

层状弹性材料界面 J 积分的产生和特征*

陈昌荣

(上海工程技术大学 飞行学院, 上海 201620)

摘要: 层状弹性材料的裂纹方向垂直于界面时,沿围绕裂尖的任意一条封闭路径 Γ 的 J 积分(J_Γ)由两部分组成, $J_\Gamma = J_{tip} + J_{int}$, 这里 J_{tip} 表示裂尖产生的 J 积分, J_{int} 表示 Γ 所包围的界面产生的 J 积分. 裂尖产生的 J 积分不随 Γ 变化, 物理含义是裂纹扩展能量释放率; 界面产生的 J 积分随 Γ 变化, 物理含义与裂纹扩展能量释放率无关. 界面 J 积分的产生使 J_Γ 失去了路径无关特性, 也失去了实际物理意义. 为了有助于理解非均匀材料 J 积分的含义和局限性, 分析了层状弹性材料界面 J 积分的产生原因和特点. 由不同均匀弹性材料组成的层状材料中, 应变能密度的跳跃是界面 J 积分产生的原因, 而弹性模量和残余应力在界面处的跳跃可使应变能密度在界面处产生跳跃. 层状弹性材料的界面 J 积分之间具有相互抵消的作用.

关键词: J 积分; 界面; 层状弹性材料; 材料非均匀性

中图分类号: O343

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370270

符号说明

h	层状弹性材料厚度
h_A, h_B	材料 A、B 的每层厚度
σ_{yb}	弯曲载荷产生的 y 向应力
$\sigma_{yb_{max}}$	弯曲载荷在层状弹性材料表面产生的 y 向应力
$\sigma_{yTA}, \sigma_{yTB}$	A、B 层的 y 向残余应力
$\sigma_{zTA}, \sigma_{zTB}$	A、B 层的 z 向残余应力
E'_A, E'_B	A、B 层在平面应变条件下的弹性模量
J_{tip}	裂尖 J 积分, 围绕裂尖的积分路径所包围区域内不允许存在材料非均匀性
J_{int}	界面 J 积分
N	层状弹性材料中 B 层的数量
$W(x, y)$	在材料坐标系中的点 (x, y) 的应变能密度
$[[W(\xi_j, y)]]$	界面右侧与左侧弹性应变能密度之差

引 言

对于弹性材料中的裂纹, Griffith 断裂准则可表示为: $-dU/dA = G_c$. 这里, U 表示弹性应变

* 收稿日期: 2016-09-05; 修订日期: 2016-12-21

基金项目: 国家自然科学基金(51175321)

作者简介: 陈昌荣(1964—), 男, 教授, 博士 (E-mail: 13761742152@163.com).

能; A 表示裂纹面积; $-dU/dA$ 表示裂纹扩展能量释放率, 即裂纹扩展单位面积所引起的弹性应变能变化量; G_c 是材料常数, 表示弹性材料产生单位面积裂纹所需要消耗的能量^[1]. Griffith 断裂准则的物理意义清晰, 但直接计算裂纹扩展能量释放率不方便. 对于均匀弹性材料, Rice 的 J 积分恰好等于裂纹扩展能量释放率, 而 J 积分的路径无关特性使裂纹扩展能量释放率可沿远离裂尖的路径准确地计算^[2], 所以 J 积分成为断裂分析中定量表征裂纹驱动力的主要参数之一. 然而, 非均匀弹性材料中的 J 积分却令人困惑, 如果积分路径所包围的区域内沿裂纹方向存在材料参数变化, J 积分就会失去与裂纹扩展能量释放率的等量关系, 也失去路径无关特性^[3].

在非均匀材料中, 裂尖 J 积分(J_{tip}) 与远场 J 积分(J_{far}) 的关系是 $J_{tip} = J_{far} + C_{inh}$ ^[4-8]. 这里, J_{tip} 是在裂尖附近沿围绕裂尖的路径 Γ_{tip} 计算的 J 积分, Γ_{tip} 所围区域内必须无材料非均匀性; J_{far} 是在远离裂尖区域沿围绕裂尖的路径 Γ_{far} 计算的 J 积分, Γ_{far} 包围了全部材料非均匀性; C_{inh} 表示路径 Γ_{tip} 与 Γ_{far} 之间区域内的材料非均匀性的作用总和. 如果非均匀弹性材料由不同的均匀材料组成, 即材料参数只在界面处发生变化, 那么 $-C_{inh}$ 等于路径 Γ_{tip} 与 Γ_{far} 之间区域内的所有界面的 J 积分之和(J_{int})^[9], 所以 $J_{tip} = J_{far} - J_{int}$. 若 Γ 是逆时针围绕裂尖的任意一条封闭路径, 那么沿 Γ 的 J 积分(J_r) 可看作裂尖 J 积分(J_{tip}) 与界面 J 积分(J_{int}) 之和, 其中 J_{tip} 保持路径无关特性, 其值等于裂纹扩展能量释放率; J_{int} 随路径变化, 其值与裂纹扩展能量释放率无关. 所以, $J_r - J_{int}$ 保持路径无关特性, 其值等于裂纹扩展能量释放率.

