

# 基于比例移动最小二乘近似的误差分析\*

王青青, 李小林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 相较于移动最小二乘近似方法,比例移动最小二乘近似法有效地克服了前者带来的矩阵病态这一问题,展示出了更好的数值稳定性和更高的计算精度.给出了比例移动最小二乘近似对函数及其任意阶导数的误差估计,并给出了数值算例来验证之前的理论分析结果,通过与移动最小二乘近似的比较,表明比例移动最小二乘近似能得到更快的收敛性和更稳定的计算性.

**关键词:** 无网格方法; 比例移动最小二乘近似; 稳定性; 误差估计

**中图分类号:** O242.2

**文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370260

## 引言

近几十年来,有限元方法(FEM)和边界元方法(BEM)已成为计算力学中解决工程问题的主要数值计算方法.但在近似时,基于网格,在处理一些碰撞问题和大变形问题时,需要进行网格重构,比较费时.而无网格方法,采用基于点的近似,可以彻底或部分地消除网格,不需要网格的初始划分和重构,不仅可以保证计算的精度,而且可以减小计算的难度.

形函数是无网格方法的基石,移动最小二乘近似(MLS)<sup>[1]</sup>是构造形函数最重要的方法.在MLS中,都是基于离散的节点近似而不是基于网格的.因此,许多基于移动最小二乘近似的无网格方法也蓬勃发展起来,比如无单元 Galerkin(EFG)方法<sup>[2]</sup>、无网格 Petrov-Galerkin 方法<sup>[3]</sup>、边界点方法(BNM)<sup>[4]</sup>、Galerkin BNM<sup>[5-6]</sup>等.

基于传统的最小二乘法,MLS的系数矩阵的条件数可能会变得很大<sup>[7-8]</sup>.因此,对系数矩阵取逆运算可能会导致在计算稳定性和计算精度方面的下降.近来,基于带权正交基函数<sup>[9]</sup>的改进的移动最小二乘近似也发展起来,在改进的移动最小二乘近似方法里,尽管最后代数方程的求解不用通过矩阵求逆运算,但条件数增大这一问题仍然存在<sup>[10]</sup>.

本文首先建立了比例移动最小二乘近似(SMLS).通过选择比例基函数<sup>[8,11]</sup>,SMLS的系数矩阵将不会变得病态.因此,通过SMLS可以避免由MLS带来的坏条件这一缺点,同时,也期待得到更高的计算稳定性和精确度.

形函数在无网格方法中占有非常重要的地位,MLS的误差是分析基于MLS的无网格方法误差的基础.文献[4-8,11-15]在不同的假设下,通过不同的范数给出了MLS的误差估计.同

\* 收稿日期: 2016-08-26; 修订日期: 2017-09-28

**基金项目:** 国家自然科学基金(面上项目)(11471063);重庆市基础科学与前沿技术研究重点项目(cstc2015jcyjBX0083);重庆市教委科学技术研究项目(KJ1600330)

**作者简介:** 王青青(1992—),女,硕士(通讯作者. E-mail: 379680348@qq.com);  
李小林(1983—),男,教授,博士,博士生导师.

时,也给出了许多 MLS 的变形方法的误差估计:插值型移动最小二乘近似<sup>[16]</sup>、改进的移动最小二乘近似<sup>[10]</sup>和复变量移动最小二乘近似<sup>[17]</sup>等.在文献[12]中,Armentano 和 Durán 给出了 MLS 在  $L^\infty$  范数下对函数本身及其一阶和二阶导数的误差估计,但迄今为止还没有涉及高阶导数误差的报道.

本文的第二个目标是给出 SMLS 的误差估计.得到了函数本身及其任意阶导数的误差估计,因此推广了文献[12]的结果.最后,为了验证理论分析结果和说明 SMLS 的性质,给出了相应的数值算例.

## 1 比例移动最小二乘近似方法(SMLS)

### 1.1 计算公式

令  $\Omega \subset \mathbf{R}$  是一个非空、开的有界集合,边界为  $\Gamma$ ,令  $\{x_i\}_{i=1}^N$  是一个在  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  上任意选择的点集.

在 SMLS 中,对于函数  $u$  的局部近似  $Su$  可以定义为

$$u(x) \approx Su(x, \bar{x}) = \sum_{j=0}^m p_j(\bar{x}) a_j(x) = \mathbf{p}^T(\bar{x}) \mathbf{a}(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

其中  $S$  是近似算子,  $\bar{x}$  是计算点  $x$  或者节点  $x_i$ ,

$$\mathbf{a}(x) = [a_0(x), a_1(x), \dots, a_m(x)]^T$$

是未知的系数向量,

$$\mathbf{p}(\bar{x}) = [p_0(\bar{x}), p_1(\bar{x}), \dots, p_m(\bar{x})]^T \quad (2)$$

是基函数向量,其中  $m+1$  是基函数的个数.

