文章编号:1000-0887(2017)07-0827-10

半严格 -*G*-*E*- 半预不变凸型函数及其在数学规划中的应用研究*

彭再云[1], 孙佳徽[1,2], 李科科[3], 张石生[4]

(1. 重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074;
2. 西安工程大学 管理学院, 西安 710048;
3. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331;
4. 云南财经大学 数学与统计学院, 昆明 650224)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 提出了一类新的广义凸函数——半严格 -*G*-*E*- 半预不变凸函数,它是一类非常重要的广义凸函数,为半严格 -*G*- 半预不变凸函数与半严格 -*E*- 预不变凸函数的推广.首先给出例子,以说明半严格 -*G*-*E*- 半预不变凸函数的存在性及其与其他相关广义凸函数间的关系.然后讨论了半严格 -*G*-*E*- 半预不变凸函数的一些基本性质.最后,探究了半严格 -*G*-*E*- 半预不变凸型函数分别在无约束和有约束非线性规划问题中的重要应用,获得一系列最优性结论,并举例验证了所得结果的正确性.

关 键 词: *E*- 半连通集; 半严格 -*G*-*E*- 半预不变凸函数; 性质; 非线性规划; 应用

中图分类号: O221.1 **文献标志码:** A doi: 10.21656/1000-0887.370280

引 言

凸性与广义凸性,在优化理论、经济领域甚至工程领域中都有着十分重要的地位.在凸性与广义凸性方面,早期的研究来源于经济领域.一些学者研究了经济领域常用到的拟凸(凹)性及相关凸性,并获得了较多很好的性质与应用.然而在实际生产与生活中,大家却发现很多函数不一定是凸的.于是,人们开始研究凸函数的推广形式,即广义凸函数,使其既具有凸函数的某些优良性质而其范围又比凸函数更为广泛.很多学者在这方面做了较好的工作.1981 年,Hanson 在研究 Kuhn-Tucker[1] 充分性条件时提出一类广义凸函数——不变凸函数.不变凸函数是凸函数的真推广,同时具有凸函数的许多良好性质.随后,较多学者借助于这类函数研究了优化问题的最优性条件、对偶.在 1988 年,Weir 和 Mond[2] 提出另外一类广义凸函数——预不变凸函数,它是不变凸函数的真推广.在 2001 年,Yang 和 Li[3] 在条件 C 下研究了预不变凸函

* **收稿日期:** 2016-09-13; **修订日期:** 2017-05-10
基金项目: 国家自然科学基金(11471059;11431004); 重庆市基础与前沿研究项目(cstc2017jcyjAX0382;cstc2016jcyjA0219); 重庆市民生项目(cstc2015shmszx30004); 中国博士后科学基金(2015M580774;2016T90837);重庆市高校创新团队项目(CXTDX201601022)
作者简介: 彭再云(1980—),男,博士, 教授(E-mail: pengzaiyun@126.com);
张石生(1934—),男,教授(通讯作者. E-mail: changss2013@aliyun.com).

数的一些重要性质.同年,Yang 和 Li 在文献[4]中给出半严格预不变凸函数、严格预不变凸函数的定义,并分别讨论它们及预不变凸函数三者间的关系.1992 年,Yang 和 Chen[5]将预不变凸函数的研究推广到半预不变凸函数.2005 年,颜丽佳和刘芙萍在文献[6]中提出了一类较为特殊的预不变凸函数——强预不变凸函数,给出其性质并讨论了它与强不变凸函数间的关系.2013 年彭再云和李永红在文献[7]中提出了半严格 -G- 半预不变凸性的概念,并讨论其在最优化中的应用.2015 年,李科科等[8]研究了严格 -G- 半预不变凸函数.最近,彭再云等在文献[9]中给出了 -G-E- 半预不变凸函数的概念,并讨论其在多目标规划的 Wolfe 型对偶中的应用.与此同时,一些相关研究也随之出现(如文献[10-14]).

