

# 非线性阻尼非线性刚度隔振系统 随机动力学特性研究\*

黎崛珉, 陆泽琦, 陈立群

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委陈立群来稿)

**摘要:** 针对随机激励环境,同时引入刚度和阻尼非线性来提高隔振系统的隔振性能.刚度和阻尼非线性分别是由水平弹簧和水平阻尼的几何布置获得.通过求解 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程等效非线性随机振动方程来研究非线性隔振系统在随机激励下的隔振性能,并使用路径积分和 Monte-Carlo 数值方法进行验证.在此基础上研究刚度非线性和阻尼非线性对隔振系统在随机激励下力传递率及其概率分布的影响.研究表明随着噪声强度的增加,非线性阻尼抑制振动的能力增强,但是在较小的随机激励下线性阻尼优于非线性阻尼.

**关键词:** 非线性隔振; 力传递率; 随机激励; 非线性刚度; 非线性阻尼

**中图分类号:** O322; O328 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370277

## 引言

近年来随着对隔振技术要求的提高,非线性隔振受到了广泛关注.隔振是指在振动源和接收器之间插入刚度阻尼结构来减少振动传递的技术<sup>[1]</sup>.传统的线性隔振系统在性能上有两个缺陷,一是高频激励下线性阻尼对传递率的负面影响;二是实现低频隔振使用的线性静态刚度过低从而使得静变形过大<sup>[2-3]</sup>.

非线性刚度可以弥补低频隔振静态刚度过低的缺陷.Ibrahim 综述了非线性隔振系统<sup>[4]</sup>.大多数的研究都使用了非线性弹簧来降低隔振器的固有频率,如轴向压缩的屈曲梁<sup>[5-6]</sup>.Alabuzhev 等<sup>[7]</sup>提出了一种简单有效的准零刚度系统,它能在降低共振频率的同时不影响静刚度.另外 Carrella, Brennan 等<sup>[8]</sup>和 Huang 等<sup>[9]</sup>分别研究了高静态低动态刚度非线性隔振系统的动力学特性,结果表明非线性刚度可以降低隔振开始频率,扩大隔振频带.

非线性阻尼可以降低传递率的峰值并且不影响高频传递率. Ravindra 和 Mallik 研究了 Coulomb (库伦) 阻尼对硬特性 Duffing (达芬) 方程的影响,结果表明非线性阻尼可以消除混沌响应<sup>[10-11]</sup>.研究还表明非线性粘性阻尼可以有效抑制 Duffing 系统的共振响应,但对高频传递率影响较小<sup>[12]</sup>. Ho 等研究了非线性阻尼非线性刚度单自由度系统在谐波激励下的动力学特性<sup>[13]</sup>.

\* 收稿日期: 2016-09-08; 修订日期: 2017-04-17

基金项目: 国家自然科学基金(11502135; 11572182)

作者简介: 黎崛珉(1992—),男,硕士生(E-mail: lijuemin@aliyun.com);

陆泽琦(1985—),男,讲师,硕士生导师(通讯作者. E-mail: luzeqi@shu.edu.cn).

尽管高静态低动态刚度隔振系统在负刚度结构实现和低频隔振改善方面的研究已取得很多进展和突破,另外非线性阻尼作用方面在理论上已获得一些研究,研究结果也在一些振动类主流期刊发表,但有关高静态低动态隔振系统中非线性阻尼问题的研究工作还不多见;还没有见到同时考虑非线性刚度和非线性阻尼的隔振系统性能的研究工作发表。