对

$$\mathcal{J} = \sum_{i \in \vartheta(x)} w_i(x) [Su(x, x_i) - u_i]^2 = \sum_{i \in \vartheta(x)} w_i(x) [\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(x) - u_i]^2$$

取极小值可得

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u}, \quad (3)$$

其中  $x_i (i \in \vartheta(x))$ , 是在影响域包含点  $x$  的离散的点,  $\vartheta(x) \triangleq \{I_1, I_2, \dots, I_\ell\}$  是这些点的全局序列编号.同时,  $\mathbf{u} = [u_{I_1}, u_{I_2}, \dots, u_{I_\ell}]^T$  是  $u_i = u(x_i)$  这些点的函数值,  $w_i(x) \triangleq w(x - x_i)$  是权函数,矩阵  $\mathbf{A}(x)$  和  $\mathbf{B}(x)$  可以定义为

$$[\mathbf{A}(x)]_{jk} = \sum_{i \in \vartheta(x)} w_i(x) p_j(x_i) p_k(x_i), \quad j, k = 0, 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$[\mathbf{B}(x)]_{jk} = w_{I_k}(x) p_j(x_{I_k}), \quad j = 0, 1, \dots, m; I_k \in \vartheta(x). \quad (5)$$

最后,将式(3)代入到式(1)中,可得

$$u(x) \approx Su(x, \bar{x}) \big|_{\bar{x}=x} = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i. \quad (6)$$

因此, SMLS 的形函数为

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m p_j(x) [\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x)]_{jk}, & i = I_k \in \vartheta(x), \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ 0, & i \notin \vartheta(x), \end{cases} \quad (7)$$

### 1.2 基函数的选择

在式(1)中,基函数的选择对于函数的近似扮演着重要的角色.在 MLS 中,常用如下的单

项式基函数:

$$p(\bar{x}) = [1, \bar{x}, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m]^T.$$

通过理论可以证明<sup>[7-8]</sup>

$$\det(A(x)) = C(x)\rho^{2m(m+1)}, \tag{8}$$

其中  $\rho = \max_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq j \leq N, j \neq i} |x_i - x_j|$  是节点间距,  $C(x)$  是有界、可计算的数. 因此, 当  $\rho$  足够小时, 矩阵  $A(x)$  在 MLS 中会变得坏条件, 此时系数向量  $a(x)$  的计算精度将会下降.

为了提高矩阵  $A(x)$  的条件数, 将如下的比例基函数<sup>[8, 11]</sup>引入到 SMLS 中:

$$p(\bar{x}) = \left[ 1, \frac{\bar{x} - x_e}{\rho}, \left(\frac{\bar{x} - x_e}{\rho}\right)^2, \dots, \left(\frac{\bar{x} - x_e}{\rho}\right)^m \right]^T, \tag{9}$$

其中  $x_e$  是在估计点  $x$  的影响域内一个固定的点. 因此, 采用类似于式(8)的证明, 可以得到

$$\det(A(x)) = C(x). \tag{10}$$

根据式(10), 可以得到在 SMLS 中, 矩阵  $A(x)$  的条件数完全独立于节点间距  $\rho$ , 所以, 即使  $\rho$  减小, 矩阵  $A(x)$  的条件数也不会病态. 因此, 在 SMLS 中, 可以得到更为准确和稳定的结果.

## 2 误差估计

为了分析比例移动最小二乘近似的误差, 首先需要做如下的假设.

**假设 1** 对任意  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $x$  的影响域是一个半径为  $r(x)$  的开区间, 那么存在一个常数  $h$  使得  $h = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \{r(x)\}$ , 令  $B_h(x) \triangleq \{y \in \bar{\Omega} : |x - y| \leq h\}$ .

**假设 2** 存在正常数  $\gamma, c_0$  和  $C_{ik}$  使得  $w_i(x) \in C_0^\gamma(B_h(0)) \cap W^{\gamma, \infty}(\mathbf{R})$  和  $w_i(x) \geq c_0$  对任意  $x \in B_{h/2}(0) \subset \Omega$  成立, 同时  $\|w_i^{(k)}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{ik}h^{-k}$ , 其中  $k = 1, 2, \dots, \gamma; i = 1, 2, \dots, N$ .

**假设 3** 对任意  $x \in \Omega$ , 至少存在  $m + 1$  个节点  $\{x_{J_1}, x_{J_2}, \dots, x_{J_{m+1}}\} \subseteq \{x_i\}_{i \in \vartheta(x)} \cap B_{h/2}(x)$ , 并且存在常数  $c_\#$  使得集合  $\{x_i\}_{i \in \vartheta(x)} \cap B_{2h}(x)$  的基数小于  $c_\#$ , 此外, 存在常数  $\chi$  使得  $h/\varepsilon \leq \chi$ , 其中  $\varepsilon \triangleq \min_{i, k \in \Xi(x)} |x_i - x_k|$ ,  $\Xi(x) \triangleq \{J_1, J_2, \dots, J_{m+1}\}$ .