非均匀弹性材料断裂分析所需要的裂纹驱动力参数是裂纹扩展能量释放率. 根据上述裂纹扩展能量释放率与 J 积分的关系, 可用两种方法计算裂纹扩展能量释放率. 第一种方法是直接计算 J_{tip} : 取围绕裂尖的路径 Γ_{tip} 靠近裂尖, Γ_{tip} 不接触任何界面, 即确保 Γ_{tip} 包围的区域是均匀材料^[10]. 第二种方法是计算 $J_r - J_{int}$: 沿围绕裂尖的任意封闭路径 Γ 计算 J_r , 再计算 Γ 包围区域内的界面 J 积分 J_{int} , $J_r - J_{int}$ 就等于裂纹扩展能量释放率. 如果仅考虑非均匀弹性材料断裂分析, 计算出 J_{tip} 或 $J_r - J_{int}$ 就可以满足需要, 不必了解 J_r 和 J_{int} 的性质. 但研究界面 J 积分有助于更好地理解 J 积分的物理意义和局限性, 对非均匀材料设计也可能有意义^[11].

J 积分与界面的相对方向对 J 积分有重要影响. 沿界面方向计算的界面 J 积分为 0, 所以当裂纹方向平行于界面或沿着界面时, 裂纹 J 积分与路径无关^[12-13]. 沿垂直于界面方向计算的界面 J 积分不为 0, 而且与路径相关. 所以, 当裂纹方向垂直于或倾斜于界面时, 由于界面 J 积分的干扰, 裂纹 J 积分与路径相关. 为了有助于理解非均匀材料 J 积分的性质, 本文分析层状弹性材料沿垂直于界面方向计算的界面 J 积分特征.

1 J 积分的定义

1.1 裂纹 J 积分的定义

Rice 的 J 积分定义为^[2]

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (1)$$

这里, x 轴沿裂纹方向, y 轴垂直于裂纹方向; Γ 表示任意一条从裂纹下表面出发、逆时针围绕裂尖、终止于裂纹上表面的路径; t_i ($t_i = t_x, t_y$) 是路径 Γ 上的法向力向量 \mathbf{t} 沿 x 和 y 的分量, 力向量 \mathbf{t} 与应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的关系是 $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量是 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} ; \mathbf{u} 是位移向量, ds 表示沿路径 Γ 的长度增量; W 表示应变能密度.

裂纹扩展会导致整个弹性体的应变能减小, Rice 的 J 积分的物理含义是裂纹扩展能量释

放率,即裂纹扩展单位面积所释放的弹性应变能.弹性材料在裂纹扩展过程中的能量耗散机制只有裂纹扩展,所以整个弹性体的能量耗散等于裂纹的能量耗散.在均匀弹性材料中,由于 J 积分具有路径无关特性,所以可选远离裂尖的路径计算 J 积分,甚至可沿弹性体的边界计算 J 积分^[14].

1.2 广义 J 积分的定义

Rice 的 J 积分是沿围绕裂尖的封闭路径定义的.广义 J 积分就是式(1)中的路径 Γ 是任意一条逆时针方向的封闭路径,不限定必须围绕裂尖.如果此封闭路径所包围区域内既无裂尖、也无材料非均匀性,那么 J 积分为 0.如果 Γ 所围区域内存在缺陷(夹杂、孔洞、界面等),那么 J 积分就是缺陷移动能量释放率,即缺陷沿 x 方向移动单位距离所导致的弹性应变能变化量^[15].

2 层状弹性材料 J 积分的物理含义

2.1 层状弹性材料裂尖 J 积分的物理含义

只要围绕裂尖的积分路径局限在裂尖所在的那一层材料之内,如图 1(a) 所示,那么 J 积分就与路径无关,定义为裂尖 J 积分(J_{tip}).假如裂尖在材料坐标系中沿 x 方向前进,材料的弹性应变能就会相应减小^[16].层状弹性材料 J_{tip} 的物理含义就是裂纹扩展能量释放率,即,裂尖在材料坐标系中沿 x 方向前进单位长度所导致的单位厚度(z 向)层状弹性材料的弹性应变能减小量.Griffith 断裂准则 ($-dU/dA = G_C$) 就变成 $J_{tip} = J_{lc}$, J_{lc} 是裂尖所在材料层的 J 积分临界值, J_{lc} 等于裂纹扩展内聚力模型中的内聚能^[17].

