

随机参数作用下参激双势阱 Duffing 系统的 随机动力学行为分析*

张莹¹, 都琳¹, 岳晓乐¹, 胡健¹, 方同²

(1. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072;

2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(本刊编委谢公南推荐)

摘要: 基于正交多项式逼近理论,研究了在不同随机参数作用下参激双势阱 Duffing 系统的随机动力学行为.首先,借助 Poincaré(庞加莱)截面分析系统的复杂动力学行为;其次,分别针对系统非线性项系数和阻尼项系数为随机参数的情况,运用正交多项式逼近法,将随机参数 Duffing 系统转化为与之等价的确定性扩阶系统,并证明其有效性;最后,运用等价确定性扩阶系统的集合平均响应,揭示随机系统的动力学特性,以及随机变量强度变化对系统产生的影响.数值结果表明,对于多吸引子共存情形,参激双势阱 Duffing 系统在随机非线性项系数影响下,其动力学行为较为稳定,共存吸引子与确定性情形保持一致;而当阻尼系数为随机参数时,随着随机变量强度的增加,部分共存吸引子将发生分岔现象.

关键词: 双势阱 Duffing 系统; 随机参数; Chebyshev 多项式; 分岔; 混沌

中图分类号: O322 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370257

引言

非线性振动问题有着悠久的历史,著名的 Duffing 系统和双势阱 Duffing 系统就是这一研究领域的典型系统^[1-3],许多领域中的非线性问题都可用 Duffing 型非线性模型来描述^[4-7],其中具有线性刚度的双势阱 Duffing 系统也是一个重要的模型^[8].近年来, Duffing 型系统的丰富动力学行为如系统的周期运动、混沌运动、多种多样的周期解分岔和混沌激变现象、以及由倍周期通向混沌、混沌的控制和同步等,一直受到各领域科研工作者的广泛研究和关注, Duffing 型非线性系统的理论分析、解析和数值解的求解方法、非线性动力学行为的控制理论等已取得丰硕的成果^[9-14].然而,这些工作大多局限于确定性系统或随机激励作用下的确定性系统的动力学分析与研究,针对系统参数为随机变量的双势阱 Duffing 系统动力学行为的研究还有待进一步探讨.随机结构系统的求解主要有 3 种方法,即随机摄动法、随机模拟法和正交多项式逼近法^[15-17].与其他两种方法相比,正交多项式逼近法不仅可以避免随机摄动法对随机参数

* 收稿日期: 2016-08-18; 修订日期: 2016-09-06

基金项目: 国家自然科学基金(11302170; 11302171; 11672232); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2016JQ1015)

作者简介: 张莹(1981—),女,副教授,博士(通讯作者. E-mail: yingzhang1031@nwpu.edu.cn).

小幅变化的要求,还具有优于随机模拟法的计算效率.因此,本文将在充分探索参激双势阱 Duffing 系统的确定性动力学行为基础上,运用正交多项式逼近法来将随机系统转化为与之等价的确定性扩阶系统,通过研究等价系统的集合平均响应来探索系统的随机动力学特性,明确随机参数的存在及其强度的变化对系统动力学行为和稳定性产生的影响.

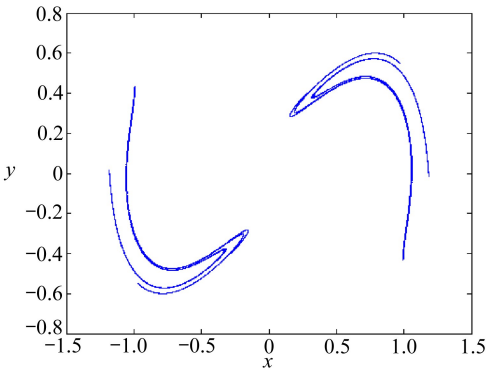
1 确定性参激双势阱 Duffing 系统的动力学行为分析

参激双势阱 Duffing 系统的动力学微分方程如下所示:

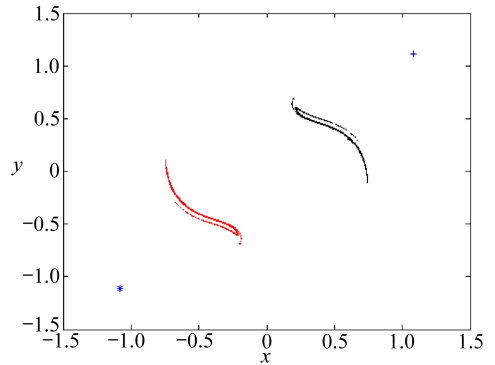
$$\ddot{x} + c\dot{x} - ax + bx^3 = \mu x \sin(\Omega t), \quad (1)$$

