

离散系统运动方程的 Galerkin 有限元 EEP 法自适应求解*

邢沁妍, 杨杏, 袁驷

(清华大学 土木工程系; 土木工程安全与耐久教育部重点实验室, 北京 100084)

(我刊编委庄茁推荐)

摘要: 对于结构动力分析中的离散系统运动方程, 现有算法的计算精度和效率均依赖于时间步长的选取, 这是时间域问题求解的难点. 基于 EEP (element energy projection) 超收敛计算的自适应有限元法, 以 EEP 超收敛解代替未知真解, 估计常规有限元解的误差, 并自动细分网格, 目前已对诸类以空间坐标为自变量的边值问题取得成功. 对离散系统运动方程建立弱型 Galerkin 有限元解, 引入基于 EEP 法的自适应求解策略, 在时间域上自动划分网格, 最终得到所求时域内任一时刻均满足给定误差限的动位移解, 进而建立了一种时间域上的新型自适应求解算法.

关键词: 离散系统; 运动方程; Galerkin 有限元; 自适应求解; EEP 法

中图分类号: O242.21

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370288

引言

有限元法 (finite element method, 简称 FEM) 是一种通用的数值计算方法, 在结构动力响应分析中也得到极为广泛的应用. 对于受动力荷载作用的连续体, FEM 通过对空间维度的分片插值离散, 最终将问题归结为求解形如 $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P$ 的离散系统运动方程, 在数学上即为二阶常微分方程组 (ordinary differential equations, 简称 ODEs) 初值问题, 常用 Newmark- β 法、Wilson- θ 法等逐步积分法来求解. 这类方法对外荷载和运动变量均按时间步长进行离散, 其收敛性、计算精度、数值稳定性、计算效率均与时间步长的选择密切相关^[1-2]. 20 世纪 90 年代, 钟万勰等对线性定常系统提出了暂态历程计算的精细时程积分法^[3-5], 并得到了很多发展^[6-8]. 除此之外, 亦可对时间域进行有限元离散, 在时间步长内进行有限元插值或构造 Galerkin 弱型积分, 最终再次归结为时间步长的递推计算^[2].

自适应求解是现代有限元计算的新型求解方式. 用户只需输入解答精度所要求的误差限, 即可得到按某种方式度量满足该误差限的解答, 其计算网格由算法自动生成. 国内外多名学者已经在有限元自适应求解方面取得成果. 袁驷等基于数学和力学概念, 提出了一种有限元超收敛后处理算法——单元能量投影 (EEP) 法^[9-10], 且已建立了一套完整统一的 FEM 自适应求解

* 收稿日期: 2016-09-21; 修订日期: 2016-11-17

基金项目: 国家自然科学基金 (51508305; 51378293; 51078199)

作者简介: 邢沁妍 (1981—), 女, 讲师, 博士 (通讯作者. E-mail: xingqy@tsinghua.edu.cn);

杨杏 (1988—), 男, 硕士生 (E-mail: xihuanyuye@126.com);

袁驷 (1953—), 男, 教授, 博士 (E-mail: yuans@tsinghua.edu.cn).

算法,该法通用“有限元解→超收敛解→网格细分”这一“三步走”的自适应策略,以 EEP 超收敛解估计误差并指导网格划分,最终给出按最大模度量逐点满足给定误差限的解答,已对各类一维线性问题^[11-12],弹性力学平面问题、中厚板壳弯曲等二维线性问题^[13-14]、规则区域的三维线性问题^[15]、特征值问题^[16]、一维非线性问题^[17]、边界非线性问题^[18]等取得一系列成功。

鉴于时域问题的计算精度和效率与时间步长的选取密切相关这一特点和难点,自适应分析中的误差估计和网格自动划分技术对其求解具有天然的适应性和显著的突破性.本文将基于 EEP 法的有限元自适应技术运用到时域问题,建立动力响应分析中离散系统运动方程的 Galerkin 有限元自适应求解方法,以离散体系运动方程组这一常系数 ODEs 初值问题为对象,首先建立其 Galerkin 有限元求解的弱形式,然后给出超收敛计算的 EEP 法简约格式公式以及相应的自适应求解策略,最后以典型的数值算例展示本文算法的高效性、可靠性和适用性。

1 问题描述及 Galerkin 有限元解

考虑如下离散系统运动方程,即二阶 ODEs 初值问题:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}, & 0 < t \leq T, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1a)$$

$$\quad (1b)$$

其中, $\mathbf{u} = (u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_n(t))^T$ 为 n 个离散自由度的动位移函数 $u_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 组成的向量, $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ 分别表示由 $\dot{u}_i \equiv du_i/dt, \ddot{u}_i \equiv d^2u_i/dt^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 组成的速度向量和加速度向量; \mathbf{L} 为算子矩阵,对于线性振动问题,质量阵 \mathbf{M} 、刚度阵 \mathbf{K} 、阻尼阵 \mathbf{C} 为常系数阵,荷载项 \mathbf{P} 为时间 t 的函数; n 阶方阵 \mathbf{M} 可逆,且设式(1)的解存在且唯一;时域的上界为 T ($T > 0$)。