另外,在实际环境中激励源一般都是随机非平稳的,它相当于无穷多个单频信号同时激励,对比较依赖激励环境的非线性系统不能单纯的线性叠加,因此研究非线性隔振系统在随机激励下的动力学行为是非线性隔振具有普适性的前提。20世纪90年代,有学者就提出在随机白噪声激励下的非线性刚度隔振系统模型<sup>[14]</sup>。Le 和 Ahn<sup>[15]</sup>用数值的方法研究了车辆座椅在随机激励下的时域响应,并建立了在低频激励下的非线性隔振模型,它是额外加入与正刚度弹簧平行的两个负刚度结构的系统,并比较了单频、多频以及随机这3种情况下的隔振性能,发现隔振频带都比未加入负刚度时宽,同时用实验的方法验证了这一结果。李倩等<sup>[16]</sup>研究了四自由度车辆-道路耦合系统在随机激励下的动力行为;用 Gauss 平稳随机过程模拟路面的不平整度,分析了车速变化、路面等级变化对车辆满载系数影响。赵岩等<sup>[17]</sup>使用虚拟激励法基于辛本征空间展开探讨了受随机载荷作用下陀螺阻尼系统随机动力响应问题。庞辉等<sup>[18]</sup>使用多目标自适应遗传算法研究了随机激励下重载车辆空气悬架参数多目标优化。董满生等<sup>[19]</sup>基于 Euler 梁理论采用虚拟激励数值模拟方法研究了随机地震激励下水中悬浮隧道的动力响应。静行等<sup>[20]</sup>提出了将独立分量分析(ICA)法与随机减量(RDT)法结合起来用于随机激励下结构的模态参数识别。何青等<sup>[21]</sup>基于双稳态压电振动发电机系统参数的非线性,建立了随机激励环境下压电振动发电机的动力学模型。然而,对非线性随机微分方程的直接积分仅得到传递率的均值,传递率的概率分布很难获得,尤其是阻尼、刚度均为非线性的情况,进而导致近些年来,关于高静态低动态隔振系统在随机激励下的非线性动力学行为的研究较少。

本文的目的是研究随机激励下非线性阻尼非线性刚度系统的振动传递特性,因此本文采用了一种新型路径积分法计算 FPK 方程中的概率密度函数,获得传递率的概率分布和均值<sup>[22]</sup>。

## 1 非线性阻尼非线性刚度隔振系统建模

图1为非线性阻尼非线性刚度隔振系统的结构示意图,它由水平方向的阻尼和刚度提供非线性阻尼和非线性刚度。被隔振物体的质量为  $m$ , 通过3个弹簧和3个阻尼与固定底座连接。竖直弹簧的刚度为  $k_v$ , 竖直阻尼大小为  $c_v$ , 水平弹簧的刚度为  $k_h$ , 水平阻尼大小为  $c_h$ 。被隔振物体受到外激励  $f_e$  作用,产生的位移为  $x$ , 传递到固定底座上的力大小为  $f_i$ 。在水平弹簧上有预应力作用,水平弹簧原长为  $l_0$ , 在图示平衡位置时,系统外激励力  $f_e = 0$ , 水平弹簧处于完全水平状态,此时水平弹簧长度为  $l$ 。

仅考虑系统下半部分阻尼弹簧系统对隔振物体的作用力  $f_i$  和系统位移以及速度的关系。将系统下半部分阻尼弹簧系统对隔振物体的作用力分为两个部分:

$$f_i = f_c + f_k, \quad (1)$$

其中,  $f_k$  为弹簧对隔振物体作用力的和,即刚度力项;  $f_c$  为阻尼对隔振物体作用力的和,即阻尼力项。

下半部分阻尼刚度结构的刚度力项为

$$f_k = k_v x + 2k_h \frac{x}{(x^2 + l^2)^{1/2}} ((x^2 + l^2)^{1/2} - l_0) = k_v x + 2k_h \left( 1 - \frac{l_0}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \right) x, \quad (2)$$

无量纲化

$$\hat{f}_k = \hat{x} + 2\hat{k}\left(1 - \frac{1}{(\hat{x}^2 + \hat{l}^2)^{1/2}}\right)\hat{x}, \quad (3)$$

其中

$$\hat{f}_k = \frac{f_k}{l_0 k_v}, \quad \hat{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \hat{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \hat{k} = \frac{k_h}{k_v}.$$