式中 a, b, c 为正参数, μ 为参激强度, Ω 为参激频率.令 $\dot{x} = y$, 方程(1)可改写为

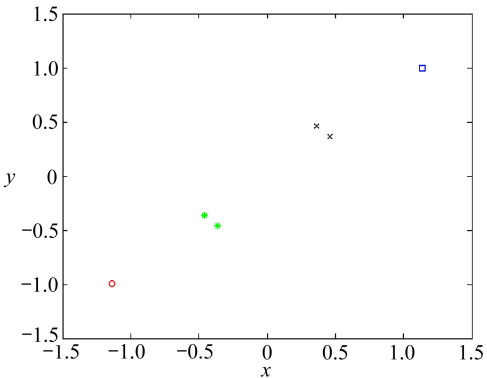
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = ax - bx^3 - cy + \mu x \sin(\Omega t). \quad (2)$$



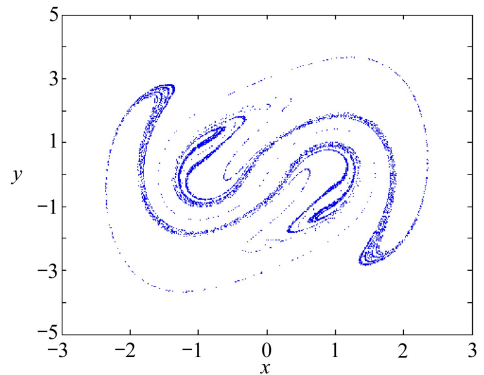
(a) $\mu = 0.97$



(b) $\mu = 5.03$



(c) $\mu = 5.25$



(d) $\mu = 7.0$

图 1 系统(2)在取不同 μ 值处的 Poincaré 截面图

Fig. 1 The Poincaré sections of system (2) for different values of μ

该系统是典型的对称非线性动力系统,其中包含了丰富的对称现象,不仅仅涉及到周期运动,还涉及到混沌运动、周期解分岔和混沌激变等动力学行为.本文选取 μ 作为参数进行数值仿真,搜索系统的复杂稳态运动,包括周期运动、混沌运动以及多吸引子共存情形.参数选取为 $a = b = 1.0, c = 0.2, \Omega = 1.0$ 时,系统(2)的确定性响应(DR)的 Poincaré 截面图如图 1 所示.其中,图 1(a)为具有双支结构的混沌吸引子;图 1(b)为两混沌吸引子与两个 1 周期吸引子共存;图 1(c)为两个 1 周期吸引子与两个 2 周期吸引子共存;图 1(d)为单混沌吸引子情形.纵观图 1 可见,不论 μ 取何值,虽然稳态运动的表现形式各有不同,但系统的 Poincaré 截面都保持

中心对称的特性.这些不同形式的运动,正是各种对称破缺分岔或混沌激变的结果.前期笔者已对该系统的动力学行为,特别是其周期运动的各种分岔和混沌行为的各种激变,以及混沌的产生发展、瞬态运动和混沌与混沌鞍的内在联系等问题,进行了充分的研究^[18],明确了该参激双势阱 Duffing 系统的复杂确定性动力学行为,本文将在此基础上探索随机参数影响下该系统的随机特性.

2 正交多项式逼近

在考察参激双势阱 Duffing 系统(2)在随机参数情形下的运动时,若将非线性项系数考虑为随机参数,即 $b = \bar{b} + \sigma\xi$,其中随机变量 ξ 服从 $[-1, 1]$ 上的拱形分布, σ 为 ξ 的强度.则随机参激双势阱 Duffing 系统可表示为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = ax - (\bar{b} + \sigma\xi)x^3 - cy + \mu x \sin(\Omega t), \quad (3)$$

其中,参数取值为 $a = \bar{b} = 1.0, c = 0.2, \Omega = 1.0$.此时系统(3)的响应为时间 t 和随机变量 ξ 的函数,即 $x = x(t, \xi), y = y(t, \xi)$.随后,运用正交多项式逼近理论^[16],根据随机变量分布类型,选取相应的 Chebyshev 多项式,则系统(3)的响应可表示为如下级数形式:

$$x(t, \xi) = \sum_{i=0}^N x_i(t) H_i(\xi), \quad y(t, \xi) = \sum_{i=0}^N y_i(t) H_i(\xi). \quad (4)$$

将级数形式(4)代入随机系统(3)得

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ddot{x}_i(t) H_i(\xi) + c \sum_{i=0}^{\infty} \dot{x}_i(t) H_i(\xi) - a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) H_i(\xi) + (\bar{b} + \sigma\xi) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) H_i(\xi) \right)^3 = \mu \sin(\Omega t) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) H_i(\xi). \quad (5)$$

