文章编号:1000-0887(2017)06-0715-12

混合向量变分不等式标量化及间隙函数误差界*

刘丹阳， 蒋 娅

(西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘要： 利用 Konnov 对变分不等式问题的标量化方法,对一般的强变分不等式(SVI)和弱变分不等式(WVI)进行了进一步的推广.主要介绍了基于集值映射的强广义混合向量变分不等式(SGMVVI)和弱广义混合向量变分不等式(WGMVVI),考虑了与它们相关的间隙函数,在合适的条件下讨论了强广义混合集值变分不等式(SGMVI)的间隙函数和 SGMVVI 的间隙函数之间的关系,以及 WGMVVI 和 SGMVI 的间隙函数之间的关系,最后讨论了它们的间隙函数的全局误差界.

关 键 词： 广义混合向量变分不等式； 集值映射； 标量化； 间隙函数； 误差界

中图分类号： O178 **文献标志码：** A doi：10.21656/1000-0887.370292

引 言

变分不等式及其相关问题是近代数学中非线性分析的重要组成部分,它在微分方程、控制论、数学经济、最优化等理论应用和实际应用中起着广泛的作用.对于向量变分不等式的研究,Konnov[1]提出了标量化方法,而间隙函数是因凸优化的需要而引进的,文献[2-7]对相关的间隙函数已经做了一些研究.在解决实际问题时,往往可以将问题转化为求解变分不等式的解,从而转化为求解间隙函数的解.

经典变分不等式的间隙函数一般是比较好求解的,但是在有限维空间中,对于 Giannessi[8]所介绍的向量变分不等式(VVI),要解出其间隙函数是比较繁琐的,文献[7,9-16]已经做了一些相关的研究.Li,Mastroeni[17]对于 VVI 问题利用 Konnov 的标量化方法,在适当的条件下得到了 VVI 的间隙函数和其对应标量化后的间隙函数之间的关系,从而在求解向量变分不等式的间隙函数时,将其转化成求解变分不等式的间隙函数问题.在文献[18]中 Li, Huang, Yang 又对向量变分不等式的标量化进行了进一步的研究, 并把结果运用到了弱尖极小的问题上.文献[9,19]已经对 GMVVI 的间隙函数和 GMVI 的间隙函数以及它们的误差界做了相关研究.基于上述思想和方法, 本文延续了文献[17]中的方法, 针对一般的经典 VVI 对其做了适当的推广.

本文第一节主要介绍了所需的预备知识及其引理.第二节是文章的主要结果,把标量化方

* **收稿日期：** 2016-09-23；**修订日期：** 2017-05-10

基金项目： 国家自然科学基金(11371015);教育部科学技术重点项目(211163);四川省青年科技基金(2012JQ0035);四川省教育厅一般项目(16ZB0186)

作者简介： 刘丹阳(1991—),男,硕士生(E-mail：394898525@qq.com);
蒋娅(1982—),女,讲师,硕士(通讯作者. E-mail：576250051@qq.com).

法运用到 GMVVI 中,并在适当的条件下讨论了 GMVI 的间隙函数和 GMVVI 的间隙函数之间的关系.最后,对几个间隙函数的误差界进行了讨论.

设 Y 是一个实 Banach 空间.Y 的子集 P 是一个锥,当且仅当对于所有的 $\lambda > 0$ 有 $\lambda P \subseteq P$ 成立;P 是一个凸锥,当且仅当 P 是锥以及 $P+P=P$;P 是一个点锥,当且仅当 P 是一个锥以及 $P \cap \{-P\} = \{0\}$.

一个有序的 Banach 空间 (Y,P) 是一个实的 Banach 空间 Y, 并且定义点锥 $P \subseteq Y$ 是一个闭凸集,且 P 的序关系满足如下关系:

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in P, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y;$$

$$\boldsymbol{x} \ngeqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \notin P, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y.$$

记 $\operatorname{int} P$ 为 P 的内点,如果 $\operatorname{int} P \neq \varnothing$, 那么可以定义弱有序的,当且仅当满足下面的关系:

$$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{int} P, \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in Y;$$

$$\boldsymbol{x} \ngtr \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \notin \operatorname{int} P, \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in Y.$$

注意到, 对于 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in Y$,有 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x} \ngeqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \nleqslant \boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{y} \nless \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \ngtr \boldsymbol{y}$.

本文中 X 是一个实 Banach 空间, X^* 是其共轭空间.$K \subseteq X$ 是一个非空闭凸集, (Y,P) 是由闭凸点锥 P 诱导的有序 Banach 空间.$L(X,Y)$ 是所有 $X \to Y$ 的连续线性映射,定义对 $\forall \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{l} \in L(X,Y)$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的值用 $\langle \boldsymbol{l},\boldsymbol{x} \rangle$ 表示.$T:K \to 2^{L(X,Y)}$ 是一个集值映射.

接下来,考虑两类集值映射的广义混合向量变分不等式.

设 $\boldsymbol{f}:X \to Y$ 为连续的凸函数, $T:K \to 2^{L(X,Y)}$, $\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x})$.

SGMVVI:求 $\boldsymbol{x}^* \in K$, 使得 $\exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 满足

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^* \rangle + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \nless \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K. \tag{1}$$

WGMVVI:求 $\boldsymbol{x}^* \in K$, 使得对 $\forall \boldsymbol{y} \in K, \exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 满足

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^* \rangle + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \nless \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

注 1 1) 如果常值函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{c}, \forall \boldsymbol{x} \in K$, 则其为经典的强向量变分不等式和弱向量变分不等式.