在以上文献[3,7,9,13]的启发下,本文提出一类新的广义凸函数——半严格 -G-E- 半预不变凸函数.首先,给出例子说明半严格 -G-E- 半预不变凸函数是存在的,并给出例子说明它与其他相关广义凸函数间的一些关系.然后,给出半严格 -G-E- 半预不变凸函数的一些重要性质.最后,探究了半严格 -G-E- 半预不变凸函数分别在无约束和有约束非线性规划问题中的应用,获得一些最优性结论,并举出例子来说明所得结论是正确的.

1 基本概念及例子

首先,回顾一些相关的概念.

定义 1[5] 如果存在一个非零向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$,使得对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,满足 $y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)\in X$.则称集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半连通集.

定义 2[10] 如果存在向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\to R^n$ 及 $E(\cdot):X\to X$,使得对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,满足 $E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y))\in X$.则称集合 X 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E- 不变凸集.

在文献[9]中,给出 G-E- 预不变凸函数的定义如下:

定义 3[9] 设集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E- 不变凸集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,若存在一个实值连续递增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,满足

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y)))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(E(x)))+(1-\lambda)G(f(E(y)))].$$

则称函数 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 G-E- 预不变凸函数.

定义 4[7] 设 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的半连通集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,如果存在连续递增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对 $\forall x,y\in X,f(x)\neq f(y),\forall\lambda\in(0,1)$,有 $\lim_{\lambda\to0}\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)=0$ 且 $f(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]$.则称函数 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G- 半预不变凸函数.

定义 5[9-10] 设集合 $X\subseteq R^n$,如果存在非零向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$(当 $x\neq y$ 时,$\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$)及 $E(\cdot):X\to X$,使得对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有

$$E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)\in X.$$

则称集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E- 半连通集.

下面给出半严格 -G-E- 半预不变凸函数的定义.

定义 6 设集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的 E- 半连通集,$E(\cdot):X\to X$,若存在一个实值连续递增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对 $\forall x,y\in X,f(E(x))\neq f(E(y)),\forall\lambda\in(0,1)$ 有 $\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=0$,且

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) < G^{-1}[\lambda G(f(E(x)))+(1-\lambda)G(f(E(y)))].$$

则称函数 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格-G-E-半预不变凸函数.

注 1 定义 6 中如果对 $\forall x,y\in X,x\neq y,\lambda\in(0,1)$ 有上式成立,则称函数 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的严格-G-E-半预不变凸函数.

注 2 定义 6 中如果向量值映射 $E(x)=x$,则半严格-G-E-半预不变凸函数自然退化为半严格-G-半预不变凸函数[7].易知,半严格-G-E-半预不变凸函数是半严格-G-半预不变凸函数的真推广.

下面回顾半严格-E-预不变凸函数[10]的定义.

定义 7 设集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E-半连通集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,如果对 $\forall x,y\in X$, $f(E(x))\neq f(E(y)),\lambda\in(0,1)$,满足

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y))) < \lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y)).$$

则称 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格-E-预不变凸函数.

首先,给出例 1 来说明半严格-G-E-半预不变凸函数是大量存在的.

例 1 设 $X=\mathbf{R}$, $f(x)=e^{2x+1}$, $G(t)=\ln t$, $t\in(0,+\infty)$, $E(x)=x^2$,

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda x}{3}-3y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 2x-2y-e^3, & x<0,\ y\leqslant 0,\\ -\dfrac{\lambda x}{2}-5y, & x\geqslant 0,\ y<0,\\ x-y-\dfrac{\lambda}{2}, & x\leqslant 0,\ y>0.\end{cases}$$

据定义 6 容易验证 f 是 X 上关于 η 的半严格-G-E-半预不变凸函数.

注 3 半严格-E-半预不变凸函数是(关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的)半严格-G-E-半预不变凸函数(可取 $G(x)=x$),但反之则不一定成立.显然,半严格-E-半预不变凸函数是本文中半严格-G-E-半预不变凸函数的一类特殊情形.