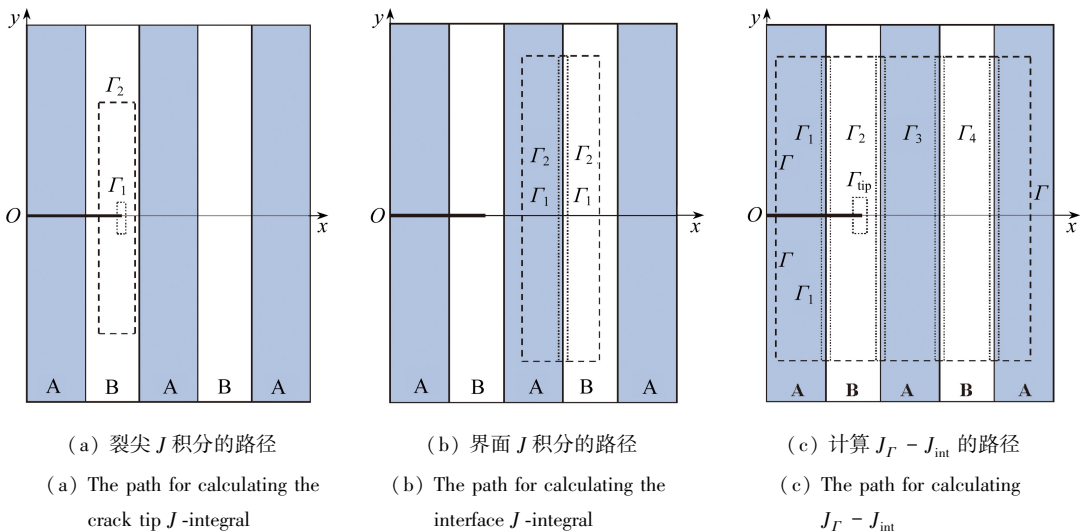


图 1 用于计算层状弹性材料 J 积分的路径

Fig. 1 Contours for calculating different J -integrals of the elastic laminate

2.2 层状弹性材料界面 J 积分的物理含义

当一条封闭路径围绕一段界面时,按式(1)计算的 J 积分就是界面 J 积分.如果界面两侧材料是不同的均匀材料,那么界面可看作一种缺陷,界面 J 积分可看作驱动界面沿 x 方向移动的力^[18].在路径所包围界面长度不变的条件下,如果积分路径的左路不超出界面左侧那一层、右路不超出界面右侧那一层,则界面 J 积分与路径无关.所以,在图 1(b)中,沿路径 Γ_1 和 Γ_2 计算的界面 J 积分相等.由于界面 J 积分随着积分路径所包围的界面长度变化,所以每个界面的 J 积分都是路径相关的.

如果界面在材料坐标系中沿 x 方向移动,材料的弹性应变能就会变化.界面 J 积分的物理含义就是界面移动能量释放率,即,界面在材料坐标系中沿 x 方向移动单位长度所导致的单位厚度(z 向)层状弹性材料的弹性应变能变化量.在裂纹扩展过程中,界面在材料坐标系中没有移动,所以界面没有耗散能量.界面没有耗散能量,却对 J 积分有贡献,所以界面 J 积分代表的能量释放率是假想的,不具有实际的物理意义.

2.3 层状弹性材料 J_r 的物理含义

假设 Γ 是在远离裂尖处围绕裂尖的一条封闭路径, Γ 所包围区域内包含部分界面,如图 1(c) 所示.界面 J 积分与路径相关导致 J_r 与路径相关. J_r 的物理含义可表述为:裂尖和界面在材料坐标系中沿 x 向移动单位长度时,单位厚度(z 向)层状弹性材料的弹性应变能减小量.裂纹扩展与界面移动是两个不相关事件,裂纹扩展时界面没有发生移动,界面也就没有导致弹性能的减少,所以 J_r 代表的能量释放率是假想的,不具有实际的物理意义.

3 层状弹性材料模型中的界面位置描述

3.1 层状弹性材料模型

层状弹性材料由 A 材料层和 B 材料层交替排列构成,A 层和 B 层都是均匀材料^[19-21].左右两个表层都为 A 层,共有 N 个 B 层、 $N + 1$ 个 A 层,本文取 N 为偶数.每个 A 层和每个 B 层的厚度分别为 h_A 和 h_B ,层状弹性材料总厚度为 h ,共有 $2N$ 个界面.