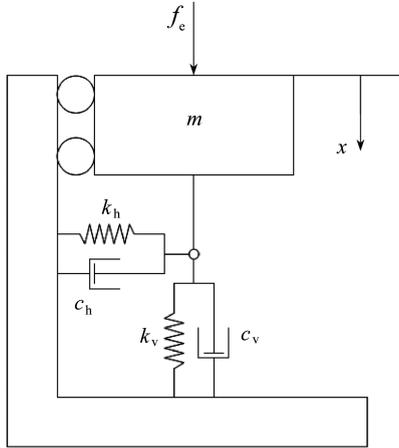


图1 非线性阻尼非线性刚度隔振系统示意图

Fig. 1 Schematic of a double nonlinear isolation system

图2为在不同的 $\hat{l}$ 取值下无量纲非线性刚度力 $\hat{f}_k$ 和位移 $\hat{x}$ 的关系,其中 $\hat{k} = 1$ ,从图中可以发现,当 $\hat{l} = 2/3$ 时,系统在 $\hat{x} = 0$ 附近表现出准零刚度;而当 $\hat{l} < 2/3$ 时,系统在 $\hat{x} = 0$ 附近表现出负刚度;当 $\hat{l} > 2/3$ 时,系统在各处表现出正刚度。

下半部分阻尼刚度结构的阻尼力项为

$$f_c = c_v \dot{x} + 2c_h \frac{x}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \frac{x}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \dot{x} = c_v \dot{x} + 2c_h \frac{x^2}{x^2 + l^2} \dot{x} = \left(c_v + 2c_h \frac{x^2}{x^2 + l^2}\right) \dot{x}, \quad (4)$$

无量纲化为

$$\hat{f}_c = \left(\hat{c}_v + 2\hat{c}_h \frac{\hat{x}^2}{\hat{x}^2 + \hat{l}^2}\right) \hat{x}'. \quad (5)$$

将式(5)写成

$$\hat{f}_c / \hat{x}' = \hat{c}_v + 2\hat{c}_h \frac{\hat{x}^2}{\hat{x}^2 + \hat{l}^2}, \quad (6)$$

其中

$$\hat{f}_c = \frac{f_c}{l_0 k_v}, \quad \hat{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \hat{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \hat{c} = \frac{c_h}{c_v}.$$

图3为在不同的 $\hat{l}$ 取值下无量纲非线性阻尼 $\hat{f}_c / \hat{x}'$ 和位移 $\hat{x}$ 的关系,其中 $\hat{c}_v = \hat{c}_h = 1$ .从图中可以发现 $\hat{x} = 0$ 附近系统的阻尼最小,而在 $\hat{x} \neq 0$ 处系统的阻尼随着 $\hat{l}$ 的增大而减小。

综上所述,系统下半部分的阻尼刚度系统产生的作用力大小为

$$f_i = f_c + f_k = \left( c_v + 2c_h \frac{x^2}{x^2 + l^2} \right) \dot{x} + k_v x + 2k_h \left( 1 - \frac{l_0}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \right) x, \quad (7)$$

无量纲化可以得到

$$\hat{f}_i = \hat{f}_c + \hat{f}_k = \left( \hat{c}_v + 2\hat{c}_h \frac{\hat{x}^2}{\hat{x}^2 + \hat{l}^2} \right) \hat{x}' + \hat{x} + 2\hat{k} \left( 1 - \frac{1}{(\hat{x}^2 + \hat{l}^2)^{1/2}} \right) \hat{x}. \quad (8)$$