定义双线性型和线性型分别为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^T (-\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}^T \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}^T \mathbf{K}\mathbf{u}) dt, \quad (\mathbf{P}, \mathbf{v}) = \int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{P} dt. \quad (2)$$

考虑分部积分后

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^T \mathbf{v}^T \mathbf{L}\mathbf{u} dt - \mathbf{v}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} \Big|_0^T. \quad (3)$$

其 Galerkin 法弱形式归结为求 $\mathbf{u} \in H_E^1$ 使得

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{P}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_V^1, \quad (4)$$

其中, H_E^1 为所有满足本质边界(位移初始)条件且直到一阶导数均平方可积的函数向量空间, H_V^1 为所有满足在求解域右端为 0 且直到一阶导数均平方可积的函数向量空间.需要注意的是,这里要求 $\mathbf{u} \in H_E^1$ 满足 $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ 而 $\mathbf{v} \in H_V^1$ 满足 $\mathbf{v}(T) = \mathbf{0}$, 即 $H_V^1 \neq H_E^1$. 这是与常规 Galerkin 法求解边值问题所不同的。

对求解域 $(0, T]$ 做常规的有限元离散,将其划分为 N_e 个单元,考虑两端结点坐标记为 \bar{t}_1, \bar{t}_2 的标准单元 e ,其长度记为 h . 试探函数向量和检验函数向量分别由试探形函数阵和检验形函数阵插值得到,则式(1)的 Galerkin 有限元解归结为求解 $\mathbf{u}^h \in S_u^h \subset H_E^1$ 使得

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{P}, \mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in S_v^h \subset H_V^1. \quad (5)$$

由此即可生成有限元整体刚度方程并求得常规有限元解。

由式(4)和(5)易得,有限元解的误差 $\mathbf{e}^h = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$ 满足整体投影定理:

$$a(\mathbf{e}^h, \mathbf{v}^h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}^h \in S_v^h. \quad (6)$$

2 EEP 简约格式超收敛解

假设投影定理式(6)在单个单元 e 上仍近似成立,即如下单元投影定理近似成立:

$$a^e(\mathbf{e}^h, \mathbf{v}^h) \equiv \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} (-\dot{\mathbf{v}}^h)^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{e}}^h + (\mathbf{v}^h)^T \mathbf{C}\dot{\mathbf{e}}^h + (\mathbf{v}^h)^T \mathbf{K}\mathbf{e}^h dt = 0, \quad (7)$$

$$\forall \mathbf{v}^h \in S_e^h = \left\{ \mathbf{v}^h \mid \mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^2 \mathbf{N}_i^* \mathbf{v}_i^h, \quad \mathbf{v}_i^h \in R^n \right\}.$$

利用分部积分并作一些略舍即可推得 EEP 法超收敛计算公式.注意到,式(7)中检验函数向量 $\mathbf{v}^h \in S_e^h$ 并不需要满足任何边界条件,因此对于式(1a)的边值问题也适用.文献[19-20]已采用线性形函数阵 $\mathbf{N}_i^* = \bar{N}_i \mathbf{I} (i=1,2)$ 推导出式(1a)边值问题 EEP 法简约格式超收敛解的计算公式,继而得到离散系统运动方程式(1)的 EEP 法简约格式超收敛位移计算公式为

$$\mathbf{u}_a^* = \mathbf{u}_a^h - \mathbf{M}_a^{-1} \left((h\bar{N}_{1a}) \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_a} \bar{N}_2 (\mathbf{P} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) dt + (h\bar{N}_{2a}) \int_{\bar{t}_a}^{\bar{t}_2} \bar{N}_1 (\mathbf{P} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) dt \right), \quad (8)$$

其中 \bar{t}_a 为 (\bar{t}_1, \bar{t}_2) 上的任一时刻, $(\cdot)_a$ 表示在时刻 \bar{t}_a 处取值;上标 * 表示超收敛解; $\bar{N}_i (i=1,2)$ 为线性形函数.大量数值试验表明,对于 $m (m > 1)$ 次多项式单元,式(8)给出的超收敛位移解可以达到 h^{m+2} 阶的精度,比常规有限元解的收敛阶至少高一阶;最新的研究对这一收敛阶给出了完整的数学证明,限于篇幅将另文发表.