接下来的误差分析中, 假设  $u \in C^{m+1}(\Omega)$ ,  $t \triangleq \min\{\gamma, m + 1\}$ , 此外, 常数  $c$  表示与  $h$  无关的常数且每次出现时可以不同.

**引理 1** 对任意阶数不超过  $m$  且关于  $x$  的可微函数  $g(x, \bar{x})$ , 有

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(i-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t. \tag{11}$$

**证明** 采用类似文献[12]中的方法, 可以得到

$$\sum_{j \in \vartheta(x)} w_j'(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j) + \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j(x) g(x, x_j) \frac{\partial Su(x, x_j)}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

因此式(11)对  $i = 1$  成立.

根据数学归纳法, 假设式(11)对直到  $i = t - 1$  成立, 即

$$\sum_{k=0}^{t-1} \binom{t-1}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} = 0. \tag{13}$$

对上式关于  $x$  求导有

$$\sum_{k=0}^{t-1} \binom{t-1}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t-1}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-k)}(x) \frac{\partial g(x, x_j)}{\partial x} (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} + \\ & \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t-1}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k+1)} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

由于对任意  $x, \partial g(x, \bar{x})/\partial x$  在  $P^m$  内, 由式(13)可以得到式(14)中第二项为 0, 令第三项中  $k = \beta - 1$ , 可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t-1}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k+1)} = \\ & \sum_{\beta=1}^t \binom{t-1}{\beta-1} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-\beta)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(\beta)}. \end{aligned}$$

因此, 式(14)可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t-1}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} + \\ & \sum_{k=1}^t \binom{t-1}{k-1} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

利用组合关系  $\binom{t-1}{k} + \binom{t-1}{k-1} = \binom{t}{k}$  可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j) + \\ & \sum_{k=1}^{t-1} \binom{t}{k} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-k)}(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(k)} + \\ & \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j(x) g(x, x_j) (Su(x, x_j) - u_j)^{(t)} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

上式表明式(11)对于  $i = t$  也成立, 由数学归纳法定理得证.

**引理 2** 对任意  $\bar{x} \in B_h(x) \cap \bar{\Omega}$ , 有

$$\left| \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^k} \right| \leq ch^{m+1-k} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \dots, t. \quad (17)$$

**证明** 采用类似文献[12]中引理 3.1 的证明方法, 可以证明式(17)对于  $k = 1$  成立. 根据数学归纳法, 假设式(17)对  $k = 1, 2, \dots, t-1$  都成立, 即

$$\left| \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^k} \right| \leq ch^{m+1-k} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \dots, t-1. \quad (18)$$

假设 2 表明  $w_i \in C^t(B_h(0)) \cap W^{t, \infty}(\Omega)$ , 对足够小的  $\Delta x$ , 存在  $\theta_{jk} \in (x, x + \Delta x)$  使得

$$w_j^{(k)}(x + \Delta x) - w_j^{(k)}(x) = w_j^{(k+1)}(\theta_{jk}) \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, t. \quad (19)$$

对任意  $\Delta x > 0$ , 令

$$g(\bar{x}) \triangleq \frac{\partial^{t-1} Su(x + \Delta x, \bar{x})}{\partial x^{t-1}} - \frac{\partial^{t-1} Su(x, \bar{x})}{\partial x^{t-1}}.$$

显然  $g(\bar{x}) \in P^m$ , 由假设 2 可以得到

$$H(x) \triangleq \sum_{j \in \Xi(x)} (g(x_j))^2 \leq \frac{1}{c_0} \sum_{j \in \Xi(x)} w_j(x) (g(x_j))^2 \leq \frac{1}{c_0} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j(x) (g(x_j))^2.$$

由式(19)可以得到

$$c_0 H(x) \leq \sum_{j \in \vartheta(x)} [w_j(x + \Delta x) - \Delta x w'_j(\theta_{j0})] g(x_j) \frac{\partial^{t-1} Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^{t-1}} - \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j(x) g(x_j) \frac{\partial^{t-1} Su(x, x_j)}{\partial x^{t-1}}. \tag{20}$$

由引理 1 有

$$c_0 H(x) \leq \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1)}(x + \Delta x) g(x_j) (u_j - Su(x + \Delta x, x_j)) - \sum_{\lambda=1}^{t-2} \binom{t-1}{\lambda} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-\lambda)}(x + \Delta x) g(x_j) \frac{\partial^\lambda Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^\lambda} - \Delta x \sum_{j \in \vartheta(x)} w'_j(\theta_{j0}) g(x_j) \frac{\partial^{t-1} Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^{t-1}} - \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1)}(x) g(x_j) (u_j - Su(x, x_j)) + \sum_{\lambda=1}^{t-2} \binom{t-1}{\lambda} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-\lambda)}(x) g(x_j) \frac{\partial^\lambda Su(x, x_j)}{\partial x^\lambda}.$$