取 $N = 4$, 对上式运用 Chebyshev 多项式的性质和相关公式^[19],可将其转化为如下与原随机系统等价的确定性扩阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = y_0, \\ \dot{y}_0 = -cy_0 + ax_0 - \bar{b}X_0 - \frac{1}{2}\sigma X_1 + \mu x_0 \sin(\Omega t), \\ \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -cy_1 + ax_1 - \bar{b}X_1 - \frac{1}{2}\sigma(X_0 + X_2) + \mu x_1 \sin(\Omega t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -cy_2 + ax_2 - \bar{b}X_2 - \frac{1}{2}\sigma(X_1 + X_3) + \mu x_2 \sin(\Omega t), \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_3 = -cy_3 + ax_3 - \bar{b}X_3 - \frac{1}{2}\sigma(X_2 + X_4) + \mu x_3 \sin(\Omega t), \\ \dot{x}_4 = y_4, \\ \dot{y}_4 = -cy_4 + ax_4 - \bar{b}X_4 - \frac{1}{2}\sigma X_3 + \mu x_4 \sin(\Omega t). \end{cases} \quad (6)$$

同理,若将系统(2)中的阻尼系数 c 考虑为服从拱形分布的随机参数,即 $c = \bar{c} + \sigma\xi$,运用 Chebyshev 正交多项式逼近法,也可得到如下所示的等价确定性扩阶系统:

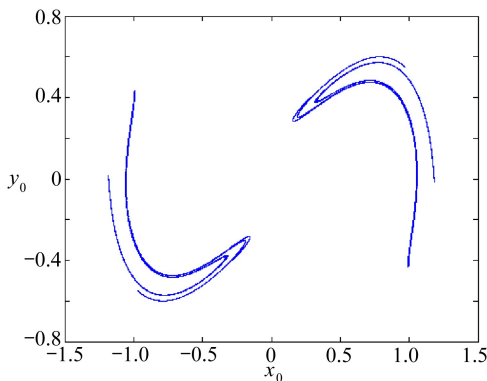
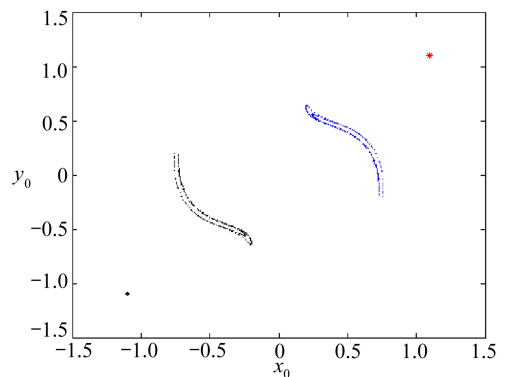
$$\begin{cases}
 \dot{x}_0 = y_0, \\
 \dot{y}_0 = -\bar{c}y_0 - \frac{1}{2}\sigma y_1 + ax_0 - bX_0 + \mu x_0 \sin(\Omega t), \\
 \dot{x}_1 = y_1, \\
 \dot{y}_1 = -\bar{c}y_1 - \frac{1}{2}\sigma(y_0 + y_2) + ax_1 - bX_1 + \mu x_1 \sin(\Omega t), \\
 \dot{x}_2 = y_2, \\
 \dot{y}_2 = -\bar{c}y_2 - \frac{1}{2}\sigma(y_1 + y_3) + ax_2 - bX_2 + \mu x_2 \sin(\Omega t), \\
 \dot{x}_3 = y_3, \\
 \dot{y}_3 = -\bar{c}y_3 - \frac{1}{2}\sigma(y_2 + y_4) + ax_3 - bX_3 + \mu x_3 \sin(\Omega t), \\
 \dot{x}_4 = y_4, \\
 \dot{y}_4 = -\bar{c}y_4 - \frac{1}{2}\sigma y_3 + ax_4 - bX_4 + \mu x_4 \sin(\Omega t).
 \end{cases} \quad (7)$$

为了实现对扩阶系统(6)和(7)的动力学分析,本文将采用如下所示的集合平均响应(EMR)来研究系统的随机动力学行为和特性:

$$\begin{cases}
 E[x(t, \xi)] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) E[H_i(\xi)] = x_0(t), \\
 E[y(t, \xi)] = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) E[H_i(\xi)] = y_0(t).
 \end{cases}$$

同时,通过与系统(2)的DR进行对比研究,可进一步明确随机系统与确定性系统动力学行为的相同与区别之处,进一步了解随机系统的特性.