3 自适应求解策略

本文自适应求解的目标是在精确解向量 \mathbf{u} 未知的情况下,事先给定误差限向量 $\mathbf{T}_1 = (T_{11} \ T_{12} \ \cdots \ T_{1n})^T$, 寻求一个优化的有限元网格 π , 使得该网格上有限元解答 \mathbf{u}^h 的所有分量按最大模度量均满足相对应的给定误差限,即逐个分量逐单元满足

$$\max_{0 < t \leq T} |u_i - u_i^h| \leq T_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

由于精确解 \mathbf{u} 未知,使用比有限元解精度更高的超收敛解 \mathbf{u}^* 代替 \mathbf{u} 来估计误差,即要求有限元解 \mathbf{u}^h 所有分量满足

$$\max_{0 < t \leq T} |u_i^* - u_i^h| \leq T_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

亦即,本文对向量型变量进行自适应求解,对其所有分量均实施误差控制,各个分量的误差限可以相同或不同,最终的自适应结果使得所有分量各自按最大模度量均满足对应的误差限,即逐个分量逐点自适应.

以 EEP 超收敛解估计误差并指导网格划分,式(1)所示的运动方程组按以下“三步走”策略进行基于 EEP 法的 Galerkin 有限元自适应求解:

- 1) 有限元解:在当前网格(初始网格一般取一个单元即可)下按式(5)进行 Galerkin 有限元计算,得到有限元解 \mathbf{u}^h .
- 2) 超收敛解:逐单元用式(8)计算 EEP 简约格式超收敛解 \mathbf{u}^* .
- 3) 网格细分:逐单元逐分量检验式(10)是否满足.若某单元不满足,则用均差法^[12]确定插入结点位置,将该单元细分为两个单元;所有单元检验后得到新的网格,返回步骤1).若所有单元所有分量均满足式(10),求解结束.

需要说明的是,这里自适应网格细分时,采用了文献[21]提出的向量型变量网格生成的均差法.即在单元 e 上,待求的 n 个分量逐个按式(10)检验,之后对不满足的分量予以保留、参与网格细分,而已经满足的分量不再参与网格细分.

4 数值算例

基于上述自适应求解策略,本文采用 Fortran90 编写了算法程序,以下给出若干典型算例

以验证本文方法.算例中若无特别说明,均为采用无量纲数值计算;自适应求解初始单元数均为1;各算例待求的所有分量均取相同的误差限 $T_{\varepsilon} = 10^{-4} (i = 1, 2, \dots, n)$. 记 m 为单元次数, N_e 为单元总数, π^* 为最终得到的自适应有限元网格, h_{\max} 为单元长度的最大值, h_{\min} 为单元长度的最小值. 算例中给出最大的误差绝对值 $e_{\max}^h = \max_{i=1,2,\dots,n} (\max_{0 < t \leq T} |u_i - u_i^h|)$, 以说明算法是否有效. 自适应中, 每完成一轮“有限元解 \rightarrow EEP 解 \rightarrow 网格细分”即记为自适应计算一步, 总步数记为 N_a .

例 1 单自由度体系带阻尼受迫振动. 考虑质量和刚度均为 1、粘性阻尼比为 $\zeta = 0.02$ 的单自由度带阻尼受迫振动问题, 外荷载 $P = \sin(\omega t)$, $\omega = 0.2$, 初始条件为 $u_0 = 0, \dot{u}_0 = 1$. 精确解如图 1 所示.

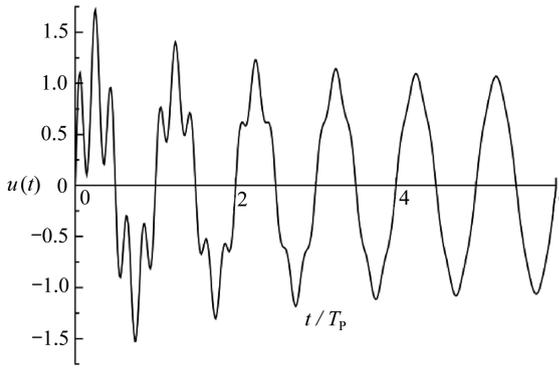


图 1 例 1 精确解 $u(t)$

Fig. 1 Exact solution $u(t)$ of example 1

首先取时间域 $0 \leq t/T_p \leq 4$ 进行计算, 其中 $T_p = 2\pi/\omega$ 为外荷载周期. 在该时域上, 瞬态反应不断衰减但尚未消失, 精确解具有较高的振荡性. 采用 $m = 4, 5, 6$ 次元进行自适应求解, 结果列于表 1; 可见, 各网格上相应有限元解的误差均逐点满足给定误差限. 5 次元自适应结束后其有限元解误差分布见图 2(a), 超收敛解的误差分布如图 2(b); 可以看出, EEP 超收敛解的误差比常规有限元解的误差约小一个量级, 用它来代替真解估计误差并指导网格划分是合理可靠的. 对于这样一个震荡性较大、情况较复杂的问题, 本文的自适应方法保证了足够的精度和效力.