SVVI:求 $\boldsymbol{x}^* \in K, \exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^* \rangle \nless \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K.$$

WVVI:求 $\boldsymbol{x}^* \in K$, 对 $\forall \boldsymbol{y} \in K, \exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^* \rangle \nless \boldsymbol{0}.$$

2) 在经典意义下的集值变分不等式,如果定义 $T:K \to 2^{X^*}$, 那么

SVI:求 $\boldsymbol{x}^* \in K, \exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K.$$

WVI:求 $\boldsymbol{x}^* \in K$, 对 $\forall \boldsymbol{y} \in K, \exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^* \rangle \geqslant 0.$$

注 2 如果设 $S_{\mathrm{SVI}}, S_{\mathrm{WVI}}, S_{\mathrm{SVVI}}, S_{\mathrm{WVVI}}, S_{\mathrm{SGMVVI}}, S_{\mathrm{WGMVVI}}$ 分别为 SVI, WVI, SVVI, WVVI, SGMVVI, WGMVVI 的解集,那么它们的解的关系为 $S_{\mathrm{SVI}} \subseteq S_{\mathrm{WVI}}, S_{\mathrm{SVVI}} \subseteq S_{\mathrm{WVVI}}$ 和 $S_{\mathrm{SGMVVI}} \subseteq S_{\mathrm{WGMVVI}}$.

1 预 备 知 识

首先介绍几个引理,这对后续定理的证明起着重要作用.

引理 1[17] 设 $A_i, i = 1,2,\cdots,n$ 是 Banach 空间上的非空子集,以下结论成立:

1) 如果 $A_i, i = 1,2,\cdots,n$ 是紧的,那么

$$\prod_{i=1}^{n} A_i, \mathrm{co}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x})\right), \bigcup_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x}), \mathrm{co}\{A_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,\cdots,n}$$

都是紧的,其中 $\mathrm{co}\{A_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,\cdots,n}$ 为 $\{A_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,\cdots,n}$ 的凸包.

2) $\cup_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathrm{co}\{A_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,\cdots,n} = \mathrm{co}(\cup_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x}))$.

注 3 特别地,如果 $\cup_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x})$ 是凸集,那么 $\cup_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x}) = \mathrm{co}\{A_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,\cdots,n}$.

引理 2 $\Delta = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0\}$ 是一个紧凸集.

引理 3[20] 设集合 A,B,其中 A,B 有一个为凸集,则 $\mathrm{co}(A \times B) = \mathrm{co}(A) \times \mathrm{co}(B)$.

引理 4[21] 对于任意扩张实值函数 f_1, f_2 (约定 $(+\infty)-(+\infty)=+\infty$),以下不等关系成立

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in X}\{f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})\} \geqslant \inf_{\boldsymbol{x}\in X} f_1(\boldsymbol{x}) + \inf_{\boldsymbol{x}\in X} f_2(\boldsymbol{x});$$

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in X}\{f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})\} \leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in X} f_1(\boldsymbol{x}) + \sup_{\boldsymbol{x}\in X} f_2(\boldsymbol{x}).$$

特别地,有

$$\inf_{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in X_1\times X_2}\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2)\} = \inf_{\boldsymbol{x}_1\in X_1} f_1(\boldsymbol{x}_1) + \inf_{\boldsymbol{x}_2\in X_2} f_2(\boldsymbol{x}_2).$$

引理 5[22] 设 X 是向量空间中的非空凸集, Y 是 Hausdorff 拓扑向量空间的非空紧凸集,设 $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ 是实值函数,对每一个固定的 $\boldsymbol{x} \in X$, $f(\boldsymbol{x}, \cdot)$ 在 Y 上是一下半连续的凸函数;对于每一固定的 $\boldsymbol{y} \in Y$, $f(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 X 上是凹函数,则以下等式成立

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in X}\min_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{y}\in Y}\sup_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

2 主要结果

下面介绍几类广义混合变分不等式的间隙函数,首先给出间隙函数的定义.

定义 1 设 K 是 SGMVVI(WGMVVI)的有效域,称函数 $P: K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是 SGMVVI (WGMVVI)上的间隙函数,如果满足以下两个条件:

1) $P(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in K$;

2) $P(\boldsymbol{x}^*) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$ 是 SGMVVI(WGMVVI)的解.

文中的一些记号: $R_+^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in R^n : x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\}$; $\mathrm{int}\, R_+^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in R^n : x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$; $T_0: K \to 2^{X^*}$, $T_0(\boldsymbol{x}) = \mathrm{co}\{T_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,\cdots,n}$; $T(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{x})$; $H_0(\boldsymbol{x}) = \cup_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{x})$, 其中 $T_i(\boldsymbol{x}): K \to 2^{X^*}$.

2.1 SGMVVI 和 WGMVVI 的间隙函数

在文献[5]中,已经建立了经典变分不等式的间隙函数,这里采取类似的想法来建立对应的间隙函数.下面先介绍 SGMVVI 和 WGMVVI 的间隙函数.