3.2 界面位置描述

取 x 方向垂直于界面, y 方向平行于界面,坐标原点位于左边界.界面的 x 坐标值为

$$\begin{cases} x_{2k-1} = kh_A + (k-1)h_B, & k = 1, 2, 3, \dots, N. \\ x_{2k} = kh_A + kh_B, \end{cases} \quad (2)$$

左、右边界的 x 坐标值分别为 $x = 0$ 和 $x = h$,对称面位于 $x = h/2$.

为了方便地表示界面位置,用无量纲坐标 ξ 来代替 x , ξ 与 x 的关系是

$$\xi = \frac{x - h/2}{h/2}, \quad (3)$$

这里

$$-1 \leq \xi \leq 1.$$

界面位置可表示为 $\xi = \xi_j$ 和 $\xi = -\xi_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, N$.

$$\xi_{2k-1} = \frac{(k-1/2)h_A + (k-1)h_B}{h/2}, \quad (4a)$$

$$\xi_{2k} = \frac{(k-1/2)h_A + kh_B}{h/2}, \quad (4b)$$

这里

$$k = 1, 2, 3, \dots, N/2.$$

ξ_1 对应 x_{N+1} , $-\xi_1$ 对应 x_N ; ξ_2 对应 x_{N+2} , $-\xi_2$ 对应 x_{N-1} ; \dots ; ξ_N 对应 x_{2N} , $-\xi_N$ 对应 x_1 .

4 层状弹性材料界面 J 积分特征分析

4.1 残余应力产生的界面 J 积分

根据界面 J 积分的定义,产生界面 J 积分的主要原因是应变能密度在界面处出现跳跃.残余应力可导致应变能密度在界面跳跃,下面分析残余应力产生的界面 J 积分特征.

假设层状弹性材料没有受到外载荷作用,只受由 A 层与 B 层热膨胀系数不同或固体相变不同引起的残余应力的作用,无裂纹.残余应力在每层中是均匀的,A 层沿 y 向和 z 向的残余应力分别为 σ_{yTA} 和 σ_{zTA} ,B 层沿 y 向和 z 向的残余应力分别为 σ_{yTB} 和 σ_{zTB} .由于 x 方向残余应力为 0,面积积分路径的法向力就为 0,所以式(1)中的第二项为 0,界面 J 积分由界面两侧的弹性应变能密度之差及界面长度决定.界面两侧应变能密度之差可表示为

$$[[W(-\xi_{2k-1},y)]] = \frac{\sigma_{yTA}^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A} - \frac{\sigma_{yTB}^2 + \sigma_{zTB}^2}{2E'_B}, \quad (5a)$$

$$[[W(-\xi_{2k},y)]] = \frac{\sigma_{yTB}^2 + \sigma_{zTB}^2}{2E'_B} - \frac{\sigma_{yTA}^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A}, \quad (5b)$$

这里

$$k = 1, 2, 3, \dots, N/2.$$

由对称性可知

$$[[W(\xi_j,y)]] = -[[W(-\xi_j,y)]], \quad (6)$$

即,界面长度相同时,对称的两个界面的 J 积分之和为 0,这里, $j = 1, 2, 3, \dots, N$.

根据式(5a)、(5b)、(6)可知

$$[[W(-\xi_j,y)]] + [[W(-\xi_{j+1},y)]] = [[W(\xi_j,y)]] + [[W(\xi_{j+1},y)]] = 0, \quad (7)$$

即,界面长度相同时,相邻两个界面的 J 积分之和为 0,这里, $j = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

由式(6)可知

$$\sum_{j=1}^N ([[W(-\xi_j,y)]] + [[W(\xi_j,y)]]) = 0, \quad (8)$$

即,界面长度相同时,界面的 J 积分总和为 0.

从式(5a)、(5b)可知:如果 A 层与 B 层的弹性模量相同,而且 A 层总厚度与 B 层总厚度相等,那么 A 层与 B 层的残余应力绝对值相等,每个界面两侧的应变能密度相等,从而导致每个界面的 J 积分都等于 0.