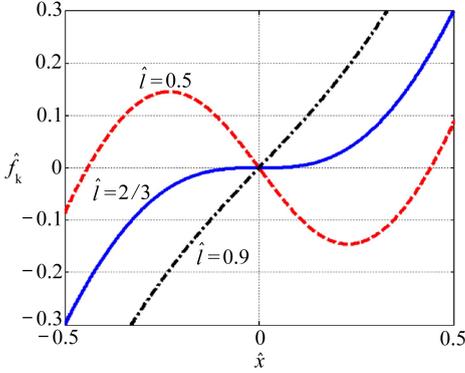


图 2 非线性刚度力与位移的关系示意图

Fig. 2 Relation between the nonlinear stiffness force and the displacement

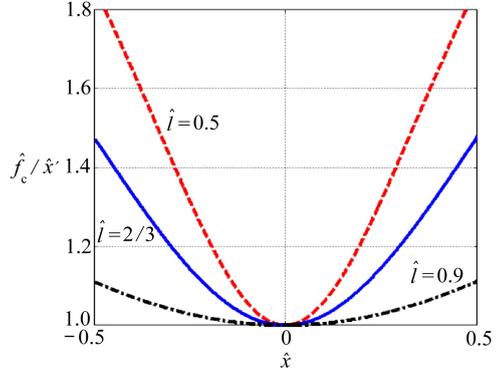


图 3 非线性阻尼与位移的关系图

Fig. 3 Relation between the nonlinear damping and the displacement

## 2 力传递率

系统受到具有 Gauss 白噪声特征的随机激励  $\sigma \eta_e(t)$  ( $\langle \eta_e(\tau) \rangle = 0$ ,  $\langle \eta_e(\tau) \eta_e(\tau - \Delta\tau) \rangle = \delta(\Delta\tau)$ ), 它的运动方程可以写为

$$m\ddot{x} + \left( c_v + 2c_h \frac{x^2}{x^2 + l^2} \right) \dot{x} + k_v x + 2k_h \left( 1 - \frac{l_0}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \right) x = \sigma \eta_e(t), \quad (9)$$

无量纲化可以写为

$$\begin{aligned} \hat{x}'' + \left( 2\hat{\zeta}_v + 4\hat{\zeta}_h \frac{(1 - \hat{l}^2)\hat{x}^2}{(1 - \hat{l}^2)\hat{x}^2 + \hat{l}^2} \right) \hat{x}' + \\ \left( 1 + 2\hat{k} \left( 1 - \frac{1}{(\hat{x}^2(1 - \hat{l}^2) + \hat{l}^2)^{1/2}} \right) \right) \hat{x} = \hat{\sigma} \eta_e(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\hat{\zeta}_v = \frac{c_v}{2m\omega_n}, \quad \hat{\zeta}_h = \frac{c_h}{2m\omega_n}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma}{m\omega_n^2}, \quad \omega_n = \sqrt{k_v/m},$$

$$\hat{x} = x/x_s, \quad x_s = (l_0^2 - l^2)^{1/2}, \quad \hat{l} = l/l_0, \quad \hat{k} = k_h/k_v, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/d\tau, \quad \tau = \omega_n t.$$

写成下列 Itô 微分方程形式为

$$d\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \tau) d\tau + \mathbf{g}(\mathbf{X}, \tau) d\mathbf{B}(\tau), \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{X}(\tau) = (\hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau))^T, \quad \mathbf{B}(\tau) = (\eta_1(\tau), \eta_2(\tau))^T,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, \tau) = \begin{bmatrix} \hat{x}'(\tau) \\ f(\hat{x}, \hat{x}', \tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{X}, \tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\sigma} \end{bmatrix},$$

$$f(\hat{x}, \hat{x}', \tau) = - \left( 2\hat{\zeta}_v + 4\hat{\zeta}_h \frac{(1 - \hat{l}^2)\hat{x}^2}{(1 - \hat{l}^2)\hat{x}^2 + \hat{l}^2} \right) \hat{x}' -$$

$$\left(1 + 2\hat{k}\left(1 - \frac{1}{(\hat{x}^2(1 - \hat{l}^2) + \hat{l}^2)^{1/2}}\right)\right)\hat{x}.$$