令 $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n) \in T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{t}_i \in T_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,2,\cdots,n$,定义: $\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle = (\langle \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle, \langle \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle,\cdots,\langle \boldsymbol{t}_n,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle)$. $\langle \boldsymbol{t}_i,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle$ 是 $\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle$ 对应的第 i 个坐标以及 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))$,其中 $f_i(\boldsymbol{x}): X \to \mathbf{R}$.定义 $\varphi_T(\boldsymbol{x}): K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\varphi_T(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\}, \qquad \boldsymbol{x} \in K. \tag{3}$$

对 $\boldsymbol{x} \in K$, 定义 $B_{\boldsymbol{x}}^T = \{\boldsymbol{t}: K \to T(\boldsymbol{x})\}$, $B_{\boldsymbol{x}}^T$ 是所有从 $K \to T(\boldsymbol{x})$ 的算子.如果 $\boldsymbol{x} \in K, \boldsymbol{t} \in B_{\boldsymbol{x}}^T$, 那么 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{y}),\cdots,\boldsymbol{t}_n(\boldsymbol{y})) \in T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{y} \in K$.同样定义 $\phi_T(\boldsymbol{x}): K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\phi_T(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{t}\in B_{\boldsymbol{x}}^T}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\}, \qquad \boldsymbol{x} \in K. \tag{4}$$

按照间隙函数的定义,笔者来证明上述两个函数是对应集值广义混合向量变分不等式的

间隙函数.

定理 1 设对于每个 $\boldsymbol{x} \in K$, 集值映射 $T_i(\boldsymbol{x}), i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 是非空弱*紧的凸集,则以下结论成立:

(i) $\varphi_T(\boldsymbol{x})$ 是由式(1)定义的间隙函数;

(ii) $\phi_T(\boldsymbol{x})$ 是由式(2)定义的间隙函数.

证明 (i) 由间隙函数的定义,对于 $\forall \boldsymbol{x} \in K$, 有

$$\sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\} \geqslant$$
$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})\} = 0.$$

从而对于 $\forall \boldsymbol{x} \in K$, 有

$$\varphi_T(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x})} \sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\} \geqslant$$
$$\inf_{\boldsymbol{t} \in T(\boldsymbol{x})} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})\} = 0.$$

如果 $\varphi_T(\boldsymbol{x}^*) = 0$, 由于 $T_i(\boldsymbol{x}^*)$ 是弱*紧的,由引理 1 可知 $T(\boldsymbol{x}^*) = \prod_{i=1}^n T_i(\boldsymbol{x}^*)$ 也是弱*紧的.由函数的连续性可知, $\exists \boldsymbol{t}^* \in T(\boldsymbol{x}^*)$ 使得

$$\varphi_T(\boldsymbol{x}^*) = \sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}^*) - f_j(\boldsymbol{y})\} = 0.$$

从而有

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}^*) - f_j(\boldsymbol{y})\} \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K.$$

这等价于

$$\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\rangle + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \notin -\operatorname{int} R_+^n, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K.$$

所以 $\boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{SGMVVI}}$.

反之,如果 $\boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{SGMVVI}}$,有 $\langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\rangle + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \notin -\operatorname{int} R_+^n$, $\forall \boldsymbol{y} \in K$, 从而存在 $i_0 \in \{i = 1,2,\cdots,n\}$ 使得

$$0 \geqslant \langle \boldsymbol{t}_{i_0}^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\rangle + f_{i_0}(\boldsymbol{x}^*) - f_{i_0}(\boldsymbol{y}) \geqslant$$
$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}^*) - f_j(\boldsymbol{y})\}, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K.$$

从而有

$$\sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}^*) - f_j(\boldsymbol{y})\} \leqslant 0.$$

所以

$$\varphi_T(\boldsymbol{x}^*) \leqslant \sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j^*, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}^*) - f_j(\boldsymbol{y})\} \leqslant 0.$$

又由前面的证明,对于 $\forall \boldsymbol{x} \in K$, 有 $\varphi_T(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, 所以 $\varphi_T(\boldsymbol{x}^*) \geqslant 0$, 从而 $\varphi_T(\boldsymbol{x}^*) = 0$.证毕.

(ii) 类似地,对于 $\forall \boldsymbol{x} \in K$, $\forall \boldsymbol{t} \in B_{\boldsymbol{x}}^T$, 有

$$\sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\} \geqslant$$
$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})\} = 0.$$

从而对于 $\forall \boldsymbol{x} \in K$, 有

$$\phi_T(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{t} \in B_{\boldsymbol{x}}^T} \sup_{\boldsymbol{y} \in K} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\} \geqslant$$
$$\inf_{\boldsymbol{t} \in B_{\boldsymbol{x}}^T} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\langle \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})\} = 0.$$

如果 $\boldsymbol{x}^* \in S_{\mathrm{WGMVVI}}$,那么,对于 $\forall \boldsymbol{y} \in K$, $\exists \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{y}) \in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*\rangle + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \notin -\operatorname{int} R_+^n.$$

这等价于

$$\min_{1\leq j\leq n}\{\langle \boldsymbol{t}_j^*(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant 0.$$

所以

$$\phi_T(\boldsymbol{x}^*)=\inf_{\boldsymbol{t}\in B_{\boldsymbol{x}^*}^T}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leq j\leq n}\{\langle \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant 0,\quad \forall \boldsymbol{x}\in K.$$

又因为对于 $\forall \boldsymbol{x}\in K$,有$\phi_T(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 所以 $\phi_T(\boldsymbol{x}^*)=0$.