4.2 弯曲应力在弹性模量不匹配界面产生的界面 J 积分

假设 A 层与 B 层弹性模量不同,没有残余应力,无裂纹.受弯曲载荷作用时,界面处的应变是连续的,但弹性模量在界面处的跳跃导致 y 方向应力在界面处跳跃.受弯曲载荷作用时,由于 x 方向应力为 0,式(1)中的第二项为 0,所以弯曲应力产生的界面 J 积分由界面两侧的应变能密度之差及界面长度决定.界面两侧应变能密度之差可表示为

$$[[W(\xi_{2k-1},y)]] = \frac{E'_B}{E'_A} \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1})^2}{2E'_A} - \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1})^2}{2E'_A} = \left(\frac{E'_B}{E'_A} - 1 \right) \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1})^2}{2E'_A}, \quad (9a)$$

$$[[W(\xi_{2k},y)]] = \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k})^2}{2E'_A} - \frac{E'_B}{E'_A} \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k})^2}{2E'_A} = \left(1 - \frac{E'_B}{E'_A} \right) \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k})^2}{2E'_A}, \quad (9b)$$

这里

$$k = 1, 2, 3, \dots, N/2.$$

由对称性可知

$$[[W(-\xi_j,y)]] = -[[W(\xi_j,y)]], \quad (10)$$

即,界面长度相同时,对称的两个界面的 J 积分之和为 0,这里, $j = 1, 2, 3, \dots, N$.

根据式(9a)、(9b)可知

$$[[W(\xi_{2k-1}, y)]] + [[W(\xi_{2k}, y)]] = \left(1 - \frac{E'_B}{E'_A}\right) \frac{\sigma_{yb_{\max}}^2}{2E'_A} (\xi_{2k}^2 - \xi_{2k-1}^2), \quad (11a)$$

$$[[W(-\xi_{2k-1}, y)]] + [[W(-\xi_{2k}, y)]] = -\left(1 - \frac{E'_B}{E'_A}\right) \frac{\sigma_{yb_{\max}}^2}{2E'_A} (\xi_{2k}^2 - \xi_{2k-1}^2), \quad (11b)$$

即,相邻两个界面的 J 积分具有部分相互抵消的作用,这里, $k = 1, 2, 3, \dots, N/2$.

由式(10)可知

$$\sum_{j=1}^N ([[W(-\xi_j, y)]] + [[W(\xi_j, y)]]) = 0, \quad (12)$$

即,界面长度相同时,所有界面的 J 积分之和为 0.

弯曲载荷与残余应力产生界面 J 积分具有不同的特点,弯曲载荷作用时,界面两侧 y 向弯曲应变连续,弹性模量在界面两侧不同导致弯曲应力在界面跳跃,界面 J 积分必不为 0;残余应力作用时,界面两侧不仅应力不同,应变也不同,界面 J 积分有等于 0 的可能性.

4.3 残余应力和弯曲应力共同产生的界面 J 积分

假设 A 层与 B 层弹性模量不同,存在残余应力,承受弯曲载荷,无裂纹.在残余应力和弯曲应力共同存在时, x 方向应力仍为 0,式(1)中的第二项为 0,所以界面 J 积分由界面两侧的应变能密度之差及界面长度决定.界面两侧应变能密度之差可表示为

$$[[W(-\xi_{2k-1}, y)]] = \frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1} + \sigma_{yTA})^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A} - \frac{\left(\frac{E'_B}{E'_A} \sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1} + \sigma_{yTB}\right)^2 + \sigma_{zTB}^2}{2E'_B}, \quad (13a)$$

$$[[W(\xi_{2k-1}, y)]] = -\frac{(\sigma_{yTA} - \sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1})^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A} + \frac{\left(\sigma_{yTB} - \frac{E'_B}{E'_A} \sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k-1}\right)^2 + \sigma_{zTB}^2}{2E'_B}, \quad (13b)$$

$$[[W(-\xi_{2k}, y)]] = -\frac{(\sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k} + \sigma_{yTA})^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A} + \frac{\left(\frac{E'_B}{E'_A} \sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k} + \sigma_{yTB}\right)^2 + \sigma_{zTB}^2}{2E'_B}, \quad (13c)$$

$$[[W(\xi_{2k}, y)]] = \frac{(\sigma_{yTA} - \sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k})^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A} - \frac{\left(\sigma_{yTB} - \frac{E'_B}{E'_A} \sigma_{yb_{\max}} \xi_{2k}\right)^2 + \sigma_{zTB}^2}{2E'_B}, \quad (13d)$$

这里

$$k = 1, 2, 3, \dots, N/2.$$

对称的两个界面 J 积分之和为

$$[[W(-\xi_{2k-1}, y)]] + [[W(\xi_{2k-1}, y)]] = \frac{2\xi_{2k-1} \sigma_{yb_{\max}}}{E'_A} (\sigma_{yTA} - \sigma_{yTB}), \quad (14a)$$

$$[[W(-\xi_{2k}, y)]] + [[W(\xi_{2k}, y)]] = -\frac{2\xi_{2k}\sigma_{yb_{\max}}}{E'_A}(\sigma_{yTA} - \sigma_{yTB}), \quad (14b)$$