对上式右端第一项和第二项, 由式 (19) 可以得到

$$c_0 H(x) \leq \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1)}(x) g(x_j) (Su(x, x_j) - Su(x + \Delta x, x_j)) + \Delta x \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t)}(\theta_{j,t-1}) g(x_j) (u_j - Su(x + \Delta x, x_j)) - \Delta x \sum_{\lambda=1}^{t-2} \binom{t-1}{\lambda} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-\lambda)}(\theta_{j,t-1-\lambda}) g(x_j) \frac{\partial^\lambda Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^\lambda} - \Delta x \sum_{j \in \vartheta(x)} w'_j(\theta_{j0}) g(x_j) \frac{\partial^{t-1} Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^{t-1}} + \sum_{\lambda=1}^{t-2} \binom{t-1}{\lambda} \sum_{j \in \vartheta(x)} w_j^{(t-1-\lambda)}(x) g(x_j) \left( \frac{\partial^\lambda Su(x, x_j)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial^\lambda Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^\lambda} \right). \tag{21}$$

由于

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^\lambda Su(x + \Delta x, \bar{x})}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial^\lambda Su(x, \bar{x})}{\partial x^\lambda}}{\Delta x} = \frac{\partial^{\lambda+1} Su(x, \bar{x})}{\partial x^{\lambda+1}}.$$

对足够小的  $\Delta x$ , 由式 (18) 可得

$$\left| \frac{\partial^\lambda Su(x, x_j)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial^\lambda Su(x + \Delta x, x_j)}{\partial x^\lambda} \right| \leq ch^{m-\lambda} \Delta x \| u^{(m+1)} \|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{22}$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, t - 2.$$

此外, 类似于文献 [12] 中的推论 3.1, 容易证明

$$|u(\bar{x}) - Su(x + \Delta x, \bar{x})| \leq ch^{m+1} \| u^{(m+1)} \|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{23}$$

对于式 (21), 由假设 2 和式 (18)、(22) 和 (23) 可得

$$H(x) \leq c \Delta x \| u^{(m+1)} \|_{L^\infty(\Omega)} h^{m+1-t} \sum_{x_j \in B_{2h}(x)} |g(x_j)|.$$

根据标准 Lagrange (拉格朗日) 插值理论<sup>[17]</sup>, 多项式  $g(\bar{x}) \in P^m$  可写成如下形式:

$$g(\bar{x}) = \sum_{j \in \Xi(x)} g(x_j) l_j(\bar{x}),$$

其中, Lagrange 系数多项式  $l_j(\bar{x})$  定义为

$$l_j(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_{j_1})(\bar{x} - x_{j_2}) \cdots (\bar{x} - x_{j_{j-1}})(\bar{x} - x_{j_{j+1}}) \cdots (\bar{x} - x_{j_{m+1}})}{(x_{j_j} - x_{j_1})(x_{j_j} - x_{j_2}) \cdots (x_{j_j} - x_{j_{j-1}})(x_{j_j} - x_{j_{j+1}}) \cdots (x_{j_j} - x_{j_{m+1}})}. \tag{24}$$

由假设 3 可以得到

$$|l_j(\bar{x})| \leq \left(\frac{2h}{\varepsilon}\right)^m \leq c(\chi, m). \tag{25}$$

另外, 由 Hölder's 不等式可以得到

$$\left(\sum_{j \in \Xi(x)} |g(x_j)|\right)^2 \leq (m+1) \sum_{j \in \Xi(x)} (g(x_j))^2 = (m+1)H(x) \leq (m+1)c\Delta x \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} h^{m+1-t} c_\# \sum_{j \in \Xi(x)} |g(x_j)|,$$

则

$$\sum_{j \in \Xi(x)} |g(x_j)| \leq ch^{m+1-t} \Delta x \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{26}$$

因此, 对于任意  $\bar{x} \in B_h(x) \cap \bar{\Omega}$ , 由式(25)和(26)可得

$$\frac{|g(\bar{x})|}{\Delta x} \leq \frac{1}{\Delta x} \left| \sum_{j \in \Xi(x)} g(x_j) \right| \max_{j \in \Xi(x)} |l_j(\bar{x})| \leq ch^{m+1-t} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

最后可以得到

$$\left| \frac{\partial^t Su(x, \bar{x})}{\partial x^t} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|g(\bar{x})|}{\Delta x} \leq ch^{m+1-t} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

上式表明式(17)对  $i = t$  也成立, 由数学归纳法, 定理得证.