下面,给出例 2 来说明半严格-G-E-半预不变凸函数不一定是(关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的)半严格-E-半预不变凸函数.

例 2 设

$$X=(0,+\infty),\ f(x)=\ln x,\ G(t)=e^t,\qquad t\in(-\infty,+\infty),$$

$$E(x)=x^2,\ \eta(x,y,\lambda)=\frac{\lambda x}{3}-y.$$

显然 $X=(0,+\infty)$ 是关于 $\eta(x,y,\lambda)=\lambda x/3-y$ 的 E-半连通集.容易验证 f 是(关于 η 的)半严格-G-E-半预不变凸函数.但取 $x=1,y=3,\lambda=1/3$,有

$$f(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y),\lambda))=\ln\left(\frac{\lambda^2}{3}x^2+(1-\lambda)y^2\right)=\ln\left(\frac{1}{27}+6\right)=$$

$$\ln\left(\frac{163}{27}\right)>\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y))=\frac{1}{3}\ln 1+\frac{2}{3}\ln 9=\ln(\sqrt[3]{81}).$$

故 f 不是(关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的)半严格-E-半预不变凸函数.

2 半严格-G-E-半预不变凸函数的性质

本节将给出半严格-G-E-半预不变凸函数的几个基本性质.

说明：若存在实值函数 G 满足 $G(x+y)=G(x)+G(y)$，x,y 在该函数的定义域中，则称 G 满足可加性；若实值函数 G 满足 $G(kx)=kG(x)$，$k>0$，x 在该函数定义域中，则称 G 满足正齐次性.

在文献[7]中，笔者用到如下的条件 C：

条件 C[7] 称向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 满足条件 C，如果对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，有

$$\boldsymbol{\eta}(y,\ y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\ \lambda),\lambda)=-\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda),$$
$$\boldsymbol{\eta}(x,\ y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\ \lambda),\lambda)=(1-\lambda)\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda).$$

为了研究半严格 -G-E- 半预不变凸性，给出一个新的假设——条件 F.

条件 F 称向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 满足条件 F，$E(\cdot):X\to X$，如果对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，有

$$\boldsymbol{\eta}(E(y),E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=-\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),$$
$$\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=(1-\lambda)\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda).$$

下面给出例 3 来说明满足条件 F 的向量值映射是大量存在的.

例 3 设 $X=\mathbf{R}$，$E(x)=\dfrac{1}{2}x$，

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ x-y, & x<0,\ y<0,\\ -\dfrac{1}{8}-y, & x\geqslant 0,\ y<0,\\ \dfrac{1}{8}-y, & x<0,\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

可验证 η 满足条件 F.

引理 1[9] 设 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个实值连续函数，则 G^{-1} 是递增函数，当且仅当 G 也是递增函数.

引理 2[9] 设 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个实值连续函数，如果 G 递增且是凹的，则 G^{-1} 是凸的；如果 G 递增且是凸的，则 G^{-1} 是凹的.

下面给出半严格 -G-E- 半预不变凸函数的几个基本性质.其中定理 1 与定理 2 的证明比较容易（根据定义 6 可直接证明），这里略去.

定理 1 设 X 是关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的 E- 半连通集，$E(\cdot):X\to X$.f,g 均是 X 上关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数，$\alpha,k>0$ 均是任意常数，若 G^{-1} 和 G 满足可加性，则 $f+g$ 和 $f+\alpha$ 都为 X 上（关于同一 $\boldsymbol{\eta}$）的半严格 -G-E- 半预不变凸函数；若 G^{-1} 和 G 满足正齐次性，则 kf 为 X 上（关于同一 $\boldsymbol{\eta}$）的半严格 -G-E- 半预不变凸函数.

定理 2 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数，$g:I\to\mathbf{R}$ 为单增凸函数，其中 $\mathrm{rang}\,f\subseteq I$，如果 $h(t)=g\circ G^{-1}(t)$ 在 G 关于 f 的像上是凸函数，则复合函数 $g\circ f$ 是关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -E- 半预不变凸函数.