当 b 为随机参数且 $\sigma = 0$ 时,图2给出了不同 μ 值处系统(6)的EMR Poincaré截面图.与图1中DR情形对比可以看出,不论是如图2(a)和(d)中系统存在的唯一混沌吸引子、图2(b)中周期吸引子与混沌吸引子共存,还是图2(c)中多周期吸引子共存的情形,EMR与DR具有极高的一致性,说明运用Chebyshev正交多项式逼近法是切实可行的.当 c 为随机参数时,采用相同的策略分析了 $\sigma = 0$ 时系统的动力学行为,也验证了正交多项式的有效性.

(a) $\mu = 0.97$ (b) $\mu = 5.03$

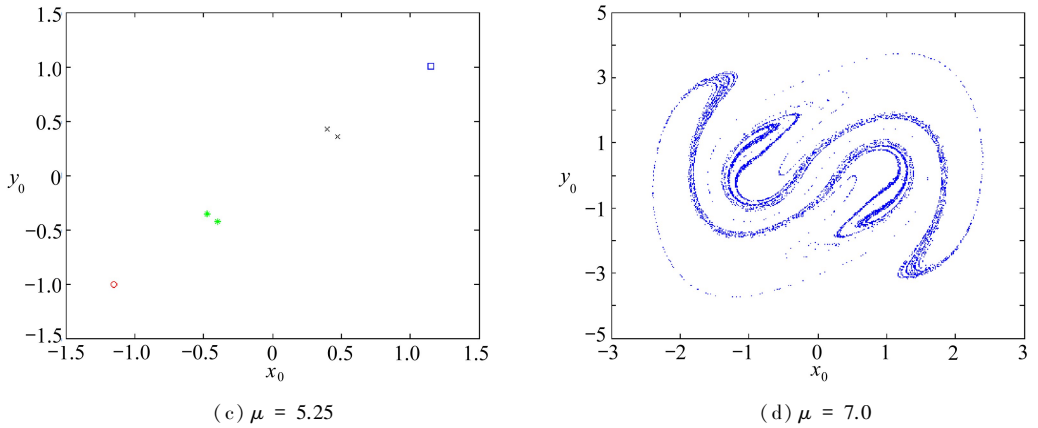


图 2 当 $\sigma = 0$ 时, 系统 (6) 在不同 μ 值处的 Poincaré 截面图

Fig. 2 The Poincaré sections of system (6) for different values of μ , $\sigma = 0$

3 随机动力学行为分析

在参激双势阱 Duffing 系统的确定性动力学行为深入研究和随机系统的正交多项式逼近的基础上, 本节将进一步讨论不同随机参数的存在, 以及其强度变化对系统共存周期吸引子的影响。