表 1 $m = 4, 5, 6$ 次元自适应求解的结果

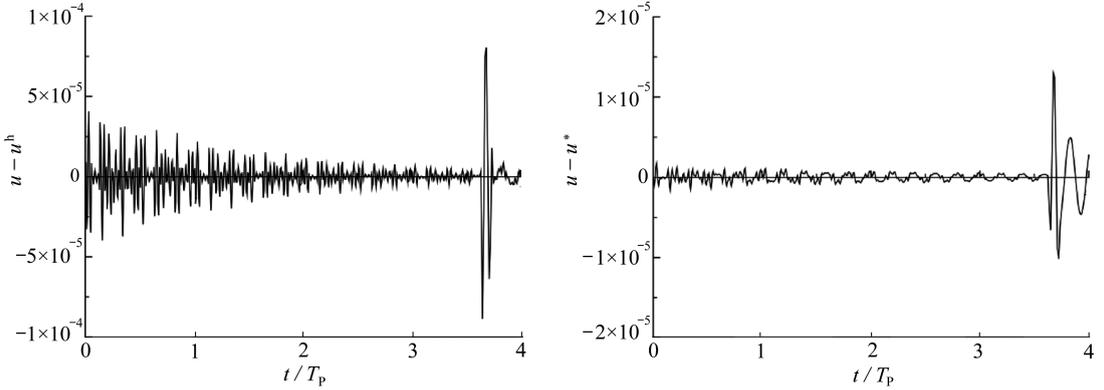
Table 1 Results of the adaptive solution for $m = 4, 5, 6$

m	N_e	e_{\max}^h	h_{\max}	h_{\min}	N_a
4	93	0.990E-4	2.274	0.835	8
5	63	0.886E-4	3.927	1.963	6
6	43	0.939E-4	4.524	1.810	6

再取较大的时间域 $0 \leq t/T_p \leq 10$ 即 $0 \leq t \leq 100\pi$ 进行求解, 本算法仍然成功. 如 $m = 6$ 次元时, 自适应计算 8 步得到 93 个单元的最终网格, 其有限元解最大误差绝对值为 $0.535\text{E}-4$, 满足误差限.

例 2 多自由度体系有阻尼受迫振动. 图 3 所示的三层剪切型框架结构, 体系的位移状态用三质点离静止位置的位移坐标 $\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$ 表示, 阻尼比取 $\zeta = 5\%$. 其质量阵、刚度阵以及前三阶自振频率生成的 Caughey 阻尼阵如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3\,000 & -1\,200 & 0 \\ -1\,200 & 1\,800 & -600 \\ 0 & -600 & 600 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7.463 & -1.774 & -0.225 \\ -1.774 & 4.763 & -1.141 \\ -0.225 & -1.141 & 2.260 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (11)$$



(a) 有限元解误差 (a) Errors of the FEM solution
 (b) 超收敛解误差 (b) Errors of the EEP solution

图 2 $m = 5$ 次元求解最终网格 π^* 的误差分布 ($N_e = 63$)

Fig. 2 Distribution of errors on mesh π^* for $m = 5$ ($N_e = 63$)

输入简谐荷载向量

$$\mathbf{F} = (\sin(10t) \quad \sin(10t) \quad \sin(10t))^T,$$

初始位移取 0, 初始速度

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = (1/m_1 \quad 1/m_2 \quad 1/m_3)^T.$$

在数学符号计算软件 Maple 16 上编制代码, 以其高精度数值计算的功能求得振型叠加法的解, 相比于给定的误差限, 该解的精度足够高, 视其为精确解以检验本文方法有限元解的精度. 取定义域 $0 \leq t \leq 0.4\pi$ 进行分析. 采用 $m = 4, 5, 6$ 次单元进行自适应求解, 结果列于表 2; 其中 $m = 4$ 次元的自适应网格的端点分布如表 3 所示, 其振型叠加法解及有限元解的误差如图 4 所示.

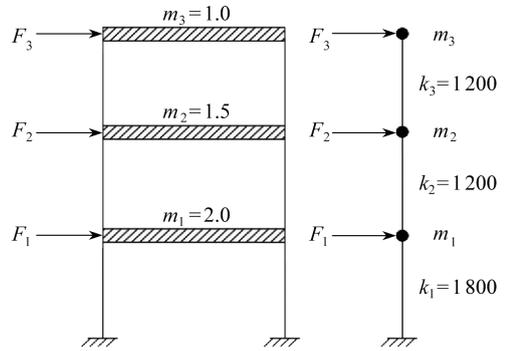


图 3 三层剪切型框架结构模型

Fig. 3 A shear frame model with 3 stories

表 2 $m = 4, 5, 6$ 次元自适应求解结果

Table 2 Results of the adaptive solution for $m = 4, 5, 6$

m	N_e	e_{\max}^h	h_{\max}	h_{\min}	N_a
4	6	0.595E-4	0.274	0.146	3
5	5	0.486E-4	0.352	0.188	3
6	3	0.907E-4	0.447	0.391	2

表 3 $m = 4$ 次元求解最终网格 π^* 的端结点分布 ($N_e = 6$)

Table 3 Distribution of end nodes of mesh π^* for $m = 4$ ($N_e = 6$)

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
π^*	0.000	0.214	0.402	0.670	0.944	1.111	1.257