反之,如果 $\phi_T(\boldsymbol{x}^*)=0$, 由下确界的定义可知,对于$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_n>\cdots>0$且$\varepsilon_n=\varepsilon_1/2^{n-1}$,$\boldsymbol{t}^n\in B_{\boldsymbol{x}^*}^T$,$n=1,2,\cdots$, 使得

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leq j\leq n}\{\langle \boldsymbol{t}_j^n(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant \varepsilon_n.$$

从而有

$$\min_{1\leq j\leq n}\{\langle \boldsymbol{t}_j^n(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant \varepsilon_n,\qquad \forall \boldsymbol{y}\in K,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

注意到 $\{\boldsymbol{t}^n(\boldsymbol{y})\}\subseteq T(\boldsymbol{x}^*)$, 又因为 $T(\boldsymbol{x}^*)$ 是弱*紧的,所以,对于 $\forall \boldsymbol{y}\in K$, $\{\boldsymbol{t}^n(\boldsymbol{y})\}$ 有弱*收敛的子网.不失一般性设 $\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{y})\in T(\boldsymbol{x}^*)$, 从而有

$$\langle \boldsymbol{t}^n(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\to\langle \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),\quad n\to+\infty,\ \forall \boldsymbol{y}\in K.$$

这意味着

$$\min_{1\leq j\leq n}\langle \boldsymbol{t}_j^n(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\to \min_{1\leq j\leq n}\langle \boldsymbol{t}_j^*(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}),\qquad n\to+\infty,\ \forall \boldsymbol{y}\in K.$$

由极限的保不等式性,有

$$\min_{1\leq j\leq n}\{\langle \boldsymbol{t}_j^*(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{y}\in K.$$

从而对于 $\forall \boldsymbol{y}\in K$, $\exists \boldsymbol{t}_j^*(\boldsymbol{y})\in T_j(\boldsymbol{x}^*)$ 使得

$$\langle \boldsymbol{t}_j^*(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y})\leqslant 0.$$

所以,对于 $\forall \boldsymbol{y}\in K$, $\exists \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{y})\in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\rangle+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\notin-\operatorname{int}R_+^n.$$

故 $\boldsymbol{x}^*\in S_{\mathrm{WGMVVI}}$.证毕.

2.2 SGMVI 和 WGMVI 的间隙函数及 SGMVVI 和 WGMVVI 的标量化方法

先引入标量的广义混合变分不等式,定义

SGMVI:求 $\boldsymbol{x}^*\in K$, 使得 $\exists \boldsymbol{s}^*\times\boldsymbol{\lambda}^*\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta$ 有

$$\langle \boldsymbol{s}^*,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\rangle+\sum_{j=1}^n\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{y})-f_j(\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0,\qquad \forall \boldsymbol{y}\in K. \tag{5}$$

WGMVI:求 $\boldsymbol{x}^*\in K$, 使得 $\forall \boldsymbol{y}\in K$, $\exists \boldsymbol{s}^*\times\boldsymbol{\lambda}^*\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta$ 有

$$\langle \boldsymbol{s}^*,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\rangle+\sum_{j=1}^n\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{y})-f_j(\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0. \tag{6}$$

同样地定义对应的间隙函数: $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}):K\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $q_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}):K\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$:

$$P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^n\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\},\qquad \boldsymbol{x}\in K,$$

$$q_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in B_{\boldsymbol{x}}^{T_0\times\Delta}}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^n\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\},\qquad \boldsymbol{x}\in K,$$

其中 $B_{\boldsymbol{x}}^{T_0}=\{\boldsymbol{t}:K\to T_0(\boldsymbol{x})\}$.

定理 2 设对于每个 $\boldsymbol{x}\in K,T_i(\boldsymbol{x}),i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$ 是非空弱 * 紧的凸集,则以下结论成立:

(i) $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})$ 是由式(5)定义的间隙函数;

(ii) $q_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})$ 是由式(6)定义的间隙函数.

证明 (i) 对于 $\forall\boldsymbol{x}\in K$, 有

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}\geqslant\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}))=0.$$

所以

$$P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}\geqslant\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\left\{\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}))\right\}=0.$$

又假定 $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}^*)=0$, 即

$$\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}=0.$$

由于 $T_0(\boldsymbol{x}^*)$ 是弱 * 紧的, Δ 是紧的,则存在 $\boldsymbol{t}^*\times\boldsymbol{\lambda}^*\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta$, 使得

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}=0.$$

从而有

$$\langle\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}))\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{y}\in K.$$

所以 $\boldsymbol{x}^*\in S_{\mathrm{SGMVI}}$.

反之,如果 $\boldsymbol{x}^*\in S_{\mathrm{SGMVI}}$, 那么存在 $\boldsymbol{t}^*\times\boldsymbol{\lambda}^*\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta$, 使得

$$\langle\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}))\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{y}\in K.$$

从而有

$$P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}^*)=\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}\leqslant\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{x}^*)-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}\leqslant 0.$$

但对于 $\forall\boldsymbol{x}\in K$,有 $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 所以 $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}^*)=0$.证毕.

(ii) 证明方法与定理 1 中(ii) 的证明方法相同,这里不再赘述.