这里

$$k = 1, 2, 3, \dots, N/2.$$

根据式(14a)、(14b), 单位长度所有界面的 J 积分总和为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N ([[W(-\xi_j, y)]] + [[W(\xi_j, y)]]) = \\ - \sum_{k=1}^{N/2} 2 \frac{\sigma_{yb_{\max}}}{E'_A} (\sigma_{yTA} - \sigma_{yTB}) (\xi_{2k} - \xi_{2k-1}). \end{aligned} \quad (15)$$

由式(4)可得

$$\xi_{2k} - \xi_{2k-1} = \frac{h_B}{h/2}. \quad (16)$$

B 层与 A 层的残余应力关系为

$$\sigma_{yTB} = -\frac{(N+1)h_A}{Nh_B} \sigma_{yTA}, \quad (17)$$

则

$$\sigma_{yTA} - \sigma_{yTB} = \left(1 + \frac{(N+1)h_A}{Nh_B}\right) \sigma_{yTA} = \frac{h}{Nh_B} \sigma_{yTA}. \quad (18)$$

将式(16)、(18)代入式(15)得

$$\sum_{j=1}^N ([[W(-\xi_j, y)]] + [[W(\xi_j, y)]]) = -2 \frac{\sigma_{yb_{\max}} \sigma_{yTA}}{E'_A}. \quad (19)$$

由式(19)可知, 在所有界面长度相同的条件下, 界面 J 积分总和具有下列性质: 在弯曲应力和残余应力都存在的情况下, 界面 J 积分总和取决于表面 y 向弯曲应力、表层 y 向残余应力和表层弹性模量; 当弯曲应力不存在或残余应力不存在时, 界面 J 积分总和为 0.

4.4 边界 J 积分

边界可看作一种界面, 即, 材料与空气之间的界面^[7]. 左边界看作一个界面时, 界面左侧对 J 积分没有贡献; 右边界看作一个界面时, 界面右侧对 J 积分没有贡献. 所以,

$$[[W(-1, y)]] = \frac{(\sigma_{yb_{\max}} + \sigma_{yTA})^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A}, \quad (20a)$$

$$[[W(1, y)]] = -\frac{(-\sigma_{yb_{\max}} + \sigma_{yTA})^2 + \sigma_{zTA}^2}{2E'_A}. \quad (20b)$$

由式(20a)、(20b)可知

$$[[W(-1, y)]] + [[W(1, y)]] = \frac{2\sigma_{yb_{\max}} \sigma_{yTA}}{E'_A}. \quad (21)$$

由式(19)、(21)知

$$\begin{aligned} [[W(-1, y)]] + [[W(1, y)]] + \\ \sum_{j=1}^N ([[W(-\xi_j, y)]] + [[W(\xi_j, y)]]) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

所以, 如果边界按界面对待, 那么所有界面 J 积分之和为 0.

4.5 界面 J 积分的适用性问题

4.5.1 裂尖应力场在界面产生的界面 J 积分

解析方法可以帮助我们理解 J 积分的基本原理与概念,但能用解析方法分析的 J 积分问题非常有限.复杂问题应采用数值近似方法来分析^[22].当裂尖靠近界面时,裂尖应力场在界面两侧产生的应变能密度不同,产生界面 J 积分.这种情况下的界面 J 积分用解析方法分析比较困难,采用有限元数值分析方法比较合适.当裂尖无限接近界面时,裂尖断裂过程区尺寸与裂尖到界面距离之比不可忽略,裂尖不能简化为一个点,界面 J 积分不再有效.所以,本文所讨论的界面 J 积分不适合分析裂尖无限接近界面和裂尖位于界面的情况.

4.5.2 层厚对层状材料界面 J 积分适用性的影响

对于非均匀材料,在不同尺度范围研究材料性质需要采用不同的研究方法和理论^[23].层状材料是一种典型的非均匀材料,界面和层厚对断裂韧性有重要影响^[24-25].随着层厚的降低,层状材料单位体积中的界面面积增大.当层厚降到纳米尺度,界面对材料力学性质的影响就成为层状材料设计和寿命预测中的关键问题^[26].对于层厚为纳米尺度的层状材料, J 积分已被用于分析裂纹扩展驱动力^[27-28].但随着层厚的减小,以连续介质力学为基础的 J 积分会越来越不可靠.本文假设层状材料的每层都可以按均质材料对待,并假设界面可以简化为零厚度的理想界面.当层厚降到使界面不能按零厚度的理想界面对待时, J 积分就不再适合分析界面了.

