表达式(32)可知

$$\delta\theta(x) = \frac{-3\pi^3}{16} \varepsilon_1 [\cos(2\pi x) - 1]. \quad (36)$$

将式(35)、(36)分别代入到式(6)计算, 可以得到: 对应于第一种情况,  $\delta^4 J > 0$ , 对于第二种情况,  $\delta^4 J < 0$ . 这两种模态的线性组合模态也是系统可能存在的平衡状态, 其模态数学表达式见附录式(A8). 所以  $\eta = 4\pi^2$  是一个多重分叉点.

由此可得当  $\eta = 4\pi^2$  时, 载荷因子  $k = 2\pi$ , 考虑无穷小扰动  $\delta\theta$ , 势能并不总能取得最小值, 有无穷种失稳模态, 且势能的增量至少有一种是负的, 所以得出此时的直线平衡状态是不稳定的.

平衡时载荷因子  $k$  与  $\eta$  的关系及临界状态的稳定性如图 2 所示。

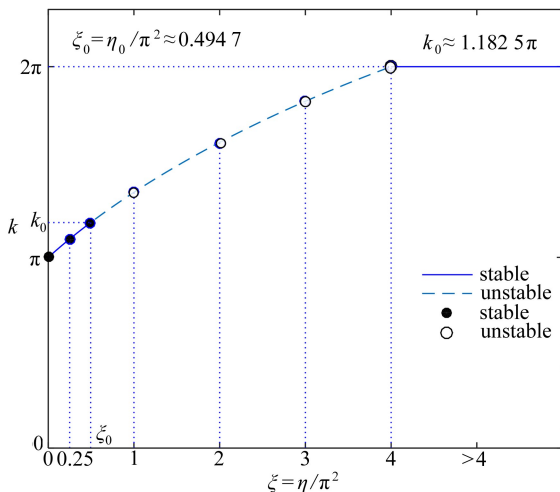


图 2  $k$  与  $\eta$  关系图

Fig. 2 The relationship between  $k$  and  $\eta$

## 5 失稳模态的求解

### 5.1 $\eta \in [0, 4\pi^2)$

(i) 当  $\eta = 0$  时, 由式(9)及式(14)可得

$$\delta\theta(x) = \varepsilon_1 \sin(kx). \tag{37}$$

对式(37)积分, 考虑到边界条件  $w(0) = 0$ , 求得失稳模态

$$w(x) = \frac{1}{k} (1 - \cos(kx)) \varepsilon_1.$$

(ii) 当  $\eta \in (0, 4\pi^2)$  时, 由式(32)并考虑到边界条件  $w(0) = 0$ , 可得失稳模态

$$w(x) = \frac{\pi^3}{4k^3} (\pi^2 - k^2) \left( \sin(kx) - \tan \frac{k}{2} \cos(kx) - kx + \tan \frac{k}{2} \right) \varepsilon_1.$$

$\eta$  和  $k$  的关系可由式(29)求得。

### 5.2 $\eta \in [4\pi^2, +\infty)$

(i) 当  $\eta \in (4\pi^2, +\infty)$  时, 由于  $Q_\infty^1 > 0$ , 模态由  $Q_\infty^2 = 0$  的情况决定, 由式(9)及式(28)可得

$$\delta\theta(x) = \sin(2\pi x) \varepsilon_2. \tag{38}$$

对式(38)积分, 考虑到边界条件  $w(0) = 0$ , 求得

$$w(x) = -\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) \varepsilon_2.$$

(ii) 当  $\eta = 4\pi^2$  时,  $k = 2\pi$ , 由式(9)、(35)、(36)可得, 当  $\varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_m = 0 (m = 3, 4, 5, \dots)$  时,

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} (1 - \cos(2\pi x)) \varepsilon_2;$$

当平衡状态为  $1 + \frac{2\eta}{k^3} \tan \frac{k}{2} - \frac{\eta}{k^2} = 0$  时,

$$w(x) = \frac{-3\pi^3}{16} \left( \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - x \right) \varepsilon_1.$$