定理 3 设 X 是关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的 E- 半连通集，$E(\cdot):X\to X$.f 是 X 上（关于 $\boldsymbol{\eta}$）的半严格 -G_1-E- 半预不变凸函数，G_2 为 $I_f(X)$ 上的严格增的连续函数，若 $g(t)=G_2G_1^{-1}$ 在 G_1

关于 f 的像上是凸的,则 f 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G_2-E- 半预不变凸函数.

证明 由 f 的半严格 -G_1-E- 半预不变凸性,对 $\forall x,y \in X$, $f(E(x)) \neq f(E(y))$, $\forall \lambda \in (0,1)$ 有

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) < G_1^{-1}[\lambda G_1(f(E(x)))+(1-\lambda)G_1(f(E(y)))].$$

由 G_2 在 $I_f(X)$ 上为连续且严格递增函数及上式,可得

$$G_2(f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))) < G_2G_1^{-1}[\lambda G_1(f(E(x)))+(1-\lambda)G_1(f(E(y)))].$$

由于 $g(t)=G_2G_1^{-1}$ 在 G_1 关于 f 的像上是凸的,故对 $\forall x,y \in X$, $f(E(x)) \neq f(E(y))$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$\begin{aligned}&G_2G_1^{-1}[\lambda G_1(f(E(x)))+(1-\lambda)G_1(f(E(y)))] \leqslant \\ &\quad \lambda G_2G_1^{-1}G_1(f(E(x)))+(1-\lambda)G_2G_1^{-1}G_1(f(E(y))) = \\ &\quad \lambda G_2(f(E(x)))+(1-\lambda)G_2(f(E(y))).\end{aligned}$$

由引理 1 可知, G_2^{-1} 是增函数,于是有

$$G_1^{-1}[\lambda G_1(f(E(x)))+(1-\lambda)G_1(f(E(y)))] \leqslant G_2^{-1}[\lambda G_2(f(E(x)))+(1-\lambda)G_2(f(E(y)))].$$

因此,对于 $\forall x,y \in X$, $f(E(x)) \neq f(E(y))$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) < G_2^{-1}[\lambda G_2(f(E(x)))+(1-\lambda)G_2(f(E(y)))].$$

故 f 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G_2-E- 半预不变凸函数.

3 半严格 -G-E- 半预不变凸性在非线性规划问题中的应用

首先考虑如下的无约束(或称隐约束)非线性规划问题 (P_1):

$$(P_1):\quad \begin{aligned}&\min f(x)\\ &\text{s.t. } x \in E(X),\end{aligned}$$

其中 X 是 R^n 的非空子集,映射 $E(\cdot):X \to X$ 为满射.

定理 4 对于问题 (P_1),设 X 是关于 $\boldsymbol{\eta}:X \times X \times [0,1] \to R^n$ 的 E- 半连通集,映射 $E(\cdot)$: $X \to X$ 为满射.f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数,则问题(P_1) 的任一局部最优解也是它的全局最优解.

证明 假设 $y \in E(X)$ 是问题(P_1) 的一个局部最优解,但不是(P_1) 的全局最优解.则存在一点 $x \in E(X)$(由 $E(\cdot)$ 为满射,则存在 $x_0,y_0 \in X$ 使得 $E(x_0)=x, E(y_0)=y$) 满足 $f(E(x_0)) < f(E(y_0))$.由 f 是 X 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数,可得

$$f(E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda)) < G^{-1}[\lambda G(f(E(x_0)))+(1-\lambda)G(f(E(y_0)))].$$

由 G 为实值递增函数及引理 1 可知,G^{-1} 也为实值递增函数,结合上式和 $f(E(x_0)) < f(E(y_0))$,对于任意 $\lambda \in (0,1)$ 有

$$f(E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda)) <$$

$$G^{-1}[\lambda G(f(E(y_0))) + (1-\lambda)G(f(E(y_0)))] =$$
$$G^{-1}(G(f(E(y_0)))) = f(E(y_0)).$$

即对任意的 $\lambda \in (0,1)$, 有

$$f(E(y_0) + \lambda \boldsymbol{\eta}(E(x_0), E(y_0), \lambda)) < f(E(y_0)),$$

即 $f(y + \lambda \boldsymbol{\eta}(x, y, \lambda)) < f(y)$.