定理 3 设 K 是实 Banach 空间中的非空闭凸集,对于每个 $\boldsymbol{x}\in K$, 集值映射 $T_j(\boldsymbol{x})$, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 是非空弱 * 紧的凸集,则以下结论成立:

(i) $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_T(\boldsymbol{x})$;

(ii) 如果对于 $\forall\boldsymbol{x}\in K$, $\cup_{i=1}^{n}T_i(\boldsymbol{x})$ 是一个凸集,那么有 $P_{T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}(\boldsymbol{x})=\varphi_T(\boldsymbol{x})$.

证明 (i) 若 $\varphi_T(\boldsymbol{x})=+\infty$, 显然 $P_{T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_T(\boldsymbol{x})$ 成立.不妨设对 $\forall\boldsymbol{x}\in K$,有 $\varphi_T(\boldsymbol{x})<+\infty$, 故对于 $\forall\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})$, $\forall\boldsymbol{y}\in K$, $\exists i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}_{i_0},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_{i_0}(\boldsymbol{x}) - f_{i_0}(\boldsymbol{y}) = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\}.$$

又由引理 4 可得

$$\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\} = \inf_{\boldsymbol{t}\in T_0(\boldsymbol{x})}\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle\} + \inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\Delta}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\},\qquad \forall \boldsymbol{x}\in K.$$

令 $g(\boldsymbol{\lambda})=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))$, $s(\boldsymbol{t})=\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle$.令 $\boldsymbol{\lambda}^*=(0,\cdots,1,\cdots,0)$, 其中,非零数处于向量 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 中的第 i_0 位置.此时有 $\inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\Delta} g(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant g(\boldsymbol{\lambda}^*) = f_{i_0}(\boldsymbol{x}) - f_{i_0}(\boldsymbol{y})$.

又由于 $T_{i_0}(\boldsymbol{x}) \subseteq T_0(\boldsymbol{x})$, 所以有

$$\inf_{\boldsymbol{t}\in T_0(\boldsymbol{x})} s(\boldsymbol{t}) \leqslant \inf_{\boldsymbol{t}\in T_{i_0}(\boldsymbol{x})}\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle\} \leqslant \langle \boldsymbol{t}_{i_0},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle.$$

综上所述,对于 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, 有

$$\begin{aligned}
&\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\} = \\
&\quad\inf_{\boldsymbol{t}\in T_0(\boldsymbol{x})}\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle\} + \inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\Delta}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\} \leqslant \\
&\quad\inf_{\boldsymbol{t}\in T_0(\boldsymbol{x})}\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle\} + f_{i_0}(\boldsymbol{x}) - f_{i_0}(\boldsymbol{y}) \leqslant \\
&\quad\langle \boldsymbol{t}_{i_0},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_{i_0}(\boldsymbol{x}) - f_{i_0}(\boldsymbol{y}) = \\
&\quad\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\}.
\end{aligned}$$

于是,对 $\forall \boldsymbol{x}\in K$, 有

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\} \leqslant \sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\}.$$

又由 $\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})$ 的任意性,有

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\} \leqslant \inf_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})\},\qquad \forall \boldsymbol{x}\in K.$$

由引理 1 可知,对每个 $\boldsymbol{x}\in K$, $T_0(\boldsymbol{x})$ 是一个弱 * 紧的凸集, Δ 为紧凸集.令 $h(\boldsymbol{y},(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}))=\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))$, 从而对于固定的 $\boldsymbol{y}\in K$, $h(\boldsymbol{y},\cdot)$ 是一个关于 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})$ 连续的凸函数.对于固定的 $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta$, $h(\cdot,(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda}))$ 是关于 $\boldsymbol{y}$ 的凹函数.所以,由引理 5 可得

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\} = \inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}.$$

从而有 $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi_T(\boldsymbol{x})$.证毕.

(ii) 因为对于 $\forall \boldsymbol{x}\in K$, $\cup_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{x})$ 是一个凸集,所以由引理 3 可知, $\mathrm{co}(\cup_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{x})\times\cup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{e}_i\})=\mathrm{co}(\cup_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{x}))\times\mathrm{co}(\cup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{e}_i\})=T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta$, 其中 $\boldsymbol{e}_i, i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 为单位向量.对 $\forall \boldsymbol{t}_0\times\boldsymbol{\lambda}_0\in\mathrm{co}(\cup_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{x})\times\cup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{e}_i\})$, $\exists \boldsymbol{t}_i^*\in T_i(\boldsymbol{x})$ 和 $\lambda_i^*\geqslant 0, i\in\{1,2,\cdots,$

$n\}$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*=1$, 使得

$$(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\boldsymbol{t}_i^*,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\boldsymbol{e}_i\right).$$

于是对 $\forall \boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})$, 有

$$\begin{aligned}&\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant\\&\quad\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*(\langle \boldsymbol{t}_i^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y}))=\\&\quad\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\boldsymbol{t}_i^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\rangle+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})),\qquad\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\inf_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant\\&\quad\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant\\&\quad\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\left\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\boldsymbol{t}_i^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right\rangle+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y}))\right\},\qquad\forall \boldsymbol{x}\in K.\end{aligned}$$