其对应的所有模态表达式为附录中由扰动法求得的模态(A8)。

为了更直观显示系统在不同相对刚度柔性约束下的模态曲线,取挠度最大值为1,绘制了  $w-x$  曲线,结果如图3所示.其中图3(b)为图3(a)的局部放大图.图中选取了  $\eta/\pi^2 = 0, 0.25, 0.4947$  和  $\eta/\pi^2 > 4$  这4种模态,与其对应的四阶变分为正;选取了  $\eta/\pi^2 = 1, 2, 3$  这3种模态,与其对应的四阶变分为负。

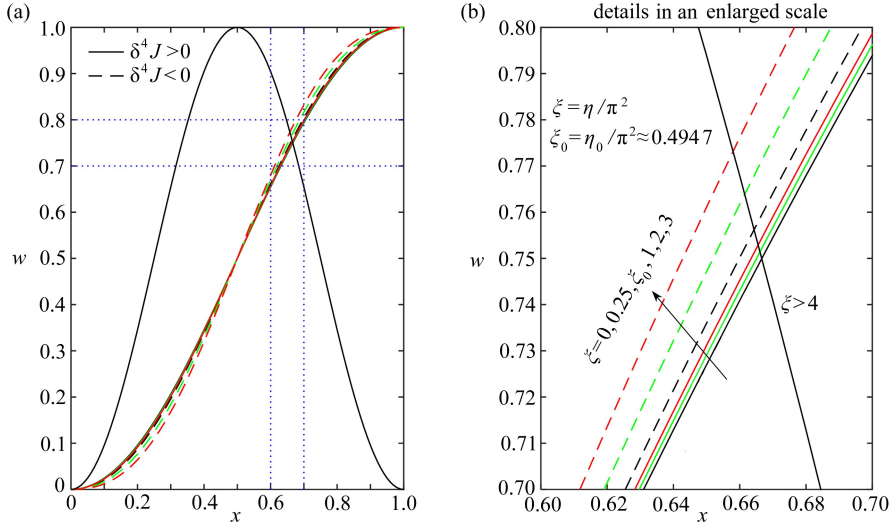


图3 不同相对刚度的弹性约束下的模态曲线

Fig. 3 The curves of buckling modes for different relative stiffnesses of the flexible support

当  $\eta = 4\pi^2$  时,有无穷多种失稳模态,是一个多重分叉点.选取了  $M_c = 0$  以及  $M_c \neq 0, a = 1, t = 4, 3, 2, 1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0$  几种情况,其模态曲线如图4所示.其中,当  $M_c \neq 0, a = 1, t = 0.2, 0.1, 0$  时,势能的四阶变分  $\delta^4 J > 0$ , 其余情况  $\delta^4 J < 0$ 。

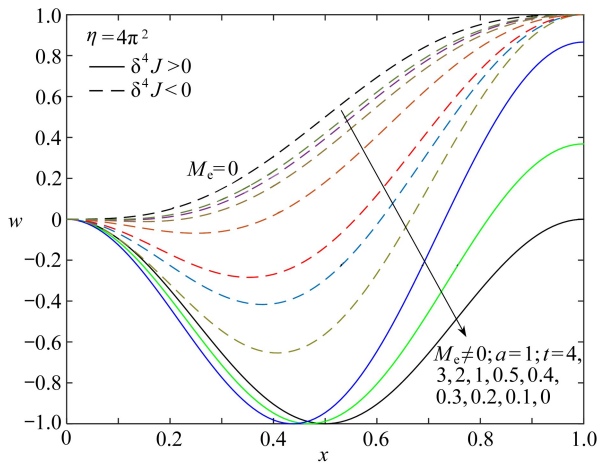


图4  $\eta = 4\pi^2$  的几种模态

Fig. 4 The multiple modes for  $\eta = 4\pi^2$



## 6 结 论

一端固定、一端弹簧约束滑动固定的弹性杆直线平衡临界状态的稳定性随着柔性约束的相对刚度不同而变化。

当柔性约束的相对刚度  $\eta \in (0, \eta_0)$  ( $\eta_0 \approx 0.4947\pi^2$ ) 时,按照扰动法求得的临界状态是稳定的。

当柔性约束的相对刚度  $\eta = \eta_0$  时,只有一种失稳模态,此时势能的四阶变分等于 0,六阶变分是正的,所以按照扰动法求得的临界状态也是稳定的。