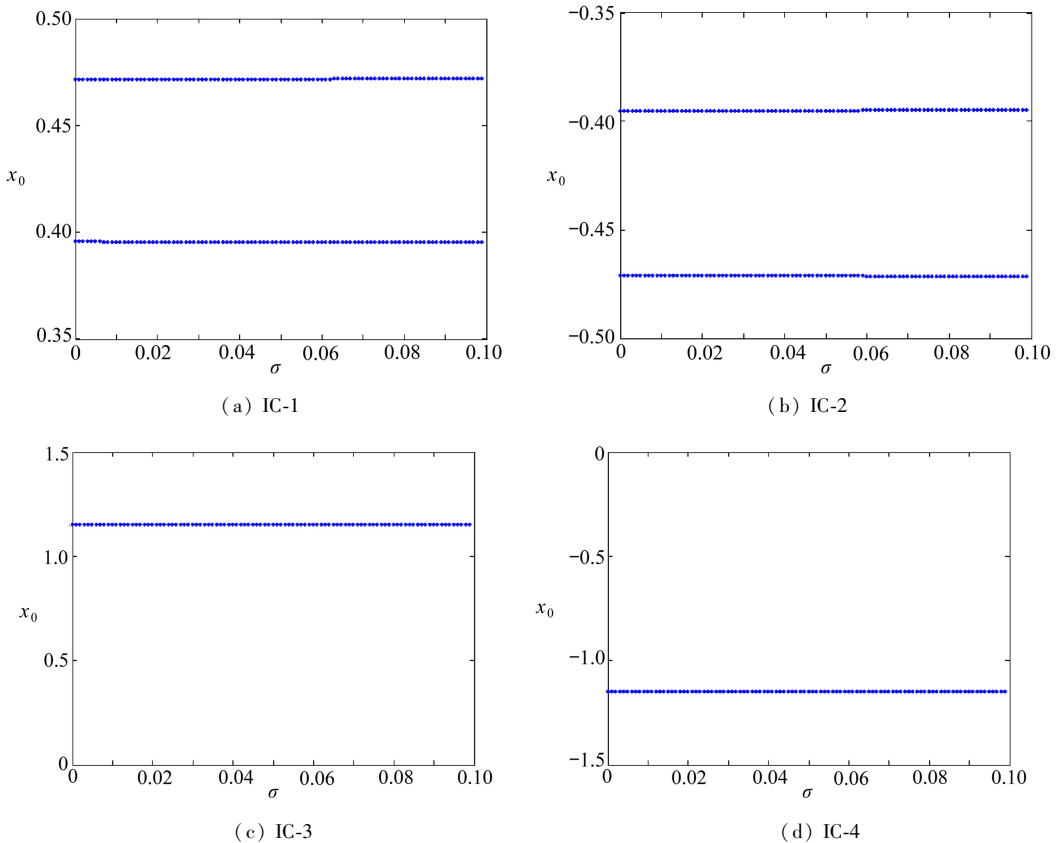


图 3 当 $\mu = 5.25$ 时, 系统 (6) 取不同初值时随 σ 变化的分岔图

Fig. 3 $\mu = 5.25$, the bifurcation diagrams of system (6) with respect to σ for different ICs

由图 1(c)和图 2(c)可见,当 $\mu = 5.25$ 时,系统有两个 1 周期吸引子和两个 2 周期吸引子共存.在 b 为随机参数的情形下,为了考察随机参数对共存周期解的影响,图 3 给出了系统(6)的 EMR 取不同初值(IC)时,随随机变量强度 σ 变化的分岔图,分别取 IC-1 为(0.5, 0.35), IC-2 为(-0.5, -0.35), IC-3 为(1.2, 1), IC-4 为(-1.2, -1).从图 3(a)~(d)的对比分析知,当 σ 在 $[0, 0.1]$ 区间变化时,4 共存吸引子在 σ 不断增加的过程中,仍保持原稳态周期运动不变.即当系统在弱随机非线性项系数的干扰下,动力学行为与原确定性情形一致,说明系统在该随机项的干扰下具有较好的稳定性.此外,由于双势阱 Duffing 系统具有中心对称性,故后续研究中将仅展示部分吸引子的数值结果,另一部分结果由对称性易知且具有相同动力学性质.

图 4 给出了当 $\mu = 5.25$ 时,系统(7)取不同初值时随 σ 变化的分岔图.当 c 为随机参数时,从图 3(a)、(b)与图 4(a)的对比可见,随机因素对 2 周期吸引子不会造成太大的影响,系统仍能保持原 2 周期运动,仅系统周期解的 Poincaré 点位置随 σ 的增加产生了一定的改变.而对于 1 周期吸引子,取相同的随机变量强度变化范围进行分析,当 $\sigma < 0.07$ 时,从图 3(c)、(d)与图 4(b)中可见,随机系统的动力学行为与确定性系统仍保持一致;但当 $\sigma > 0.07$ 时,图 4(b)中系统的 1 周期吸引子失稳产生了倍周期分岔现象.图 5 给出了当 $\mu = 5.25$ 时,系统(6)取不同初值时的相轨图(右图为左图的局部放大图).图 6 给出了当 $\mu = 5.25$ 时,系统(7)取不同初值时的相轨图(右图为左图的局部放大图).