**引理 3** 对任意  $\bar{x} \in B_h(x) \cap \bar{\Omega}$ , 恒有下式成立:

$$\left| \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^{k-\lambda} \partial \bar{x}^\lambda} \right| \leq ch^{m+1-k} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \dots, t.$$

**证明** 由 SMLS 的原理可知, 近似函数  $Su(x, \bar{x})$  是一个关于  $\bar{x}$  次数不超过  $m$  的多项式, 因此有

$$Su(x, \bar{x}) = \sum_{j \in \Xi(x)} Su(x, x_j) l_j(\bar{x}), \quad \forall x \in \Omega,$$

其中  $l_j(\bar{x})$  由式(24)给出, 因此有如下的不等式成立:

$$\left| \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^{k-\lambda} \partial \bar{x}^\lambda} \right| = \left| \sum_{j \in \Xi(x)} \frac{\partial^{k-\lambda} Su(x, x_j)}{\partial x^{k-\lambda}} l_j^{(\lambda)}(\bar{x}) \right| \leq \sum_{j \in \Xi(x)} \left| \frac{\partial^{k-\lambda} Su(x, x_j)}{\partial x^{k-\lambda}} \right| |l_j^{(\lambda)}(\bar{x})|. \tag{27}$$

对任意  $\bar{x} \in B_h(x)$ , 由引理 2 可以得到

$$\left| \frac{\partial^{k-\lambda} Su(x, \bar{x})}{\partial x^{k-\lambda}} \right| \leq ch^{m+1+\lambda-k} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{28}$$

另一方面, 令  $\Xi_{j_0} = \{i | i \in \Xi(x), i \neq j_j\}$ , 则由式(24)可得

$$l_j(\bar{x}) = \prod_{i \in \Xi_{j_0}} (\bar{x} - x_i) / \prod_{i \in \Xi_{j_0}} (x_{j_j} - x_i),$$

因此

$$l_j'(\bar{x}) = \frac{1}{\prod_{i \in \Xi_{j_0}} (x_{j_j} - x_i)} \left( \prod_{i \in \Xi_{j_0}} (\bar{x} - x_i) \right)' = \frac{1}{\prod_{i \in \Xi_{j_0}} (x_{j_j} - x_i)} \sum_{j_1 \in \Xi_{j_0}} \prod_{i \in \Xi_{j_1}} (\bar{x} - x_i),$$

其中  $\Xi_{j_1} = \{i | i \in \Xi_{j_0}, i \neq j_1\}$ .

事实上由数学归纳法可以得到

$$l_j^{(\lambda)}(\bar{x}) = \frac{1}{\prod_{i \in \Xi_{j_0}} (x_{j_j} - x_i)} \left( \sum_{j_1 \in \Xi_{j_0}} \sum_{j_2 \in \Xi_{j_1}} \cdots \sum_{j_{\lambda-1} \in \Xi_{j_{\lambda-2}}} \prod_{i \in \Xi_{j_{\lambda-1}}} (\bar{x} - x_i) \right)' = \frac{1}{\prod_{i \in \Xi_{j_0}} (x_{j_j} - x_i)} \sum_{j_1 \in \Xi_{j_0}} \sum_{j_2 \in \Xi_{j_1}} \cdots \sum_{j_{\lambda-1} \in \Xi_{j_{\lambda-2}}} \sum_{j_\lambda \in \Xi_{j_{\lambda-1}}} \prod_{i \in \Xi_{j_\lambda}} (\bar{x} - x_i),$$

其中  $\Xi_{j_\lambda} = \{i | i \in \Xi_{j_{\lambda-1}}, i \neq j_\lambda\}$ , 利用假设 3 有

$$|l_j^{(\lambda)}(\bar{x})| \leq \frac{m(m-1)\cdots(m-\lambda+1)(2h)^{m-\lambda}}{\varepsilon^m} \leq \frac{c}{h^\lambda}. \tag{29}$$

综合式(27)~(29), 定理得证.

**定理 1** 令  $Su(x)$  是由式(6)得到的  $u(x)$  的近似函数, 其中基函数选取为由式(9)给出的  $m$  阶比例基函数, 若  $u \in C^{m+1}(\Omega)$  且  $w_i(x) \in C_0^\gamma(B_h(0)) \cap W^{\gamma,\infty}(\mathbf{R})$ , 可以得到以下的最优阶误差估计

$$\|u^{(k)} - (Su)^{(k)}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^{m+1-k} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad k = 0, 1, \dots, t \triangleq \min\{\gamma, m+1\}. \tag{30}$$

**证明** 采用类似文献[12]中推论 3.1 的证明方法, 容易证明式(30)对  $k = 0$  成立, 对任意  $x \in \Omega$  有

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^k u(x)}{dx^k} - \frac{d^k Su(x)}{dx^k} \right| &= \left| \frac{d^k u(x)}{dx^k} - \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^k} \right| = \\ &= \left| \frac{d^k u(x)}{dx^k} - \sum_{\lambda=0}^k \binom{k}{\lambda} \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^{k-\lambda} \partial \bar{x}^\lambda} \right|_{\bar{x}=x} \leq \\ &= \left| \frac{d^k u(x)}{dx^k} - \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \right|_{\bar{x}=x} + \left| \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^k} \right|_{\bar{x}=x} + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \binom{k}{\lambda} \left| \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial x^{k-\lambda} \partial \bar{x}^\lambda} \right|_{\bar{x}=x}. \end{aligned} \tag{31}$$