例 3 考虑文献[22]中的钢筋混凝土烟囱, 将其简化为集中质量的悬臂梁如图 5 所示, 其中 $m_g = 1.5 \times 10^3 \text{ kg}$, $EI = 2.26 \times 10^{10} \text{ kN}\cdot\text{m}^2$, $h_g = 30.48 \text{ m}$, 顶端从初始时刻突加一集中荷载作用 $P(t) = 4.448 \times 10^6 \text{ kN}$, 忽略阻尼. 则式(1)中对应的参数为

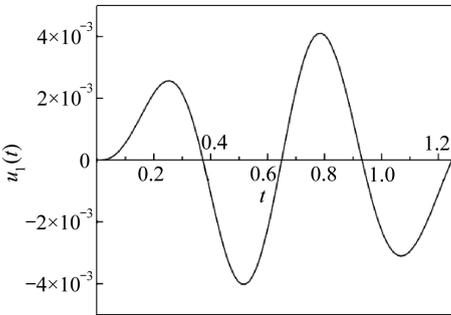
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = m_g \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0.5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 18.83 & -11.9 & 4.773 & -1.193 & 0.1989 \\ & 14.65 & -10.71 & 4.177 & -0.6961 \\ & & 14.06 & -9.514 & 2.586 \\ & \text{sym} & & 9.878 & -3.646 \\ & & & & 1.608 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (12)$$

求解域取 $0 \leq t \leq 1$. 仍然采用 Maple 16 求得本例振型叠加法的解, 视其为精确解检验本文方法求得的有限元解的精度. 采用 $m = 4, 5, 6$ 次单元进行自适应求解, 结果列于表 4; 最终各网格上各自由度动位移的有限元解的误差均逐点满足给定误差限.

表 4 $m = 4, 5, 6$ 次单元自适应求解的结果

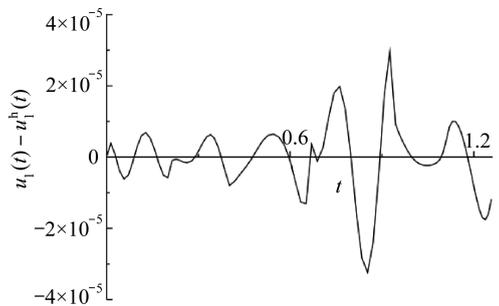
Table 4 Results of the adaptive solution for $m = 4, 5, 6$

m	N_e	e_{\max}^h	h_{\max}	h_{\min}	N_a
4	44	0.921E-4	0.032	0.014	6
5	32	0.973E-4	0.046	0.020	6
6	25	0.515E-4	0.054	0.028	5



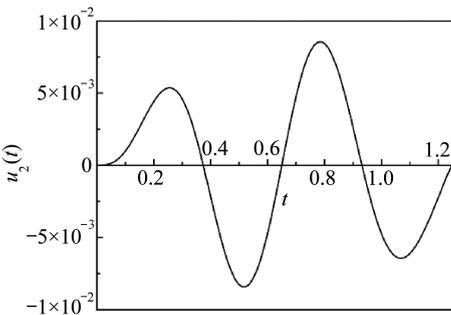
(a) 振型叠加法解 $u_1(t)$

(a) $u_1(t)$ with the mode superposition method



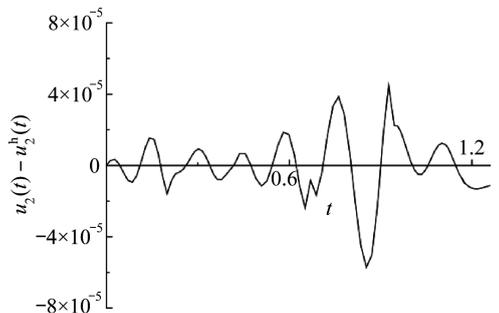
(b) 有限元解误差 $u_1(t) - u_1^h(t)$

(b) FEM error $u_1(t) - u_1^h(t)$



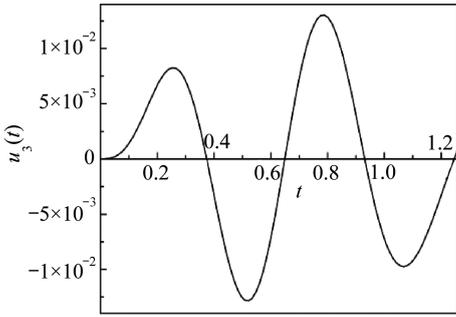
(c) 振型叠加法解 $u_2(t)$

(c) $u_2(t)$ with the mode superposition method



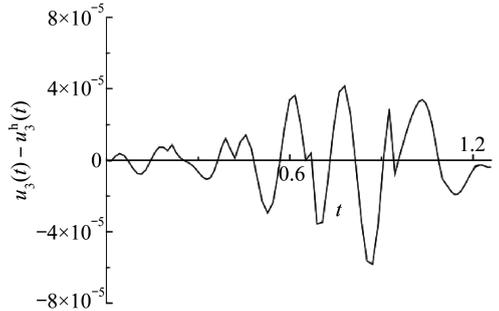
(d) 有限元解误差 $u_2(t) - u_2^h(t)$

(d) FEM error $u_2(t) - u_2^h(t)$



(e) 振型叠加法解 $u_3(t)$

(e) $u_3(t)$ with the mode superposition method



(f) 有限元解误差 $u_3(t) - u_3^h(t)$

(f) FEM error $u_3(t) - u_3^h(t)$

图 4 振型叠加法解和 4 次元自适应网格 π^* 上的有限元解误差分布

Fig. 4 The errors between solutions with the adaptive FEM and the mode superposition method