当 λ 充分小时,上式与 $y \in E(X)$ 为 (P_1) 的局部最优解矛盾,故 (P_1) 的每一个局部最优解均为它的全局最优解.

下面给出例 4 来验证定理 5.

例 4 设 $X = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = \arctan x^2$, $\boldsymbol{\eta}(x, y, \lambda) = \lambda^2 x - y$, $G(t) = \tan t$, $t \in [0, \pi/2)$, 这里 $E(x) = x/2$.

显然 $X = (-\infty, +\infty)$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E- 半连通集.将 $E(x) = x/2$ 代入 $\boldsymbol{\eta}(x, y, \lambda)$, 有 $\boldsymbol{\eta}(E(x), E(y), \lambda) = \lambda^2 x/2 - y/2$.则有

$$f(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y), \lambda)) = \arctan\left[\frac{1}{2}\lambda^3 x + \frac{1}{2}(1-\lambda)y\right]^2 <$$
$$\arctan\left[\lambda\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}y\right)^2\right] =$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(E(x))) + (1-\lambda)G(f(E(y)))].$$

因此, f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数.定理 4 的假设均满足.容易验证 $x = 0$ 是问题 (P_1) 的一个局部最优解,由定理 4 可知 $x = 0$ 也是问题 (P_1) 的全局最优解.

下面考虑带约束的非线性规划问题 (P_2):

$$(P_2): \quad \min f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in Q = \{1, 2, \cdots, q\}, \ x \in E(X).$$

其中 X 是 R^n 的非空子集, $f, g_i: X \to \mathbf{R}$, $i \in Q$, 映射 $E(\cdot): X \to X$ 为满射.则 (P_2) 的可行集为

$$D = \{x \in E(X) \mid g_i(x) \leqslant 0, i \in Q\}.$$

定理 5 对于问题 (P_2), 设 X 是关于 $\boldsymbol{\eta}: X \times X \times [0,1] \to R^n$ 的 E- 半连通集, f 为 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数, $g_i (i \in Q)$ 为 X 上关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G_i-E- 半预不变凸函数,对任意的 $x, y \in X$ 有 $g_i(E(y) + \boldsymbol{\eta}(E(x), E(y), 1)) \leqslant 0$.则问题 (P_2) 的可行集 D 是关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的半连通集.

证明 对 $\forall x, y \in D$, 由 E 为满射,则存在 $x_0, y_0 \in X$ 使得 $E(x_0) = x$, $E(y_0) = y$, 则有 $E(y_0) + \lambda \boldsymbol{\eta}(E(x_0), E(y_0), \lambda) \in X$, 且

$$g_i(E(x_0)) \leqslant 0, \ g_i(E(y_0)) \leqslant 0, \qquad \forall i \in Q. \tag{1}$$

由 $g_i (i \in Q)$ 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G_i-E- 半预不变凸函数可知, G_i, $i \in Q$ 为递增函数, 且对 $\forall x, y \in D$, $g_i(E(x_0)) \neq g_i(E(y_0))$, $\lambda \in (0,1)$, 有

$$g_i(E(y_0) + \lambda \boldsymbol{\eta}(E(x_0), E(y_0), \lambda)) \leqslant$$
$$G_i^{-1}[\lambda G_i(g_i(E(x_0))) + (1-\lambda)G_i(g_i(E(y_0)))], \qquad \forall i \in Q. \tag{2}$$