在随机激励下,设定初始条件为  $\mathbf{X}(\tau_0) = \mathbf{X}^{(0)}$ , 得到对应的 FPK 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{X}, \tau | \mathbf{X}^{(0)}, \tau_0)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{f}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{q}(\mathbf{X}, \tau | \mathbf{X}^{(0)}, \tau_0)] + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathbf{B}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{q}(\mathbf{X}, \tau | \mathbf{X}^{(0)}, \tau_0)], \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{g}^2(\mathbf{X}, \tau).$$

将 FPK 方程在时间上离散化,得到路径积分方程

$$\mathbf{p}(\mathbf{X}^{(i)}, \tau_i) = \int \mathbf{q}(\mathbf{X}^{(i)}, \tau_i | \mathbf{X}^{(i-1)}, \tau_{i-1})\mathbf{p}(\mathbf{X}^{(i-1)}, \tau_{i-1})d\mathbf{X}^{(i-1)}. \quad (13)$$

为简化计算,使用 Gauss 矩方法,在给定的初始 Gauss 分布概率密度条件下,可以通过计算概率密度函数前二阶矩的演化来近似计算概率密度函数的演化,并且在过程中将系统的非线性项做三次近似计算:

$$\begin{cases} \hat{m}_{10} = m_{01}, \\ \hat{m}_{01} = -2\zeta_1 m_{01} - 2\xi_n m_{20} m_{01} - \alpha m_{10} - \gamma(3m_{10} m_{20} - 2m_{10}^3), \\ \hat{m}_{20} = 2m_{11}, \\ \hat{m}_{11} = m_{02} - 2\xi_1 m_{11} - 2\xi_n m_{20} m_{11} - \alpha m_{20} - \gamma(3m_{20}^2 - 2m_{10}^4), \\ \hat{m}_{02} = -4\xi_1 m_{02} - 4\xi_n m_{20} m_{02} - 2\alpha m_{11} - 2\gamma(3m_{11} m_{20} - 2m_{10}^3 m_{01}) + 2\hat{\sigma}^2, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} m_{ij} &= E[\hat{x}^i \hat{x}^j], \quad \zeta_1 = \zeta_v, \quad \zeta_n = \zeta_h(1 - \hat{l}^2)/\hat{l}^2, \\ \alpha &= 1 - 2\hat{k}((1 - \hat{l})/\hat{l}), \quad \gamma = \hat{k}(1 - \hat{l}^2)/\hat{l}^3, \end{aligned}$$

$\hat{x}^i$  是  $\hat{x}$  的  $i$  阶幂,  $\hat{x}^j$  是  $\hat{x}$  的  $j$  阶幂.

通过计算传递力和激励力的标准差比值来获得该系统在随机激励下的力传递率

$$|T_F| = \frac{S_d(\hat{f}_1)}{\hat{\sigma}}, \quad (15)$$

其中

$$\hat{f}_1 = \left(\hat{c}_v + 2\hat{c}_h \frac{\hat{x}^2}{\hat{x}^2 + \hat{l}^2}\right)\hat{x}' + \hat{x} + 2\hat{k}\left(1 - \frac{1}{(\hat{x}^2 + \hat{l}^2)^{1/2}}\right)\hat{x}.$$

### 3 结果与讨论

针对非线性阻尼非线性刚度隔振系统,使用 Gauss 矩方法对传递力的概率密度进行迭代计算.结构和激励幅值等参数为  $\hat{k} = 1, \hat{\sigma} = 1, \zeta_h = 0.05, \zeta_v = 0.25$ .图 4 为在不同非线性刚度(通过改变  $\hat{l}$  值)下,系统传递力的概率密度函数.可以发现,随着  $\hat{l}$  值的减小、刚度非线性增加,概率密度函数峰的高度增加.出现该现象的原因是,随着隔离刚度非线性的增加,会使通过非线性弹簧和阻尼传递的力减小.