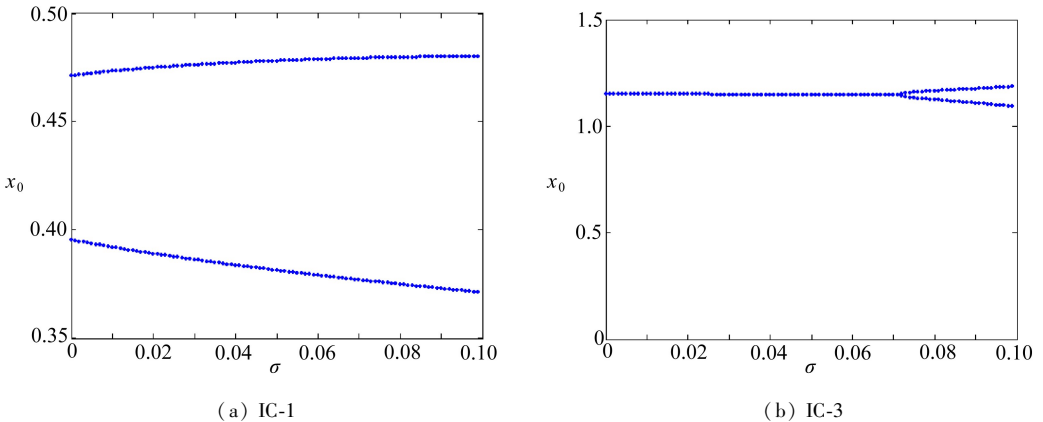
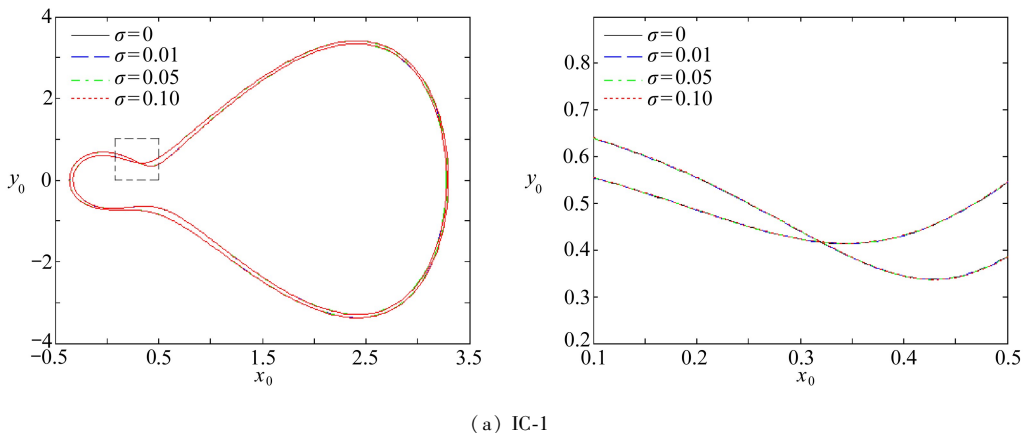
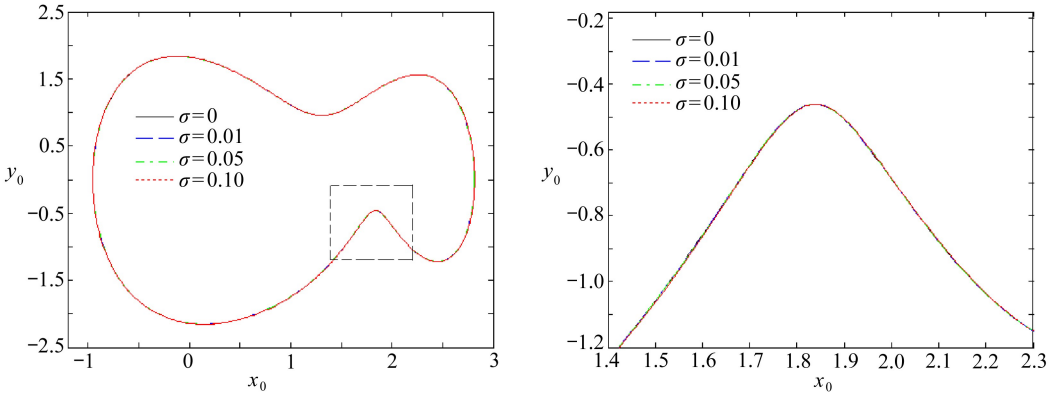


图 4 当 $\mu = 5.25$ 时,系统(7)取不同初值时随 σ 变化的分岔图

Fig. 4 $\mu = 5.25$, the bifurcation diagrams of system (7) with respect to σ for different ICs