由 G_i, $i \in Q$ 的递增性及引理 1 可得, G_i^{-1}, $i \in Q$ 也均为递增函数,联立式(1)、(2),对 $\forall i \in Q$ 有

$$g_i(E(y_0) + \lambda \boldsymbol{\eta}(E(x_0), E(y_0), \lambda)) \leqslant$$

$$G_i^{-1}[\lambda G_i(0)+(1-\lambda)G_i(0)]=G_i^{-1}(G_i(0))=0.$$

故对 $\forall i\in Q,\forall\lambda\in(0,1)$,有 $E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda)\in D$.由假设,当 $\lambda=0,1$ 时也有 $E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda)\in D$.因此,$(P_2)$ 的可行集 D 是关于同一 $\boldsymbol{\eta}$ 的半连通集.

注 4 定义 6 中如果对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有 $\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=0$ 且

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\geqslant G^{-1}[\lambda G(f(E(x)))+(1-\lambda)G(f(E(y)))].$$

则称 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 G-E- 半预不变凹函数.

定理 6 设 (P_2) 的可行集 D 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半连通集.如果 f 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E- 半连通集 X 上的 G-E- 半预不变凹函数且 f 在 D 上是非常值的,则集合 D 没有内点是 (P_2) 的最优解,即问题 (P_2) 的任意可行解 $\hat{x}$,如果存在则它一定在集合 D 的边界上取得.

证明 若问题 (P_2) 无解,则结论自然成立.下证问题 (P_2) 有解的情况:设 $\hat{x}$ 为问题 (P_2) 的一个最优解.由假设 f 在 D 上是非常值的,则存在可行点 $\bar{x}\in D$(由 E 为满射,故存在 $\bar{x}_0,\hat{x}_0\in X$ 使得 $E(\bar{x}_0)=\bar{x},E(\hat{x}_0)=\hat{x}$),使得

$$f(E(\bar{x}_0))>f(E(\hat{x}_0)).$$

令 z 是 D 的一个内点.由 D 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半连通集,则存在 $y\in D$(据 E 为满射,存在 $y_0\in X$ 使得 $E(y_0)=y$)和 $\lambda\in[0,1]$ 使得

$$z=E(\bar{x}_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(y_0),E(\bar{x}_0),\lambda).$$

据 f 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 G-E- 半预不变凹函数,且 $\hat{x}$ 是问题 (P_2) 的一个最优解,有

$$\begin{aligned}f(z)=f(E(\bar{x}_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(y_0),E(\bar{x}_0),\lambda))\geqslant\\ G^{-1}[\lambda G(f(E(y_0)))+(1-\lambda)G(f(E(\bar{x}_0)))]>\\ G^{-1}[\lambda G(f(E(\hat{x}_0)))+(1-\lambda)G(f(E(\hat{x}_0)))]=f(E(\hat{x}_0))=f(\hat{x}).\end{aligned}$$

即集合 D 的任何内点均不是问题 (P_2) 的最优解,即结论成立.

定理 7 对于问题 (P_2),设 X 是关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的 E- 半连通集,$f,g_i:X\to\mathbf{R}(i\in Q)$ 分别是在 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数和半严格 -G_i-E- 半预不变凸函数,则问题 (P_2) 的局部最优解也是其全局最优解.

证明 若 $y\in D$ 是 (P_2) 的局部最优解,但不是全局最优解.则存在一点 $x\in D$(由 E 为满射,则存在 $x_0,y_0\in X$ 使得 $E(x_0)=x,E(y_0)=y$),满足 $f(E(x_0))<f(E(y_0))$.由定理 5 可知,对 $\forall\lambda\in(0,1)$ 有 $E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda)\in D$.