由于  $Su(x, \bar{x})$  可以看做是  $u$  在  $m+1$  个节点处插值而得到的阶数不超过  $m$  的多项式<sup>[12]</sup>, 因此  $\partial^k Su(x, \bar{x})/\partial \bar{x}^k$  可以看做  $d^k u(x)/dx^k$  在  $m+1-k$  个节点处插值而得到, 因此由标准插值误差估计可以得到

$$\left| \frac{d^k u(x)}{dx^k} - \frac{\partial^k Su(x, \bar{x})}{\partial \bar{x}^k} \right| \leq ch^{m+1-k} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall \bar{x} \in B_h(x) \cap \Omega. \tag{32}$$

最后, 将引理 2 和引理 3 的结果以及式(32)代入式(31)可得式(30)对  $k = 1, 2, \dots, t$  成立.

由上述分析可知, 定理 1 的结果对 MLS 也成立, 文献[12]给出了近似函数本身及其一阶和二阶导数在  $L^\infty$  范数下的误差估计(即  $k = 0, 1, 2$ ), 显然, 定理 1 包含了以上的结论, 并对更一般的高阶导数情况也保持成立.

文献[16]给出了插值型 MLS 逼近函数及其一阶和二阶导数在  $L^\infty$  范数下的误差估计, 本文中的误差分析技巧可以用来分析插值型 MLS 中高阶导数的误差.

### 3 数值算例

在 SMLS 中, 考虑以下的拟合函数:

$$u(x) = |x|^{4.5}, \quad x \in [-1, 1].$$

图 1 给出了基于 SMLS,对函数  $u$  及其导数  $u', u''$  和  $u'''$  的误差和收敛结果.在进行收敛性分析时,分别采用了 33, 65, 129, 257, 513 和 1 025 个节点,针对式(9)中分别使用了线性基函数 ( $m = 1$ )、二次基函数 ( $m = 2$ ) 和三次基函数 ( $m = 3$ ) 共 18 种情况(每一条函数图像,基函数选择相同,但节点数不同).从图中可以看出,在精度和收敛率方面,二次基函数优于线性基函数,三次基函数优于二次基函数.因此,误差和收敛结果依赖于基函数的阶数.

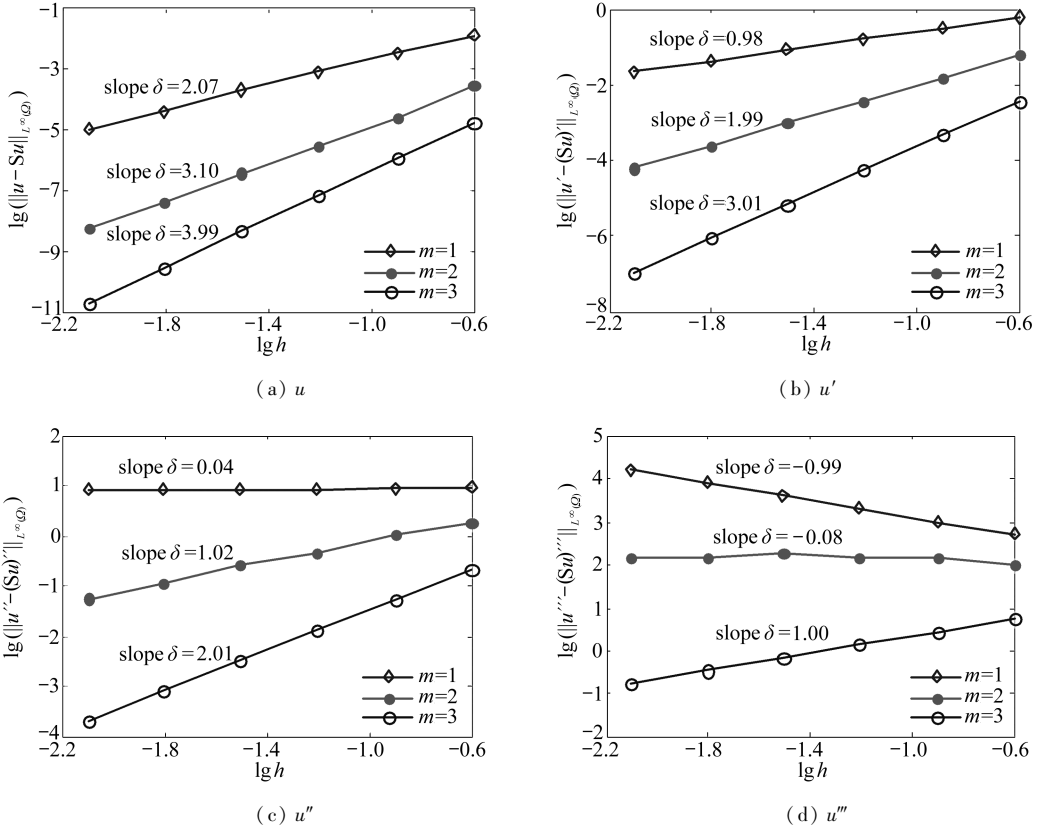


图 1 采用 SMLS 后,函数  $u, u', u''$  和  $u'''$  的误差收敛结果

Fig. 1 Errors and convergences of the SMLS approximation for  $u, u', u''$  and  $u'''$

表 1 给出了收敛率的数值结果和理论结果.可以看出数值结果和理论结果吻合得很好.在实际计算中,二次基函数 ( $m = 2$ ) 是经常采用的.为了方便,在下面的实验中,选择  $m = 2$ .