当柔性约束的相对刚度  $\eta \in (\eta_0, 4\pi^2)$  时,系统临界状态是不稳定的,还需进行后屈曲分析。

当柔性约束的相对刚度  $\eta = 4\pi^2$  时,临界载荷为  $k = 2\pi$ ,有无穷多种失稳模态,是一个多重分叉点。至少有一种失稳模态对应的四阶变分是负的,所以此时按照扰动法求得的临界状态是不稳定的。

当柔性约束的相对刚度  $\eta \in (4\pi^2, +\infty)$  时,系统的临界状态是稳定的,临界载荷恒为  $k = 2\pi$ ,柔性约束的相对刚度对临界载荷没有影响,将刚度足够大的约束简化为刚性约束是合理的。

### 附录 平衡法求临界载荷

用平衡法计算如图 1 所示系统的临界载荷。设弹簧的伸长量为  $\delta$ ,运用截面法,对杆件进行受力分析,  $w$  为坐标  $s$  处压杆的挠度,  $F_k = K\delta$ ,  $M_e$  为截面弯矩,顺时针为正,对于杆件右端,关于挠度的微分方程为

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{-M_e - K\delta(b-s) + N(\delta-w)}{EI}. \quad (A1)$$

引用与第 1 节相同的记号,式(A1)可以写成

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = \frac{-M_e}{EI} b^2 - \eta\delta(1-x) + k^2\delta. \quad (A2)$$

式(A2)微分方程的通解可以写为

$$w(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) - \frac{M_e}{k^2 EI} b^2 - \frac{\eta\delta(1-x)}{k^2} + \delta, \quad (A3)$$

其中  $A, B$  为待定常数。对于图 1 中一端固定、一端弹簧滑动固定的 Euler 杆的边界条件为

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w(1) = \delta, w'(1) = 0. \quad (A4)$$

将式(A4)代入到式(A3),并用  $A$  的函数替换  $\delta$ , 计算得到关于  $A, B, -b^2 M_e / (k^2 EI)$  的齐次方程组,

$$\begin{cases} A\left(k - \frac{k^3}{\eta}\right) + B - \frac{b^2 M_e}{k^2 EI} = 0, \\ A\sin k + B\cos k - \frac{b^2 M_e}{k^2 EI} = 0, \\ A(\cos k - 1) - B\sin k = 0. \end{cases} \quad (A5)$$

方程组(A5)的特征方程为

$$\sin \frac{k}{2} \left[ k \left( 1 - \frac{k^2}{\eta} \right) \cos \frac{k}{2} - \sin \frac{k}{2} \right] = 0. \quad (A6)$$

式(A6)有两个解,即两个临界载荷,分别为

$$k_1 = 2\pi, \quad \frac{2\eta}{k_2^3} \tan \frac{k_2}{2} - \frac{\eta}{k_2^2} + 1 = 0. \quad (A7)$$

可以验证,当  $\eta = 4\pi^2$  时,  $k = 2\pi$  为特征方程的重根。可以推导得到此时的模态

$$w(x) = \begin{cases} -\frac{\delta}{2\pi}(\sin(2\pi x) - 2\pi x), & M_e = 0, \\ a[(\cos(2\pi x) - 1) + t(\sin(2\pi x) - 2\pi x)], & M_e \neq 0, \end{cases} \quad (A8)$$

其中  $a, t$  为各自独立的常数,

$$a = \frac{b^2 M_e}{4\pi^2 EI}, \quad t = -\frac{2\pi EI}{b^2 M_e} \delta, \quad a, t \in (-\infty, +\infty).$$

当  $k = k_0, \eta = \eta_0$  时,特征方程(A6)也成立,但此时方程(A6)无重根,所以此时仅有一种模态.