由 f 是 X 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数可得

$$\begin{aligned}f(E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda))<\\ G^{-1}[\lambda G(f(E(x_0)))+(1-\lambda)G(f(E(y_0)))].\end{aligned}$$

据 G 为实值递增函数和引理 1,G^{-1} 也为实值递增函数.结合上式及 $f(E(x_0))<f(E(y_0))$,对 $\forall\lambda\in(0,1)$,有

$$\begin{aligned}f(E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda))<\\ G^{-1}[\lambda G(f(E(y_0)))+(1-\lambda)G(f(E(y_0)))]=\\ G^{-1}(G(f(E(y_0))))=f(E(y_0)).\end{aligned}$$

即对任意的 $\lambda\in(0,1)$,有

$$f(y+\lambda\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda))=f(E(y_0)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x_0),E(y_0),\lambda))<f(E(y_0))=f(y).$$

当 λ 充分小时,与 $y\in D$ 是(P_2)的局部最优解矛盾.故(P_2)的局部最优解也为其全局最优解.

下面,给出例 5 来验证定理 5 和定理 7.

例 5 考虑如下带约束的非线性规划问题(P_2):

$$(P_2):\quad \min f(x)=\exp(|x|)$$

$$\text{s.t. } g_1(x)=\arctan(|x|-1)\leqslant 0,\ g_2(x)=|x|-4,\qquad x\in X=[-1,1],$$

其中

$$E(x)=x^3,\ G(t)=\ln t,\qquad t\in[1,\mathrm{e}),$$

$$G_1(t)=\tan t,\qquad t\in[-\pi/4,\pi/2),$$

$$G_2(t)=t,\qquad t\in[-4,+\infty),$$

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda^2x-y, & x\neq 0,\\ \lambda y-2y, & x=0.\end{cases}$$

显然 $X=[-1,1]$ 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 E- 半连通集.由定义 6 可知, f,g_1,g_2 分别是集合 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半严格 -G-E- 半预不变凸函数、半严格 -G_1-E- 半预不变凸函数和半严格 -G_2-E- 半预不变凸函数,即定理 5 与定理 7 的假设均成立.于是,通过直接计算可得(P_2)的可行集 $D=[-1,1]$.显然,(由定理 5 可得)D 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的半连通集.同时,容易验证 $x=0$ 是问题(P_2)的一个局部最优解, 由定理 7 可得 $x=0$ 也是问题(P_2)的全局最优解.

4 结 论

本文提出了一类新的广义凸函数——半严格 -G-E- 半预不变凸函数, 它是半严格 -G- 半预不变凸与半严格 -E- 预不变凸函数的真推广. 给出例子说明了半严格 -G-E- 半预不变凸函数的存在性及其与相关广义凸函数间的关系. 探索了半严格 -G-E- 半预不变凸函数的一些基本性质.最后,研究了半严格 -G-E- 半预不变凸函数分别在隐约束优化问题、带不等式约束非线性规划问题中的重要应用,获得非线性规划问题的一些最优性结论,并举例验证了所得结果的正确性.

那么, 能否借助半严格 -G-E- 半预不变凸函数获得(约束)优化问题的对偶理论与其他最优性结果? 这是值得进一步研究的课题!

参考文献(References):

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[2] Weir T, Mond B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, **136**(1): 29-38.

[3] YANG Xin-min, LI Duan. On properties of preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **256**(1): 229-241.

[4] YANG Xin-min, LI Duan. Semistrictly preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **258**(1): 287-308.

[5] Yang X Q, CHEN Guang-ya. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities

[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, **169**(2): 359-373.

[6] 颜丽佳, 刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, **22**(1): 11-15. (YAN Li-jia, LIU Fu-ping. Strongly preinvex functions[J]. *Journal of Chongqing Normal University* (*Natural Science Edition*), 2005, **22**(1): 11-15.(in Chinese))

[7] 彭再云, 李永红. 半严格-*G*-半预不变凸性与最优化[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(8): 836-845.(PENG Zai-yun, LI Yong-hong. Semistrict-*G*-semi-preinvexity and optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(8): 836-845.(in Chinese))