又由于 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\boldsymbol{t}_i^*=\boldsymbol{t}_0\in \mathrm{co}(\cup_{i=1}^{n}T_i(\boldsymbol{x}))=\mathrm{co}\{T_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,3,\cdots,n},\boldsymbol{\lambda}_0=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\boldsymbol{e}_i$, 所以,由 $\boldsymbol{t}_0\times\boldsymbol{\lambda}_0$ 的任意性可得

$$\begin{aligned}&\varphi_T(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{t}\in T(\boldsymbol{x})}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle \boldsymbol{t}_j,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y})\}\leqslant\\&\quad\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in \mathrm{co}\left(\cup_{i=1}^{n}T_i(\boldsymbol{x})\times\cup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{e}_i\}\right)}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y}))\right\}=\\&\quad\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in \mathrm{co}\left(\cup_{i=1}^{n}T_i(\boldsymbol{x})\right)\times\mathrm{co}\left(\cup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{e}_i\}\right)}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y}))\right\}=\\&\quad\inf_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\lambda}\in T_0(\boldsymbol{x})\times\Delta}\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y}))\right\}=P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}),\qquad\forall \boldsymbol{x}\in K.\end{aligned}$$

再由定理 3 的结论(i)可知, $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})=\varphi_T(\boldsymbol{x})$.证毕.

定理 4　设 K 是实 Banach 空间中的非空闭凸集,对于每个 $\boldsymbol{x}\in K$, 集值映射 $T_j(\boldsymbol{x})$, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 是非空弱 * 紧的凸集,则 $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})\leqslant\phi_T(\boldsymbol{x})$.

注 4　证明方法与定理 3 结论(i)的证明类似,此处省略.

2.3　SGMVVI 和 SGMVI 的间隙函数的全局误差界

定义 2　称集值映射 $H:K\to 2^{X^*}$ 是 μ- 强单调,如果 $\exists\mu>0$, 对于 $\forall \boldsymbol{x}^*\in H(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{y}^*\in H(\boldsymbol{y})$, 使得不等式成立:

$$\langle \boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle\geqslant\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2.$$

定义 3　称实值函数 $S:X\to\mathbf{R}$ 是 ξ- Lipschitz 连续的,如果给定常数 $0<\xi<+\infty$ 且 $\exists L>0$ 对于 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K\subseteq X$, 使得不等式成立:

$$|S(\boldsymbol{x})-S(\boldsymbol{y})|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\xi}.$$

注 5　显然如果一个函数是 ξ- Lipschitz 连续的,那么这个函数是连续的, L 叫做 Lipschitz 系数.

定义 4　设 $F:K\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 的有效域是非空的,定义 $S=\{\boldsymbol{x}\in K:F(\boldsymbol{x})\leqslant 0\}$ 非空,且令 $F_+(\boldsymbol{x})=\max\{F(\boldsymbol{x}),0\}$, $d(\boldsymbol{x},S)=\inf_{\boldsymbol{s}\in S}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})$,则 F 有全局误差界,如果对于 $\exists\mu>0$,

使得

$$d(\boldsymbol{x},S)\leqslant\mu F_+(\boldsymbol{x}),\qquad\forall\boldsymbol{x}\in K.$$

本节主要是在强单调的条件下研究间隙函数的全局误差界,此时对于 ξ- Lipschitz 连续,只考虑当 $\xi=2$ 时的情况.

定理 5 对于每个 $\boldsymbol{x}\in K,T_i(\boldsymbol{x}),i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 是非空弱 * 紧的凸集,并且对于每一 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $f_j(\boldsymbol{x})$ 是 2-Lipschitz 连续,那么以下结论成立:

(i) 如果 $H_0(\boldsymbol{x})$ 是 μ- 强单调且满足 $\mu>2L^*$, 其中 $L^*=\max\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}$; L_j, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 是 $f_j(\boldsymbol{x})$ 的 Lipschitz 系数,则函数 $\sqrt{\varphi_T(\boldsymbol{x})}$ 有全局误差界;

(ii) 如果 $T_0(\boldsymbol{x})$ 是 μ- 强单调且满足 $\mu>2L^*$, 其中 $L^*=\max\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}$; L_j, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 是 $f_j(\boldsymbol{x})$ 的 Lipschitz 系数,则函数 $\sqrt{P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})}$ 有全局误差界.

证明 (i) 设 $\boldsymbol{x}^*\in S_{\mathrm{SGMVVI}}$,则 $\exists\boldsymbol{t}^*\in T(\boldsymbol{x}^*)$, 使得

$$\langle\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\rangle+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\not<0,\qquad\forall\boldsymbol{y}\in K.$$

这意味着对 $\forall\boldsymbol{y}\in K$, $\exists j_y\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_{j_y}^*\in T_{j_y}(\boldsymbol{x}^*)\subseteq H_0(\boldsymbol{x}^*);\\ \langle\boldsymbol{t}_{j_y}^*,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\rangle+f_{j_y}(\boldsymbol{y})-f_{j_y}(\boldsymbol{x}^*)\geqslant 0.\end{cases}\tag{7}$$

由 $\varphi_T(\boldsymbol{x})$ 的定义及引理 1 可知, $T(\boldsymbol{x})$ 是弱 * 紧的,从而对于 $\forall\boldsymbol{x}\in K$, $\exists\boldsymbol{t}^x\in T(\boldsymbol{x})$, 使得

$$\begin{aligned}\varphi_T(\boldsymbol{x})=\sup_{\boldsymbol{y}\in K}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle\boldsymbol{t}_j^x,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y})\}\geqslant\\ \min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle\boldsymbol{t}_j^x,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{y})\},\qquad\forall\boldsymbol{y}\in K.\end{aligned}\tag{8}$$