例 4 常截面杆件无阻尼轴向受迫振动. 一根 $x = 0$ 端固定、 $x = l$ 端自由的均质等截面杆件, 沿杆轴作用均匀分布的轴向力 $(P_1/l) \sin(\omega t)$, 该杆的稳态强迫振动解析解^[23]:

$$u = \frac{4P_1 \sin(\omega t)}{\pi \rho A l} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(p_i x/a)}{i(p_i^2 - \omega^2)},$$

$$p_i = \frac{i\pi a}{2l}, \quad (13)$$

其中 $a = \sqrt{E/\rho}$, E 为杆件的弹性模量, ρ 为杆件的密度; A 为截面积, l 为杆长. 采用无量纲计算, 上述参数均取 1; 均布荷载取 $P_1 = 1, \omega = 4$.

按照常规有限元法, 将杆件沿杆长等分为 2 个单元, 用 2 次 Lagrange 函数进行插值, 将杆件在空间维度 x 上进行离散, 得到形如式 (1) 的运动方程组, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.2667 & 0.0333 & 0 & 0 \\ & 0.1333 & 0.0333 & -0.0167 \\ & \text{sym} & 0.2667 & 0.0333 \\ & & & 0.0667 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10.6667 & -5.3333 & 0 & 0 \\ & 9.3333 & -5.3333 & 0.6667 \\ & \text{sym} & 10.6667 & -5.3333 \\ & & & 4.6667 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3333 \\ 0.1667 \\ 0.3333 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \sin(4t). \end{cases} \quad (14)$$

在时间维度 $0 < t < 1$ 上, 采用 $m = 2, 3$ 次单元对式 (14) 这一运动方程组进行自适应求解, 仍将 Maple 16 高精度数值计算出的振型叠加法解看作精确解来检验本文解, 其结果列于表 5.

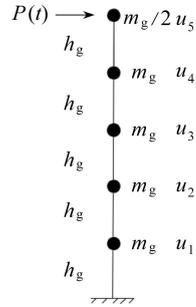


图 5 集中质量的悬臂梁

Fig. 5 A cantilever beam with lumped masses

其 2 次元(与空间维度有限元单元次数相同)自适应求解的时间网格分布如表 6.

表 5 $m = 2, 3$ 次元自适应求解的结果

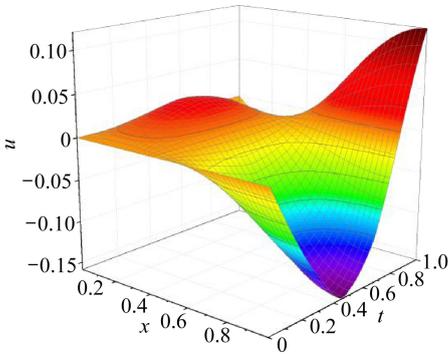
Table 5 Results of the adaptive solution for $m = 2, 3$

m	N_e	e_{\max}^h	h_{\max}	h_{\min}	N_a
2	10	0.803E-4	0.120	0.072	4
3	4	0.749E-4	0.250	0.250	2

表 6 二次元网格 π^* 的端结点分布 ($N_e = 10$)

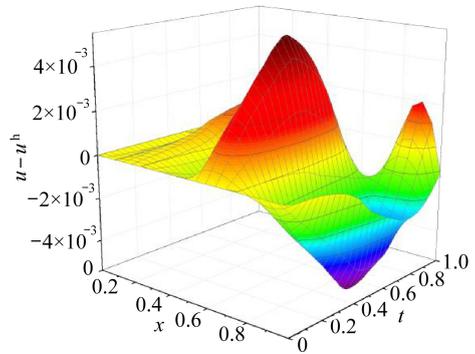
Table 6 Distribution of end nodes of mesh π^* for $m = 2 (N_e = 10)$

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
π^*	0.000	0.120	0.240	0.348	0.456	0.528	0.600
t_i	t_7	t_8	t_9	t_{10}			
π^*	0.700	0.800	0.900	1.000			