表 1 采用 SMLS 得到的数值和理论收敛率

Table 1 Experimental and theoretical convergence rates of the SMLS approximation

	linear basis ( $m = 1$ )		quadratic basis ( $m = 2$ )		cubic basis ( $m = 3$ )	
	experimental rate $\xi_1$	theoretical rate $\zeta_1$	experimental rate $\xi_2$	theoretical rate $\zeta_2$	experimental rate $\xi_3$	theoretical rate $\zeta_3$
$\ u - Su\ _{L^\infty(\Omega)}$	2.07	2	3.10	3	3.99	4
$\ u' - (Su)'\ _{L^\infty(\Omega)}$	0.98	1	1.99	2	3.01	3
$\ u'' - (Su)''\ _{L^\infty(\Omega)}$	0.04	0	1.02	1	2.01	2
$\ u''' - (Su)'''\ _{L^\infty(\Omega)}$	-0.99	-1	-0.08	0	1.00	1

图 2 给出了使用 MLS 和 SMLS 拟合函数  $u, u'$  和  $u''$  时的数值解和精确解.在拟合时,采用了 257 个等距节点.从图中可以看出,对于 MLS 和 SMLS,函数  $u$  和  $u'$  的数值解和精确解都吻合得很好,但在拟合  $u''$  时,SMLS 的精度更高.