由于 $f_j(\boldsymbol{x})$ 是 2-Lipschitz 连续,故 $\exists L_j>0$, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $L^*=\max\{L_1,L_2,\cdots,L_n\}$, 从而对于 $\forall j$, 有

$$|f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}^*)|\leqslant L^*\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2.\tag{9}$$

又由于 $H_0(\boldsymbol{x})$ 是 μ- 强单调,所以 $\exists\mu>0$, 使得对于 $\forall\boldsymbol{t}_j^x\in H_0(\boldsymbol{x})$, $\forall\boldsymbol{t}_{j_x}^*\in H_0(\boldsymbol{x}^*)$, 以下不等式成立:

$$\langle\boldsymbol{t}_j^x-\boldsymbol{t}_{j_x}^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2.\tag{10}$$

结合式(7)~(10)有

$$\begin{aligned}\varphi_T(\boldsymbol{x})&\geqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\langle\boldsymbol{t}_j^x-\boldsymbol{t}_{j_x}^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\rangle+f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}^*)\}+\langle\boldsymbol{t}_{j_x}^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\rangle\geqslant\\ &\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2+\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}^*)\}+\langle\boldsymbol{t}_{j_x}^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\rangle=\\ &\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2+\langle\boldsymbol{t}_{j_x}^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\rangle+f_{j_x}(\boldsymbol{x})-f_{j_x}(\boldsymbol{x}^*)+\\ &\left\{\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}^*)\}-(f_{j_x}(\boldsymbol{x})-f_{j_x}(\boldsymbol{x}^*))\right\}\geqslant\\ &\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2+\left\{\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}^*)\}-(f_{j_x}(\boldsymbol{x})-f_{j_x}(\boldsymbol{x}^*))\right\}\geqslant\\ &\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2-2L^*\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2=(\mu-2L^*)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in K.\end{aligned}$$

所以,函数 $\sqrt{\varphi_T(\boldsymbol{x})}$ 有全局误差界.

(ii) 设 $\boldsymbol{x}^*\in S_{\mathrm{SGMVI}}$, 则 $\exists\boldsymbol{t}^*\times\boldsymbol{\lambda}^*\in T_0(\boldsymbol{x}^*)\times\Delta$, 有

$$\langle\boldsymbol{t}^*,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*\rangle+\sum_{j=1}^n\lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{y})-f_j(\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{y}\in K.$$

由 $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})$ 的定义及引理 1 可知,对于每个 $\boldsymbol{x}\in K,T_0(\boldsymbol{x})$ 也是非空弱 * 紧的凸集,从而对于

$\forall \boldsymbol{x} \in K, \exists \boldsymbol{t}^x \times \boldsymbol{\lambda}^x \in T_0(\boldsymbol{x}) \times \Delta$, 使得

$$P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{y}\in K}\left\{\langle \boldsymbol{t}^x, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^x(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y}))\right\}. \tag{11}$$

又 $f_j(\boldsymbol{x})$ 是 2-Lipschitz 连续,故 $\exists L_j > 0$, $j \in \{1,2,\cdots,n\}$, $L^* = \max\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$, 对于 $\forall j$, 有

$$|f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}^*)| \leqslant L^* \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2. \tag{12}$$

又由于 $T_0(\boldsymbol{x})$ 是 μ- 强单调,对于 $\boldsymbol{t}^x \in T_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{t}^* \in T_0(\boldsymbol{x}^*)$, $\exists \mu > 0$, 使得

$$\langle \boldsymbol{t}^x - \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\rangle \geqslant \mu \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2. \tag{13}$$

结合式(11)~(13)有

$$\begin{aligned}
P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{y}\in K}&\left\{\langle \boldsymbol{t}^x, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^x(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y}))\right\} \geqslant \\
&\langle \boldsymbol{t}^x - \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\rangle + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^x(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}^*)) + \langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\rangle = \\
&\langle \boldsymbol{t}^x - \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\rangle + \langle \boldsymbol{t}^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\rangle + \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^*(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}^*)) + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^x - \lambda_j^*)(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}^*)) \geqslant \\
&\mu\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^x - \lambda_j^*)(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}^*)) \geqslant \\
&\mu\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - L^*\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^x - \lambda_j^*| \geqslant \\
&\mu\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2 - 2L^*\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2 = (\mu - 2L^*)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in K.
\end{aligned}$$

所以, 函数$\sqrt{P_{T_0\times\Delta}}$ 有全局误差界.证毕.

3 结 论

本文主要继续并推广了 Konnov 对向量变分不等式的研究,证明了构造的 $\varphi_T(\boldsymbol{x})$, $\phi_T(\boldsymbol{x})$, $P_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})$, $q_{T_0\times\Delta}(\boldsymbol{x})$ 是 SGMVVI(WGMVVI)和 SGMVI(WGMVI)的间隙函数,使得 SGMVVI(WGMVVI)在适当的条件下达到标量化的目的.得出了广义混合向量变分不等式的解在适当条件下可以转化为经典意义下标量变分不等式的解的问题的结论,并在文章的最后给出适当的条件,得出了间隙函数的全局误差界的结果.

致谢 本文作者衷心感谢西华师范大学校基金青年项目(15D005)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] Konnov I V. A scalarization approach for vector variational inequalities with applications[J]. *Journal of Global Optimization*, 2005, **32**(4): 517-527.