(a) 精确解

(a) The exact solution

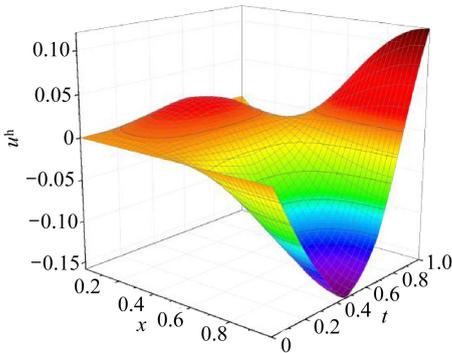


(b) 有限元误差

(b) Errors of the FEM solution

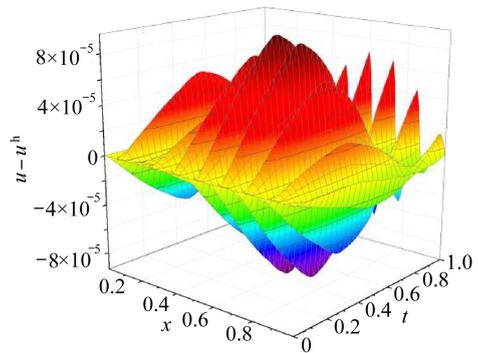
图 6 精确解及沿杆长等分为 2 个单元的有限元解的误差分布

Fig. 6 The exact solution and the error distribution of the FEM solution with 2 elements divided along the length



(a) 有限元解

(a) The FEM solution



(b) 有限元解的误差

(b) Errors of the FEM solution

图 7 沿杆长等分为 8 个单元的有限元解及其误差分布

Fig. 7 The FEM solution and its error distribution with 8 elements divided along the length

自适应求得式(14)的解答后,即可按常规有限元法求得 $0 < t < 1$ 时整个杆件的动位移有限元解,与精确解(13)相比,其误差如图 6 所示,整个杆件上动位移的最大误差为 $0.544E-3$.

将杆件在空间维度上继续加密,等分为 8 个单元,仍采用 2 次 Lagrange 函数进行插值,最终导出包含 16 个方程的运动方程组,仍采用本文方法在时间区域上进行 2 次元自适应求解,此时整个杆件上常规有限元动位移解的误差如图 7 所示,最大误差为 $0.553E-5$ 。由此,可以将本文方法进一步推广至整个杆件在空间、时间两个维度上同时进行自适应求解,从而建立结构受迫振动分析的新解法。

5 结 语

本文对离散运动方程组实现了基于 EEP 法的 Galerkin 有限元自适应分析,其求解思想和实施策略对一般性的变系数常微分方程组初值问题仍然适用,可进一步推广建立时-空混合问题的自适应分析方法,为结构受迫振动等时域相关问题的求解开辟了新的思路。

参考文献(References):

- [1] 刘晶波, 杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005. (LIU Jing-bo, DU Xiu-li. *Structural Dynamics*[M]. Beijing: China Machine Press, 2005. (in Chinese))
- [2] 张雄, 王天舒, 刘岩. 计算动力学[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2015. (ZHANG Xiong, WANG Tian-shu, LIU Yan. *Computational Dynamics*[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2015. (in Chinese))
- [3] 钟万勰. 结构动力方程的精确时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136. (in Chinese))
- [4] Zhong W X, Williams F W. A precise time step integration method[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 1994, **208**(6): 427-430.
- [5] Zhong W X. On precise integration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **163**(1): 59-78.
- [6] 刘婷婷, 张文首, 林家浩. 基于 Householder 方法的子域精细积分[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(4): 535-539. (LIU Ting-ting, ZHANG Wen-shou, LIN Jia-hao. Subdomain precise integration method based on Householder method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(4): 535-539. (in Chinese))
- [7] 谭述君, 高强, 钟万勰. Duhamel 项的精细积分方法在非线形微分方程数值求解中的应用[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(5): 752-758. (TAN Shu-jun, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Applications of Duhamel term's precise integration method in solving nonlinear differential equations [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(5): 752-758. (in Chinese))
- [8] 高强, 吴锋, 张洪武, 等. 大规模动力系统改进的快速精细积分方法[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(4): 493-498. (GAO Qiang, WU Feng, ZHANG Hong-wu, et al. A fast precise integration method for large-scale dynamic structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(4): 493-498. (in Chinese))
- [9] 袁驷, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, **21**(2): 1-9. (YUAN Si, WANG Mei. An element-energy-projection method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional FEM[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(2): 1-9. (in Chinese))
- [10] 王枚, 袁驷. Timoshenko 梁单元超收敛结点应力的 EEP 法计算[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(11): 1124-1134. (WANG Mei, YUAN Si. Computation of super-convergent nodal stresses of