**致谢** 本文作者衷心感谢北京交通大学研究生创新基金(C16JB00250)对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] 车小玉, 段梦兰, 曾霞光, 等. 双层管道整体屈曲实验研究及数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(2): 188-201.(CHE Xiao-yu, DUAN Meng-lan, ZENG Xia-guang, et al. Experiments study and numerical simulation of global buckling of pipe-in-pipe systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 188-201.(in Chinese))
- [2] Ziegler H. *Principle of Structure Stability*[M]. 2nd ed. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1977.
- [3] van der Heijden A M A. *W. T. Koiter's Elastic Stability of Solids and Structures*[M]. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [4] Hoffman K A, Manning R S. An extended conjugate point theory with application to the stability of planar buckling of an elastic rod subject to a repulsive self-potential[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2009, **41**(2): 465-494.
- [5] Manning R S, Rogers K A, Maddocks J H. Isoperimetric conjugate points with application to the stability of DNA minicircles[J]. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, **454**(1980): 3047-3074.
- [6] Manning R S. Conjugate points revisited and Neumann-Neumann problems[J]. *SIAM Review*, 2009, **51**(1): 193-212.
- [7] Jin M, Bao Z B. An improved proof of instability of some Euler elasticas[J]. *Journal of Elasticity*, 2015, **121**(2): 303-308.
- [8] Jin M, Bao Z B. Extensibility effects on Euler elastica's stability[J]. *Journal of Elasticity*, 2013, **112**(2): 217-232.
- [9] Jin M, Bao Z B. Sufficient conditions for stability of Euler elasticas[J]. *Mechanics Research Communications*, 2008, **35**(3): 193-200.
- [10] Jin M, Bao Z B. A proof of instability of some Euler elasticas[J]. *Mechanics Research Communications*, 2014, **59**: 37-41.
- [11] Levyakov S V. Stability analysis of curvilinear configurations of an inextensible elastic rod with clamped ends[J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, **36**(5): 612-617.
- [12] Levyakov S V, Kuznetsov V V. Stability analysis of planar equilibrium configurations of elastic rods subjected to end loads[J]. *Acta Mechanica*, 2010, **211**(1): 73-87.
- [13] Manning R S. A catalogue of stable equilibria of planar extensible or inextensible elastic rods for all possible Dirichlet boundary conditions[J]. *Journal of Elasticity*, 2014, **115**(2): 105-130.
- [14] Sachkov Y L. Maxwell strata in the Euler elastic problem[J]. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2008, **14**(2): 169-234.

- [15] Sachkov Y L. Conjugate points in the Euler elastic problem[J]. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2008, **14**(3): 409-439.
- [16] Sachkov Y L, Levyakov S V. Stability of inflectional elasticae centered at vertices or inflection points[J]. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, **271**(1): 177-192.
- [17] Batista M. On stability of columns at the first bifurcation point[J]. *Mechanics Research Communications*, 2016, **75**: 89-90
- [18] Jin M, Bao Z B. ‘Stability in the large’ of columns just at the first bifurcation point[J]. *Mechanics Research Communications*, 2015, **67**: 31-33.
- [19] 武际可, 苏先穰. 弹性系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1994. (WU Ji-ke, SU Xian-yue. *The Stability of Elastic System*[M]. Beijing: Science Press, 1994. (in Chinese))
- [20] Zygmund A. *Trigonometric Series*[M]. American: Cambridge University Press, 1959.

## Some Stable and Unstable Critical States of a Compression Rod With a Flexible Support

ZHAO Yan-ping, LI Lin, JIN Ming

(*Department of Mechanics, School of Civil Engineering,  
Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P.R.China*)

**Abstract:** Under Euler’s critical load, the stability of a slender compression rod with one end fixed and the other clamped in rotation but translationally restrained by a spring was studied. The potential energy of the system was expressed with the functional of the rod deflection angle; the disturbance was expanded into the Fourier series; the 2nd-order variation of the potential energy was expressed with a quadratic form. The 2nd-order positive semidefinite variation in the critical state was derived with the buckling mode and the critical load obtained. A further study of the positive definiteness of higher-order variations, including the 4th and 6th variations, indicates that the stability of the compression rod with a flexible support is related to the stiffness of the flexible constraint and may be stable or unstable, which is different from the case of a rigid constraint. In the stable and unstable critical states the ranges for the relative stiffness of the flexible support were also given.

**Key words:** flexible support; relative stiffness; high-order variation; positive definiteness; stability

---

引用本文/Cite this paper:

赵艳萍, 李琳, 金明. 柔性约束下压杆的一些稳定和不稳定的临界状态[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(8): 877-887.

ZHAO Yan-ping, LI Lin, JIN Ming. Some stable and unstable critical states of a compression rod with a flexible support[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 877-887.