通过参数研究,对比了竖直阻尼和水平阻尼对非线性隔振系统传递率的影响.图 5 为不同非线性刚度(通过改变  $\hat{k}$ )下,非线性隔振系统传递率的变化曲线,结构和激励幅度参数与图 4

一致,曲线是路径积分法得到的结果,点是 Monte-Carlo 模拟计算的结果.研究发现随着  $\hat{\sigma}$  增加力传递率增加.而且在相同噪声强度下  $\hat{k}$  减小力传递率减小.图 6 为不同的非线性阻尼(通过改变水平阻尼  $\zeta_h$ ) 下,非线性隔振系统传递率的变化曲线.结构和激励幅值参数与上图一致,曲线是路径积分法得到的结果,点是 Monte-Carlo 模拟计算的结果.研究发现水平阻尼  $\zeta_h$  可以减小传递率.通过对比图 5 和图 6 发现在低噪声强度下传递率对非线性刚度和阻尼的变化不敏感.并且随着噪声强度的增加,非线性阻尼和非线性刚度的抑制能力增加.其原因是当  $\hat{\sigma} = 0$  非线性阻尼项中的位移等于 0,所以非线性阻尼对系统影响可以忽略.

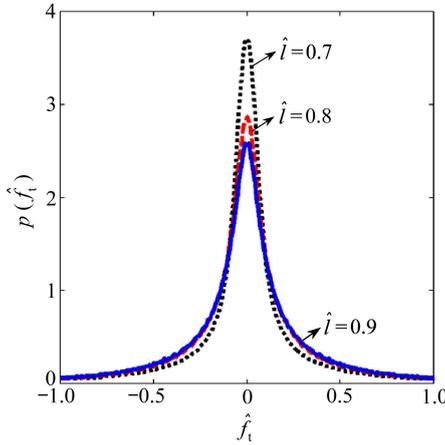


图 4 不同非线性刚度下传递率概率密度分布图

Fig. 4 Probability densities of the non-dimensional transmitting force with different nonlinear stiffnesses

另外,图 5 和 6 中路径积分法和 Monte-Carlo 数值模拟结果相吻合,说明路径积分法是研究强非线性随机动力学特性的有效手段.

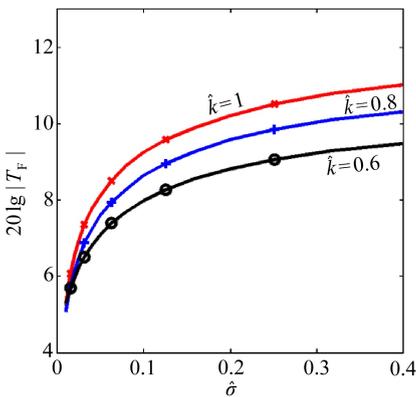


图 5 不同非线性刚度下传递率随噪声强度的变化图

Fig. 5 Curves of force transmissibility vs. noise intensity with different nonlinear stiffnesses

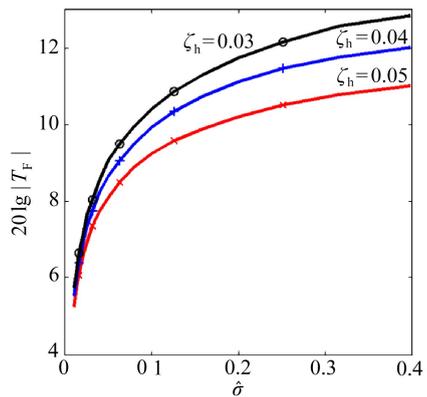


图 6 不同非线性阻尼下传递率随激励幅度的变化图

Fig. 6 Curves of force transmissibility vs. excitation amplitude with different nonlinear dampings

通过与等价线性阻尼的比较来确定非线性阻尼隔振效率.非线性阻尼与线性阻尼比较的原则是当噪声强度取特定值时,它们的传递率相等.这里噪声强度取  $\hat{\sigma} = 0.1$ .如图 7 所示,取非线性阻尼和取等价线性阻尼的传递率在  $\hat{\sigma} = 0.1$  处交于一点.图 7 为不同非线性阻尼下,比较了非线性阻尼和等价线性阻尼对传递率的影响,实线代表非线性阻尼,虚线代表等价线性阻