- Timoshenko beam elements by EEP method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(11): 1124-1134.(in Chinese)
- [11] 袁驷, 和雪峰. 基于 EEP 法的一维有限元自适应求解[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(11): 1280-1291.(YUAN Si, HE Xue-feng. Self-adaptive strategy for one-dimensional finite element method based on EEP method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(11): 1280-1291.(in Chinese))
- [12] 袁驷, 邢沁妍, 王旭, 等. 基于最佳超收敛阶 EEP 法的一维有限元自适应求解[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(5): 533-543.(YUAN Si, XING Qin-yan, WANG Xu, et al. Self-adaptive strategy for one-dimensional finite element method based on EEP method with optimal super-convergence order[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(5): 533-543.(in Chinese))
- [13] 袁驷, 方楠, 王旭, 等. 二维有限元线法自适应分析的若干新进展[J]. 工程力学, 2011, **28**(3): 1-8.(YUAN Si, FANG Nan, WANG Xu, et al. New progress in self-adaptive analysis of two-dimensional finite element method of lines[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, **28**(3): 1-8.(in Chinese))
- [14] 袁驷, 徐俊杰, 叶康生, 等. 二维自适应技术新进展: 从有限元线法到有限元法[J]. 工程力学, 2011, **28**(S2): 1-10.(YUAN Si, XU Jun-jie, YE Kang-sheng, et al. New progress in self-adaptive analysis of 2D problems: from FEMOL to FEM[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, **28**(S2): 1-10.(in Chinese))
- [15] 徐俊杰. 基于 EEP 法的二维和三维有限元法自适应分析的研究[D]. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2012.(XU Jun-jie. Research on adaptive FEM analysis for 2D and 3D problems based on EEP super-convergent method[D]. PhD Thesis. Beijing: Tsinghua University, 2012.(in Chinese))
- [16] YUAN Si, WANG Yong-liang, YE Kang-sheng. An adaptive FEM for buckling analysis of non-uniform Bernoulli-Euler members via the element energy projection technique[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, **2013**(7). doi: 10.1155/2013/461832.
- [17] YUAN Si, DU Yan, XING Qin-yan, et al. Self-adaptive one-dimensional nonlinear finite element method based on element energy projection method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2014, **35**(10): 1223-1232.
- [18] 袁驷, 刘泽洲, 邢沁妍. 一维变分不等式问题的自适应有限元分析新探[J]. 工程力学, 2015, **32**(7): 11-16.(YUAN Si, LIU Ze-zhou, XING Qin-yan. A new approach to self-adaptive FEM for one dimensional variational inequality problems[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, **32**(7): 11-16.(in Chinese))
- [19] 袁驷, 林永静. 二阶非自伴两点边值问题 Galerkin 有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(2): 142-147.(YUAN Si, LIN Yong-jing. An EEP method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional Galerkin FEM for second order non-self-adjoint boundary-value problem[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(2): 142-147.(in Chinese))
- [20] 邢沁妍. 基于 EEP 法的一维 Galerkin 有限元自适应分析[D]. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2008.(XING Qin-yan. Adaptive analysis of 1D Galerkin FEM based on EEP super-convergent method[D]. PhD Thesis. Beijing: Tsinghua University, 2008.(in Chinese))
- [21] 王旭. 基于 EEP 法的一维有限元与二维有限元线法自适应分析[D]. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2007.(WANG Xu. Adaptive analysis of 1D FEM and 2D FEMOL based on EEP super-convergent method[D]. PhD Thesis. Beijing: Tsinghua University, 2007.(in Chinese))

- [22] Chopra A K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering* [M]. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [23] Weaver Jr W, Timoshenko S P, Young D H. *Vibration Problems in Engineering* [M]. Wiley-Interscience, 1990.

An EEP Adaptive Strategy of the Galerkin FEM for Dynamic Equations of Discrete Systems

XING Qin-yan, YANG Xing, YUAN Si

(*Department of Civil Engineering, Tsinghua University; Key Laboratory of Civil Engineering Safety and Durability of China Education Ministry, Beijing 100084, P.R.China*)

(Recommended by ZHUANG Zhuo, M. AMM Editorial Board)

Abstract: For the solution of structural dynamic equations, generally the accuracy of results and the efficiency of computation both depend on the selection of the time step lengths, which makes the key difficulty for efficient solution of time-dependent problems. With the element energy projection (EEP) super-convergent solution computed at the post-processing stage of the finite element method (FEM) to replace the unknown true solution and then to estimate the error of the conventional FEM solution, the so-called EEP adaptive method can automatically refine the solution mesh and has achieved success in various boundary-value problems with spatial coordinates as the arguments. Based on the Galerkin FEM solution of the weak form, the EEP self-adaptive strategy was introduced and applied to the dynamic equations of discrete systems. As a result, an adaptive mesh was automatically produced in the time domain, and a dynamic displacement solution satisfying the pre-specified error tolerance at any moment was obtained, which leads to a new adaptive computation approach for time-dependent problems.

Key words: discrete system; dynamic equation; Galerkin finite element method (Galerkin FEM); self-adaptive solution; element energy projection (EEP)

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (51508305; 51378293; 51078199)

引用本文/Cite this paper:

邢沁妍, 杨杏, 袁驷. 离散系统运动方程的 Galerkin 有限元 EEP 法自适应求解[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(2): 133-143.

XING Qin-yan, YANG Xing, YUAN Si. An EEP adaptive strategy of the Galerkin FEM for dynamic equations of discrete systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(2): 133-143.