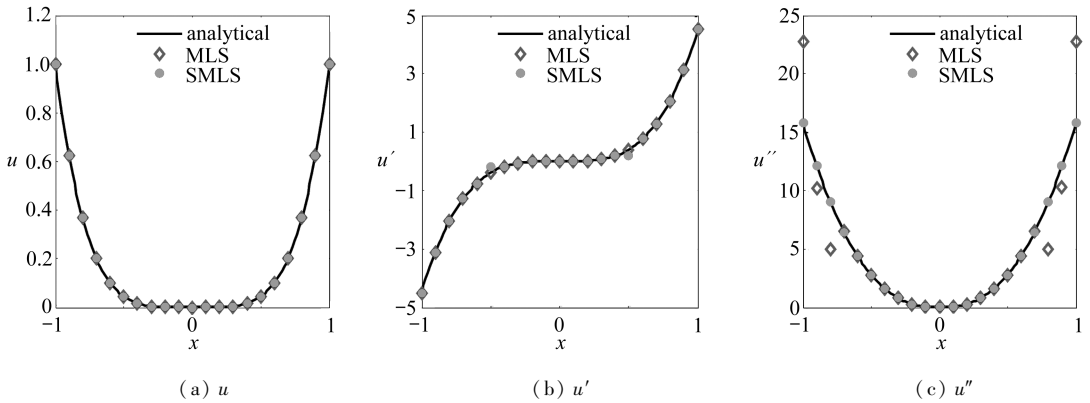


图2 MLS 和 SMLS 拟合  $u, u'$  和  $u''$  的结果

Fig. 2 Results of the MLS and the SMLS approximations for  $u, u'$  and  $u''$

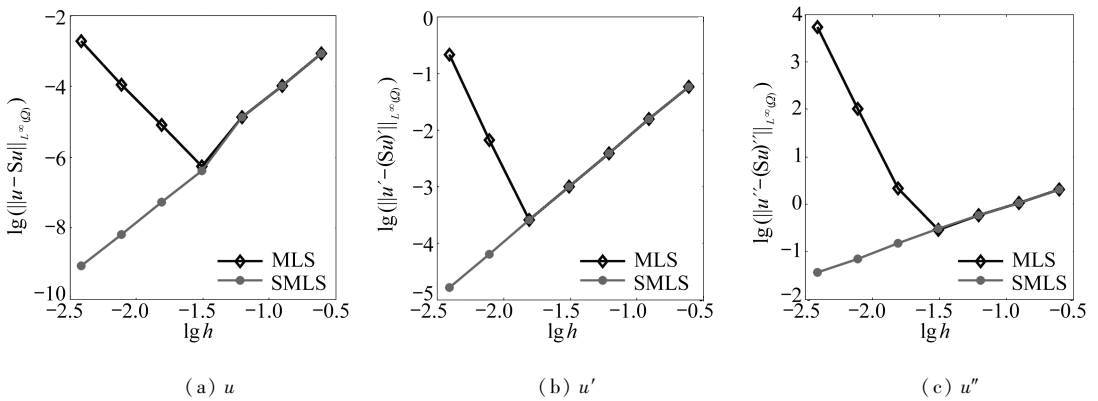


图3 MLS 和 SMLS 拟合  $u, u'$  和  $u''$  时的误差和收敛性

Fig. 3 Errors and convergences of the MLS and the SMLS for  $u, u'$  and  $u''$

图3给出了MLS和SMLS拟合函数 $u, u'$ 和 $u''$ 时的误差和收敛性.可以看出, SMLS的误差随着 $h$ 的减小单调递减.然而,当使用较多节点(本例选用超过300个节点)时,MLS的误差随着 $h$ 的减小反而增大.因此,通过对这两种方法的比较, SMLS比MLS有着更高的计算精度和更好的数值稳定性.

## 4 结 论

为了克服由移动最小二乘近似(MLS)带来的坏条件性,本文提出了比例移动最小二乘近(SMLS).相较于MLS, SMLS具有更高的计算精度和更稳定的数值结果.同时,给出了SMLS逼近函数及其任意阶导数的最优阶误差估计.数值实验验证了理论分析结果.

## 参考文献 (References):

- [1] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods[J]. *Mathematics of Computation*, 1981, 37(155): 141-158.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256.
- [3] Atluri S N. *The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretizations*[M]. Encino, CA, USA: Tech Science Press, 2004.

- [4] LI Xiao-lin, LI Shu-ling. Meshless boundary node methods for Stokes problems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, **39**(7): 1769-1783.
- [5] LI Xiao-lin, ZHU Jia-lin. A Galerkin boundary node method and its convergence analysis[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, **230**(1): 314-328.
- [6] LI Xiao-lin. Meshless Galerkin algorithms for boundary integral equations with moving least square approximations[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2011, **61**(12): 1237-1256.
- [7] LI Xiao-lin. Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free Galerkin method in  $n$ -dimensional spaces[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2016, **99**: 77-97.
- [8] LI Xiao-lin, LI Shu-ling. On the stability of the moving least squares approximation and the element-free Galerkin method[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2016, **72**(6): 1515-1531. doi: 10.1016/j.camwa.2016.06.047.
- [9] Liew K M, CHENG Yu-min, Kitipornchai S. Boundary element-free method (BEFM) and its application to two-dimensional elasticity problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, **65**(8): 1310-1332.
- [10] LI Xiao-lin, CHEN Hao, WANG Yang. Error analysis in Sobolev spaces for the improved moving least-square approximation and the improved element-free Galerkin method[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2015, **262**: 56-78.
- [11] Mirzaei D. Analysis of moving least squares approximation revisited[J]. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2015, **282**: 237-250.
- [12] Armentano M G, Durán R G. Error estimates for moving least square approximations[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2001, **37**(3): 397-416.
- [13] Zuppa C. Good quality point sets and error estimates for moving least square approximations [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, **47**(3/4): 575-585.
- [14] 程荣军. 无网格方法的误差估计和收敛性研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2007. (CHENG Rong-jun. Researches on the convergence and error analysis of meshless methods [D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai University, 2007. (in Chinese))
- [15] REN Hong-ping, PEI Kai-yan, WANG Li-ping. Error analysis for moving least squares approximation in 2D space[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2014, **238**: 527-546.
- [16] Sun F X, Wang J F, Cheng Y M, et al. Error estimates for the interpolating moving least-squares method in  $n$ -dimensional space[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2015, **98**: 79-105.
- [17] Mathews J H, Fink K D. *Numerical Methods Using MATLAB*[M]. 4th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2004.
- [18] 孙新志, 李小林. 复变量移动最小二乘近似在 Sobolev 空间中的误差估计[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 416-425. (SUN Xin-zhi, LI Xiao-lin. Error estimates for the complex variable moving least square approximation in Sobolev spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 416-425. (in Chinese))

# Error Analysis of the Scaled Moving Least Squares Approximation

WANG Qing-qing, LI Xiao-lin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,  
Chongqing 401331, P.R.China)

**Abstract:** Compared with the moving least squares (MLS) approximation, the scaled moving least squares (SMLS) approximation can avoid the issue of ill-conditioned matrices involved in the MLS approximation. Error estimates of the SMLS approximation were conducted for the approximation function and its arbitrary-order derivatives. Finally, some numerical examples were given. The numerical results indicate that the SMLS approximation provides monotonic convergence and higher accuracy with higher computational stability in comparison with the MLS approximation.

**Key words:** meshless method; scaled moving least squares approximation; stability; error estimate

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11471063)

---

引用本文/Cite this paper:

王青青, 李小林. 基于比例移动最小二乘近似的误差分析[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(11): 1289-1299.

WANG Qing-qing, LI Xiao-lin. Error analysis of the scaled moving least squares approximation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1289-1299.