5 结 论

本文分析了层状弹性材料界面 J 积分的产生原因和特点,研究结果有助于理解材料非均匀性与 J 积分的关系.层状弹性材料由 A 材料层和 B 材料层交替排列组成, J 积分的方向垂直于界面,所得结论如下:

1) 残余应力产生的界面 J 积分特点

层状弹性材料存在平行于界面方向的残余应力,残余应力和残余应变在界面处的跳跃导致应变能密度在界面处跳跃,产生界面 J 积分.每个界面的 J 积分与界面两侧残余应力的平方之差成正比;相邻界面的 J 积分之和为 0;对称的两个界面的 J 积分之和为 0;所有界面的 J 积分总和为 0.

2) 弯曲应力在弹性模量不匹配界面产生的 J 积分特点

受弯曲载荷作用时,弯曲应变在界面处连续,但弹性模量不匹配使平行于界面方向的应力在界面处跳跃,导致界面两侧应变能密度不同,产生界面 J 积分.每个界面的 J 积分与界面两侧弹性模量之差成正比;相邻界面的 J 积分一正一负,具有部分相互抵消的作用;对称的两个界面的 J 积分之和为 0;所有界面的 J 积分总和为 0.

3) 弯曲应力与残余应力共同产生的界面 J 积分特点

残余应力使界面处的初始应力和初始应变存在跳跃,弹性模量不匹配使弯曲应力在界面处跳跃,产生界面 J 积分.在弯曲应力和残余应力都存在的情况下,界面 J 积分总和取决于表面 y 向弯曲应力、表层 y 向残余应力和表层弹性模量;当弯曲应力不存在或残余应力不存在时,界面 J 积分总和为 0.

参考文献(References):

- [1] Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids[J]. *Philosophical Transactions of*

- the Royal Society of London*, 1921, **221**: 163-198.
- [2] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, **35**(2): 379-386.
- [3] Sun C T, Wu X X. On the J -integral in periodically layered composites[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, **78**(1): 89-100.
- [4] Simha N K, Fischer F D, Shan G X, et al. J -integral and crack driving force in elastic-plastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, **56**(9): 2876-2895.
- [5] Simha N K, Fischer F D, Kolednik O, et al. Inhomogeneity effects on the crack driving force in elastic and elastic-plastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(1): 219-240.
- [6] Fischer F D, Predan J, Kolednik O, et al. Application of material forces to fracture of inhomogeneous materials: illustrative examples[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, **77**(2): 95-112.
- [7] Fischer F D, Simha N K, Predan J, et al. On configurational forces at boundaries in fracture mechanics[J]. *International Journal of Fracture*, 2012, **174**(1): 61-74.
- [8] Fischer F D, Predan J, Muller R, et al. On problems with the determination of the fracture resistance for materials with spatial variations of the Young's modulus[J]. *International Journal of Fracture*, 2014, **190**(1): 23-38.
- [9] Kolednik O, Predan J, Gubelj N, et al. Modeling fatigue crack growth in biomaterial specimen with the configurational force concept[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2009, **519**(1/2): 172-183.
- [10] Riemelmoser O, Pippan R. The J -integral at Dugdale cracks perpendicular to interfaces of materials with dissimilar yield stresses[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, **103**(4): 397-418.
- [11] 陈昌荣. 层状陶瓷的材料力和裂纹力评估方法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(7): 748-755. (CHEN Chang-rong. A method for evaluating material forces and crack forces in ceramic laminates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 748-755. (in Chinese))
- [12] Shi W, Kuang Z B. J -integral of dissimilar anisotropic media[J]. *International Journal of Fracture*, 1999, **96**(4): 37-42.
- [13] 王利民, 陈浩然, 徐世烺. J 积分在多层介质中的守恒性和其利用[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(10): 1097-1104. (WANG Li-min, CHEN Hao-ran, XU Shi-lang. Conservation law and application of J -integral in multi-materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(10): 1097-1104. (in Chinese))
- [14] Rask M, Sorensen B F. Determination of the J integral for laminated double cantilever beam specimens: the curvature approach[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, **96**(1): 37-48.
- [15] Eshelby J D. The elastic energy-momentum tensor[J]. *Journal of Elasticity*, 1975, **5**(3): 321-335.
- [16] Eshelby J D. Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics [C]//*Fundamental Contributions to the Continuum Theory of Evolving Phase Interfaces in Solids*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999: 82-119.
- [17] 陈昌荣. 适合裂尖穿越界面行为分析的断裂模拟方法研究[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 979-985. (CHEN Chang-rong. On the fracture modeling method for crack tips penetrating elas-