[2] Soleimani-Damaneh M. The gap function for optimization problems in Banach spaces[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2007, **69**(2): 716-723.

[3] FAN Jiang-hua, WANG Xiao-guo. Gap functions and global error bounds for set-valued variational inequalities[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, **233**(11): 2956-2965.

[4] Solodov M V. Merit functions and error bounds for generalized variational inequalities[J]. *Journal of Mathematic Analysis and Applications*, 2003, **287**(2): 405-414.

[5] LI Ming-hua. Error bounds of regularized gap functions for weak vector variational inequality problems[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014, **2014**: 331.

[6] Mastroeni G. Gap functions for equilibrium problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2003, **27**(4): 411-426.

[7] Konnov I V. On the generalized vector variational inequality problem[J]. *Journal of Mathematic Analysis and Applications*, 1997, **206**(1): 42-58.

[8] Giannessi F. Theorems of the alternative, quadratic programs, and complementarity problems [M]//Cottle R W, Giannessi F, Lion J L, ed. *Variational Inequality and Complementarity Problems*. Chichester, England: John Wiley and Sons, 1980: 151-186.

[9] ZHANG Wen-yan, CHEN Jia-wei, XU Shu, et al. Scalar gap functions and error bounds for generalized mixed vector equilibrium problems with applications[J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015, **2015**: 169.

[10] Chen G Y. Existence of solutions for a vector variational inequality: an extension of Hartmann-Stampacchia theorem[J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1992, **74**(3): 445-456.

[11] Yang X Q, Yao J C. Gap functions and existence of solutions to set-valued vector variational inequalities[J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2002, **115**(2): 407-417.

[12] CHEN Guang-ya, YANG Xiao-qi. Vector complementarity problem and its equivalences with weak minimal element in ordered spaces[J]. *Journal of Mathematic Analysis and Applications*, 1990, **153**(1): 136-158.

[13] CHEN Guang-ya, CHENG Ging-min. Vector variational inequality and vector optimization problem[M]//*Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1987, **258**: 408-416.

[14] Chen G Y, Craven B D. A vector variational inequality and optimization over an efficient set [J]. *Zeitschrift fur Operation Research*, 1990, **34**(1): 1-12.

[15] Yang X Q. Vector variational inequality and its duality[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1993, **21**(11): 869-877.

[16] Yu S J, Yao J C. On vector variational inequalities[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1996, **89**(3): 749-769.

[17] Li J, Mastroeni G. Vector variational inequalities involving set-valued mappings via scalarization with applications to error bounds for gap functions[J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2010, **145**(2): 355-372.

[18] Li J, Huang N J, Yang X Q. Weak sharp minima for set-valued vector variational inequalities-with an application[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, **205**(2): 262-272.

[19] TANG Guo-ji, HUANG Nan-jing. Gap function and global error bounds for set-valued mixed variational inequalities[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2013, **17**(4): 1267-1286.

[20] Zalinescu C. *Convex Analysis in General Vector Spaces*[M]. World Scientific Publishing Co Inc, 2002.

[21] Rockafellar R T, Wets R J-B. *Variational Analysis*[M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[22] Kneser H. Sur un theoreme fondamental de la theorie des jeux C R[J]. *Academy Science Paris*, 1952, **234**: 2418-2420.

[23] LI Guo-yin, TANG Chun-ming, WEI Zeng-xin. Error bound results for generalized D-gap functions of nonsmooth variational inequality problems[J]. *Journal of Computational and Ap-

plied Mathematics, 2010, **233**(11): 2795-2806.

[24] Chen G Y, Goh C J, Yang X Q. On gap functions for vector variational inequalities[M]//Giannessi F, ed. *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria. Nonconvex Optimization and Its Applications*, Vol **38**. Springer US, 2000: 55-72.

[25] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 等. 实变函数与泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.(XIA Dao-xin, WU Zhuo-ren, YAN Shao-zong, et al. *Real Analysis and Functional Analysis*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1978.(in Chinese))

Scalarization of Mixed Vector Variational Inequalities and Error Bounds of Gap Functions

LIU Dan-yang, JIANG Ya

(*College of Mathematics and Information*, *China West Normal University*, *Nanchong*, *Sichuan* 637002, *P.R.China*)

Abstract: The Konnov scalarization method for variational inequality problems was used to further generalize the classical strongly variational inequalities (SVIs) and the classical weakly variational inequalities (WVIs). The strongly generalized mixed vector variational inequalities (SGMVVIs) and the weakly generalized mixed vector variational inequalities (WGMVVIs) were studied based on set-valued mappings in view of their gap functions. Under proper conditions, the relationship between the gap function of the strongly generalized mixed set-valued variational inequality (SGMVI) and that of the SGMVVI, and the relationship between the gap functions of the WGMVVI and the SGMVI, were discussed. At last, the global error bounds of the gap functions were obtained.

Key words: generalized mixed vector variational inequality; set-valued mapping; scalarization; gap function; error bound

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11371015)

引用本文/Cite this paper:

刘丹阳, 蒋娅. 混合向量变分不等式标量化及间隙函数误差界[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(6): 715-726.

LIU Dan-yang, JIANG Ya. Scalarization of mixed vector variational inequalities and error bounds of gap functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(6): 715-726.