(a) IC-1

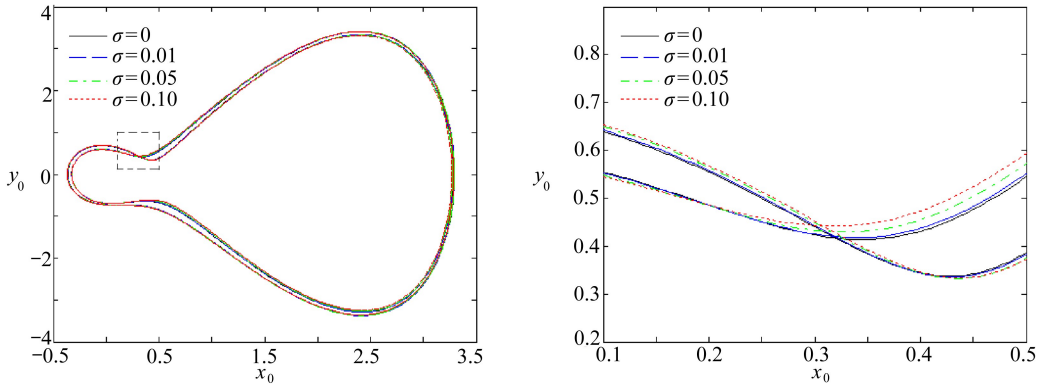


(b) IC-3

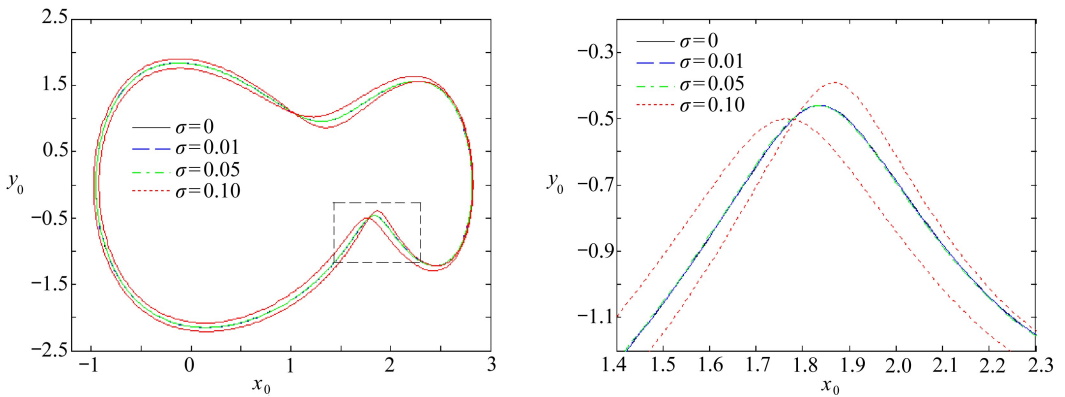
图 5 当 $\mu = 5.25$ 时, 系统 (6) 取不同初值时的相轨图 (右图为左图的局部放大图)

Fig. 5 $\mu = 5.25$, the phase trajectories of system (6) for different ICs

(the right is the enlarged partial view of the left)



(a) IC-1



(b) IC-3

图 6 当 $\mu = 5.25$ 时, 系统 (7) 取不同初值时的相轨图 (右图为左图的局部放大图)

Fig. 6 $\mu = 5.25$, the phase trajectories of system (7) for different ICs

(the right is the enlarged partial view of the left)

进一步对比图 5(a)、(b) 与 6(a)、(b) 中 EMR 的轨线图可见, 在不同强度的随机因素的影响下, 总体来看当 b 为随机参数时, 从图 5(a) 和图 5(b) 可见, 随着随机变量强度的增加系

统的响应相符,即系统能保持与确定性系统一致的稳态运动;而当 c 为分岔参数时,对于多周期吸引子共存的情形,若随机变量强度较小,从图 6(a)和图 6(b)可见,虽然系统周期解的位置产生了细小的偏移,但系统仍能保持与确定性系统一致的稳态周期运动;而在随机变量强度不断增大的情况下,初值为 IC-3 且 $\sigma = 0.1$ 时,周期解发生了倍周期分岔现象.此现象说明,在多吸引子共存状态下,若要稳定系统的动力学行为,应尽量稳定参数 c ,降低其随机强度.

4 结 论

本文研究了具有随机参数的参激双势阱 Duffing 系统的随机动力学行为,并找到了 $\mu = 5.25$ 时保持系统稳定性所需要的参数条件.首先分析了确定性参激双势阱 Duffing 系统的复杂动力学行为,随后采用 Chebyshev 正交多项式逼近法,分别将 b 为随机参数和 c 为随机参数时的参激双势阱 Duffing 系统转化为与之等价的确定性扩阶系统,在给出方法有效性验证后,进一步采用数值方法对其响应进行分析,研究随机因素对系统动力学行为产生的影响.借助对不同初值处系统 EMR 随随机强度变化的分岔图和相轨图的研究,阐明了两随机参数对系统的影响.数值结果表明,非线性项系数的微弱随机扰动不会改变系统的动力学行为,系统较为稳定;而在相同参数条件下,阻尼系数的随机强度在达到一定值时,系统部分共存吸引子将产生分岔行为,对系统稳定性产生一定影响.

参考文献(References):

- [1] Holmes P. A nonlinear oscillator with a strange attractor[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical and Physical Sciences*, 1979, **292**(1394): 419-448.
- [2] Nbandjo B R N, Tchoukuegno R, Wofo P. Active control with delay of vibration and chaos in a double-well Duffing oscillator[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, **18**(2): 345-353.
- [3] Marinca V, Herişanu N. Explicit and exact solutions to cubic Duffing and double-well Duffing equations[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, **53**(5/6): 604-609.
- [4] Beléndez A, Bernabeu G, Francés J, Méndez D I, Marina S. An accurate closed-form approximate solution for the quintic Duffing oscillator equation[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, **52**(3/4): 637-641.
- [5] Syta A, Litak G, Lenci S, Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping[J]. *Chaos*, 2014, **24**: 013107.
- [6] Marinca V, Herişanu N. Periodic solutions of Duffing equation with strong non-linearity[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2008, **37**(1): 144-149.
- [7] Cveticanin L. The approximate solving methods for the cubic Duffing equation based on the Jacobi elliptic functions[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2009, **10**(11/12): 1491-1516.
- [8] Rong H, Xu W, Fang T. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow-band random parametric excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **210**(4): 483-515.
- [9] 金肖玲, 黄志龙, 梁以德. 调制白噪声激励下的单自由度强非线性系统的近似瞬态响应概率密度[J]. *应用数学和力学*, 2011, **32**(11): 1294-1305. (JIN Xiao-ling, HUANG Zhi-long, LEUNG Andrew Y T. Nonstationary probability densities of system response of strongly nonlinear single-degree-of-freedom system subject to modulated white noise excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(11): 1294-1305. (in Chinese))