[8] 李科科, 彭再云, 万轩, 等. 严格*G*-半预不变凸性及其应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015, **32**(6): 1-8.(LI Ke-ke, PENG Zai-yun, WAN Xuan, et al. The study of strict *G*-semi-preinvexity and its applications[J]. *Journal of Chongqing Normal University* (*Natural Science*), 2015, **32**(6): 1-8.(in Chinese))

[9] 彭再云, 秦南南, 李科科. *G*-*E*-半预不变凸型多目标规划的 Wolfe 型对偶[J]. 应用数学学报, 2015, **38**(6): 1103-1114.(PENG Zai-yun, QIN Nan-nan, LI Ke-ke. Wolf type duality of *G*-*E*-semi-preinvex type multiobjective programming problems[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2015, **38**(6): 1103-1114.(in Chinese))

[10] Fulga C, Preda V. Nonlinear programming with *E*-preinvex and local *E*-preinvex functions[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, **192**(2): 737-743.

[11] 彭再云, 周选林, 赵勇. 强*G*-预不变凸函数的性质及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, **29**(4): 12-17.(PENG Zai-yun, ZHOU Xuan-lin, ZHAO Yong. Characteristics and applications of strongly *G*-preinvex functions[J]. *Journal of Chongqing Normal University* (*Natural Science*), 2012, **29**(4): 12-17.(in Chinese))

[12] 彭再云, 李科科, 张石生. 向量D-η-E半预不变凸映射与向量优化[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1020-1032.(PENG Zai-yun, LI Ke-ke, ZHANG Shi-sheng. Semipreinvex vector mappings and vector optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1020-1032.(in Chinese))

[13] 赵映雪. 一类广义凸性及其在最优化理论中的应用[D]. 硕士学位论文. 金华: 浙江师范大学, 2005.(ZHAO Ying-xue. A type of generalized convexity and applications in optimization theory[D]. Master Thesis. Jinhua: Zhejiang Normal University, 2005.(in chinese))

[14] 唐莉萍, 杨新民. 关于*D*-半预不变凸性的某些新性质[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(3): 325-331.(TANG Li-ping, YANG Xin-min. A note on some new characteristics of *D*-semi-preinvexity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(3): 325-331.(in Chinese))

Study of Semistrict-G-E-Semipreinvex Functions and Applications in Nonlinear Programming

PENG Zai-yun[1], SUN Jia-hui[1,2], LI Ke-ke[3], ZHANG Shi-sheng[4]

(1. *College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*;

2. *School of Management*, *Xi' an Polytechnic University*, *Xi' an* 710048, *P.R.China*;

3. *School of Mathematical Sciences*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 401331, *P.R.China*;

4. *School of Statistics and Mathematics*, *Yunnan University of Finance and Economics*, *Kunming* 650224, *P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Shi-sheng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A new class of generalized convex functions, namely the semistrict-G-E-semipreinvex functions were proposed, which are a class of very important generalized convex functions and make a true generalization of both the semistrict-G-semipreinvex functions and the semistrict-E-preinvex functions. Firstly, several examples were given to illustrate the existence of semistrict-G-E-semipreinvex functions and the dependence on the related generalized convex functions. Afterwards, the basic characteristics of the semistrict-G-E-semipreinvex functions were discussed. Finally, some applications of the semistrict-G-E-semipreinvex functions in nonlinear programming problems without constraint and with inequality constraints were studied respectively, and some optimality results were obtained; moreover, some examples were given to illustrate the correctness of the obtained results.

Key words: E-semi-connected set; semistrict-G-E-semipreinvex function; characteristics; nonlinear programming; application

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11471059;11431004); China Postdoctoral Science Foundation(2015M580774;2016T90837)

引用本文/Cite this paper:

彭再云, 孙佳徽, 李科科, 张石生. 半严格-G-E-半预不变凸型函数及其在数学规划中的应用研究[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(7): 827-836.

PENG Zai-yun, SUN Jia-hui, LI Ke-ke, ZHANG Shi-sheng. Study of semistrict-G-E-semipreinvex functions and applications in nonlinear programming[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(7): 827-836.