- tic interfaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 979-985. (in Chinese)
- [18] Markenscoff X. Driving forces on phase boundaries: the Eshelby principle for an interface[J]. *International Journal of Fracture*, 2010, **165**(2): 223-227.
- [19] Bermejo R, Torres Y, Sanchez-Herencia A J, et al. Residual stresses, strength and toughness of laminates with different layer thickness[J]. *Acta Materialia*, 2006, **54**(18): 4745-4757.
- [20] Chen C R, Pascual J, Fischer F D, et al. Prediction of the fracture toughness of a ceramic multilayer composite: modeling and experiments[J]. *Acta Materialia*, 2007, **55**(2): 409-421.
- [21] Chen C R, Bermejo R, Kolednik O. Numerical analysis on special cracking phenomena of residual compressive inter-layer in ceramic laminates[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, **77**(13): 2567-2576.
- [22] 钟万勰. 力学与对称——离散: 祖冲之方法论[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(1): i-ii. (ZHONG Wan-xie. Mechanics and symmetry—discretization: Zu-type methodology[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): i-ii. (in Chinese))
- [23] 范镜泓, 陈海波. 非均质材料力学研究进展: 热点、焦点和生长点[J]. 力学进展, 2011, **41**(5): 615-636. (FAN Jing-hong, CHEN Hai-bo. Advances in heterogeneous material mechanics: cutting-edge and growing points[J]. *Advances in Mechanics*, 2011, **41**(5): 615-636. (in Chinese))
- [24] 张金钰, 刘刚, 孙军. 纳米金属多层膜的变形与断裂行为及其尺寸效应[J]. 金属学报, 2014, **50**(2): 169-182. (ZHANG Jin-yu, LIU Gang, SUN Jun. Size effects on deformation and fracture behavior of nanostructured metallic multilayers[J]. *Acta Metallurgica Sinica*, 2014, **50**(2): 169-182. (in Chinese))
- [25] 孙军, 张金钰, 吴凯, 等. Cu 系纳米金属多层膜微柱体的变形与损伤及其尺寸效应[J]. 金属学报, 2016, **52**(10): 1249-1258. (SUN Jun, ZHANG Jin-yu, WU Kai, et al. Size effects on the deformation and damage of Cu-based metallic nanolayered micro-pillars[J]. *Acta Metallurgica Sinica*, 2016, **52**(10): 1249-1258. (in Chinese))
- [26] Beyerlein I J, Demkowicz M J, Misra A, et al. Defect-interface interactions[J]. *Progress in Materials Science*, 2015, **74**: 125-210.
- [27] Guo L C, Kitamura T, Yan Y B, et al. Fracture mechanics investigation on crack propagation in the nano-multilayered materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, **64/65**: 208-220.
- [28] Huang K, Guo L C, Yan Y B, et al. Investigation on the competitive fracture behavior in nano-multilayered structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, **92/93**: 45-53.

Characteristics and Generation of Interface J -integrals in Layered Elastic Materials

CHEN Chang-rong

(School of Flight Technology, Shanghai University of Engineering Science,
Shanghai 201620, P.R.China)

Abstract: When a crack in a layered elastic material is perpendicular to the interface, the J -integral along path Γ surrounding the crack tip can be separated into 2 parts: $J_{\Gamma} = J_{\text{tip}} + J_{\text{int}}$, where J_{tip} means the J -integral generated by the crack tip, and J_{int} the J -integral generated by the interface enclosed by Γ . The J -integral generated by the crack tip is path-independent, and its physical meaning is the energy release rate of crack growth; the J -integral generated by the interface is path-dependent, and has no relation to the energy release rate of crack growth. Due to the existence of the interface J -integral, J_{Γ} loses the path-independent property and has no real physical meaning. To better understand the physical meaning and limitations of the J -integrals in inhomogeneous materials, the generation and characteristics of the interface J -integrals in layered elastic materials were analyzed. The results show that, for a layered elastic material composed of different homogeneous materials, the interface J -integrals are generated by the jumps of the strain energy density at the interfaces, and the jumps of the residual stresses and Young's moduli at the interfaces would result in the jump of the elastic strain energy density. Moreover, offset effects exist between interface J -integrals.

Key words: J -integral; interface; layered elastic material; material inhomogeneity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51175321)

引用本文/Cite this paper:

陈昌荣. 层状弹性材料界面 J 积分的产生和特征[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(10): 1155-1165.

CHEN Chang-rong. Characteristics and generation of interface J -integrals in layered elastic materials [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(10): 1155-1165.