尼;标“ $\circ$ ”表示  $\zeta_h = 0.01$ , 标“ $\times$ ”表示  $\zeta_h = 0.05$ 。研究发现,在噪声强度较大时,非线性阻尼抑制随机振动优于线性阻尼,并且随着噪声强度的增加非线性阻尼的作用越明显;在噪声强度较小时,线性阻尼优于非线性阻尼。这一结论在大阻尼或小阻尼情况下都成立。

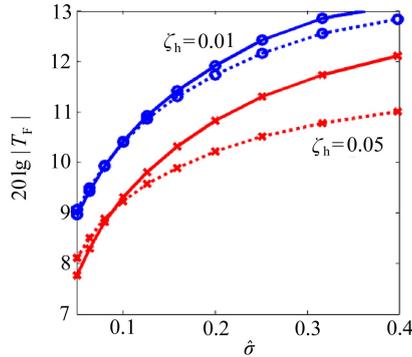


图7 对比非线性阻尼和等价线性阻尼对传递率曲线的影响

Fig. 7 Comparison of effects on the transmissibility between linear and equivalent nonlinear dampings

## 4 结 论

本文研究了刚度和阻尼均为非线性隔振系统的力学特性,考察了在随机激励下的隔振性能,刚度和阻尼非线性分别是由水平弹簧和水平阻尼的几何布置获得.通过求解 FPK 方程等效非线性随机振动方程研究了非线性隔振系统在随机激励下的隔振性能,并使用路径积分和 Monte-Carlo 数值方法进行了验证.在此基础上研究了刚度非线性和阻尼非线性对隔振系统在随机激励下力传递率及其概率分布的影响.最后对比了非线性阻尼与等价线性阻尼对随机振动隔离的效果;研究表明,在噪声强度较大时,非线性阻尼抑制振动的能力强于线性阻尼,并且随着噪声强度的增加,优势更明显,在噪声强度较小时,线性阻尼优于非线性阻尼。

## 参考文献(References):

- [1] Rivin E I. *Passive Vibration Isolation*[M]. New York: ASME Press, 2003.
- [2] Mead D J. *Passive Vibration Control*[M]. London: John Wiley & Sons Ltd, 1998.
- [3] Piersol A G, Paez T L. *Harris' Shock and Vibration Handbook*[M]. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [4] Ibrahim R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **314**(3/5): 371-452.
- [5] JU Li-wen, Blair D G. Low resonant frequency cantilever spring vibration isolator for gravitational wave detectors[J]. *Review of Scientific Instruments*, 1994, **65**(11): 3482-3488.
- [6] Virgin L N, Santillan S T, Plaut R H. Vibration isolation using extreme geometric nonlinearity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **315**(3): 721-731.
- [7] Alabuzhev P, Gritchin A, Kim L, et al. *Vibration Protecting and Measuring Systems With Quasi-Zero Stiffness*[M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [8] Carrella A, Brennan M J, Waters T P, et al. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, **55**(1): 22-29.
- [9] Huang X Ch, Liu X T, Hua H X. Effects of stiffness and load imperfection on the isolation