- [10] 马少娟, 徐伟, 李伟. 基于 Laguerre 多项式逼近法的随机双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌研究[J]. 物理学报, 2006, **55**(8): 4013-4019. (MA Shao-juan, XU Wei, LI Wei. Analysis of bifurcation and chaos in double-well Duffing system via Laguerre polynomial approximation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(8): 4013-4019. (in Chinese))
- [11] 武娟, 许勇. 加性二值噪声激励下 Duffing 系统的随机分岔[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 593-599. (WU Juan, XU Yong. Stochastic bifurcations in a Duffing system driven by additive dichotomous noises[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 593-599. (in Chinese))
- [12] GUO Yu, Luo A C J. Periodic motions in a double-well Duffing oscillator under periodic excitation through discrete implicit mappings[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2015. doi: 10.1007/s40435-015-0161-6.
- [13] LIU Wen-yan, ZHU Wei-qiu, HUANG Zhi-long. Effect of bounded noise on chaotic motion of Duffing oscillator under parametric excitation[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2001, **12**(3): 527-537.
- [14] XU Yong, LI Yong-ge, LIU Di, JIA Wan-tao, HUANG Hui. Responses of Duffing oscillator with fractional damping and random phase[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **74**(3): 745-753.
- [15] Spanos P D, Ghanem R. Stochastic finite element expansion for random media[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, **115**(5): 1035-1053.
- [16] FANG Tong, LENG Xiao-lei, MA Xiao-ping, MENG Guang. λ -PDF and Gegenbauer polynomial approximation for dynamic response problems of random structures[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **20**(3): 292-298.
- [17] ZHANG Ying, DU Lin, YUE Xiao-le, HAN Qun, FANG Tong. Analysis of symmetry breaking bifurcation in Duffing system with random parameter[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2015, **106**(1): 37-51.
- [18] ZHANG Ying, DU Lin, YUE Xiao-le, HAN Qun, FANG Tong. Analysis of symmetry breaking bifurcation in Duffing system with random parameter[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2015, **106**(1): 37-51.
- [19] ZHANG Ying, Rossetto B, XU Wei, YUE Xiao-le, FANG tong. Roles of chaotic saddle and basin of attraction in bifurcation and crisis analysis[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, **21**(3): 903-915.
- [20] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 1988. (LIU Shi-kuo, LIU Shi-da. *Special Function*[M]. Beijing: China Meteorological Press, 1988. (in Chinese))

Stochastic Nonlinear Dynamics Analysis of Double-Well Duffing Systems Under Random Parametric Excitations

ZHANG Ying¹, DU Lin¹, YUE Xiao-le¹, HU Jian¹, FANG Tong²

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P.R.China;

2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P.R.China)

(Recommended by XIE Gong-nan, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Based on the orthogonal polynomial approximation theory, the stochastic dynamical behaviors of double-well Duffing systems under random parametric excitations were investigated. Firstly, the complex dynamical behaviors of deterministic Duffing systems were studied by means of the Poincaré sections. Then, the Duffing systems with random stiffnesses and damping parameters were reduced to equivalent deterministic expanded-order systems, and the effectiveness of this approximation method was proved. Thus, the ensemble-mean responses of the equivalent systems were applied to reveal the stochastic dynamical properties and the effects of the random variable intensity on the double-well Duffing systems. The numerical simulation results indicate that, in the case of coexistent attractors, the double-well Duffing system with random stiffness parameters has the similar stable dynamical behaviors to those in deterministic cases. However, for the Duffing system with random damping parameters, during the increase of the random variable intensity, the bifurcation phenomena occur to some coexistent attractors.

Key words: double-well Duffing system; random parameter; Chebyshev polynomial; bifurcation; chaos

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11302170; 11302171; 11672232)

引用本文/Cite this paper:

张莹, 都琳, 岳晓乐, 胡健, 方同. 随机参数作用下参激双势阱 Duffing 系统的随机动力学行为分析 [J]. 应用数学和力学, 2016, 37(11): 1198-1207.

ZHANG Ying, DU Lin, YUE Xiao-le, HU Jian, FANG Tong. Stochastic nonlinear dynamics analysis of double-well Duffing systems under random parametric excitations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(11): 1198-1207.