- performance of a high-static-low-dynamic-stiffness non-linear isolator under base displacement excitation[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, **65**: 32-43.
- [10] Ravindra B, Mallik A K. Hard Duffing-type vibration isolator with combined Coulomb and viscous damping[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1993, **28**(4): 427-440.
- [11] Ravindra B, Mallik A K. Chaotic response of a harmonically excited mass on an isolator with non-linear stiffness and damping characteristics[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **182**(3): 345-353.
- [12] Ho C, Lang Z, Billings S A. A frequency domain analysis of the effects of nonlinear damping on the Duffing equation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, **45**(1): 49-67.
- [13] Ho C, Lang Z, Billings S A. Design of vibration isolators by exploiting the beneficial effects of stiffness and damping nonlinearities[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(12): 2489-2504.
- [14] Kirk C L. Non-linear random vibration isolators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **124**(1): 157-182.
- [15] Le T D, Ahn K K. A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(26): 6311-6335.
- [16] 李倩, 刘俊卿, 陈诚诚. 随机激励下四自由度车辆-道路耦合系统动力分析[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 460-473. (LI Qian, LIU Jun-qing, CHEN Cheng-cheng. Dynamic analysis of the 4-DOF vehicle-road coupling system under random excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 460-473. (in Chinese))
- [17] 赵岩, 李明武, 林家浩, 等. 陀螺系统随机振动分析的辛本征展开方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 449-459. (ZHAO Yan, LI Ming-wu, LIN Jia-hao, et al. Symplectic eigenspace expansion for the random vibration analysis of gyroscopic systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 449-459. (in Chinese))
- [18] 庞辉, 彭威, 原园. 随机激励下重载车辆空气悬架参数多目标优化[J]. 振动与冲击, 2014, **33**(6): 156-160, 178. (PANG Hui, PENG Wei, YUAN Yuan. Multi-objective optimization of pneumatic suspension parameters for heavy vehicle under random excitation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(6): 156-160, 178. (in Chinese))
- [19] 董满生, 李满, 林志, 等. 随机地震激励下水中悬浮隧道的动力响应[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(12): 1320-1329. (DONG Man-sheng, LI Man, LIN Zhi, et al. Dynamic response of the submerged floating tunnel under random seismic excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(12): 1320-1329. (in Chinese))
- [20] 静行, 刘真真, 原方. 随机激励下基于ICA的结构模态参数识别[J]. 噪声与振动控制, 2014, **34**(6): 178-183. (JING Hang, LIU Zhen-zhen, YUAN Fang. Structural modal parameter identification based on ICA under random excitation[J]. *Noise and Vibration Control*, 2014, **34**(6): 178-183. (in Chinese))
- [21] 何青, 毛新华, 褚东亮. 随机激励下双稳态压电振动发电机的振动特性[J]. 噪声与振动控制, 2015, **35**(2): 36-40. (HE Qing, MAO Xin-hua, CHU Dong-liang. Dynamic characteristics of a bistable piezoelectric vibration generator under random excitation[J]. *Noise and Vibration Control*, 2015, **35**(2): 36-40. (in Chinese))
- [22] Yu J S, Cai G Q, Lin Y K. A new path integration procedure based on Gauss-Legendre scheme [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, **32**(4): 759-768.

# An Investigation on Nonlinear-Damping and Nonlinear-Stiffness Vibration Isolation Systems Under Random Excitations

LI Jue-min, LU Ze-qi, CHEN Li-qun

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China*)

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Both nonlinear damping and nonlinear stiffness were introduced in vibration isolation systems under random excitations to improve the isolation performance. The nonlinear damping and nonlinear stiffness were realized through the geometric arrangement of the horizontal springs and horizontal dampers. The performance of the nonlinear vibration isolator under random excitation was evaluated with the equivalent Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation transformed by the nonlinear stochastic vibration equation. The effects of the nonlinearity introduced in stiffness and damping on the transmissibility and its probability were studied. It is found that, for high levels of random excitations, the damping nonlinearity brings larger reduction of the random vibration response, and the gap between the linear and the nonlinear dampings is enlarged; however, for low levels of random excitations, the nonlinear damping has less efficacy than the linear damping.

**Key words:** nonlinear vibration isolation; force transmissibility; random excitation; nonlinear damping; nonlinear stiffness

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11502135; 11572182)

---

引用本文/Cite this paper:

黎崛珉, 陆泽琦, 陈立群. 非线性阻尼非线性刚度隔振系统随机动力学特性研究[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(6): 613-621.

LI Jue-min, LU Ze-qi, CHEN Li-qun. An investigation on nonlinear-damping and nonlinear-stiffness vibration isolation systems under random excitations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(6): 613-621.