

# 基于有限体积法的非结构网格大涡模拟 离散方法研究\*

熊英<sup>1,3</sup>, 关晖<sup>2</sup>, 吴锤结<sup>3</sup>

1. 中国人民解放军91550部队, 辽宁大连116023;
2. 中国人民解放军理工大学气象海洋学院, 南京211101;
3. 大连理工大学航空航天学院, 辽宁大连116024)

(本刊编委吴锤结来稿)

**摘要:** 非结构网格下的大涡模拟是解决复杂几何体高 Reynolds(雷诺)数流动的有效途径.首先,基于有限体积法,研究了对流项和扩散项非结构网格下的离散方法.研究表明:基于 TVD(total variation diminishing)限制器的限制中心差分格式保证了对流项的二阶精度并抑制了非物理振荡,同时,线性迎风格式虽然稳定,但数值耗散过大,且不能保证有界,中心差分格式引起了周期性非物理振荡;扩散项的超松弛非正交修正减小了网格非正交带来的离散误差,但修正系数须根据网格非正交的程度进行合理选取.为验证所述离散方法对大涡模拟的适用性,数值计算了  $Re = 1.14 \times 10^6$  下的非定常三维小球绕流,计算方法包括:计算网格用基于 Delaunay 三角剖分和 Netgen 前沿推进算法的四面体非结构网格;湍流模型用改进的延迟分离涡大涡模型;在离散格式的选取上,对流项用限制中心差分,扩散项加入非正交修正,插值格式用最小二乘法,时间项用二阶后向差分.计算结果表明,所用离散方法稳定收敛并且与实验数据基本吻合.

**关键词:** 非结构网格; 中心差分; TVD 限制器; 非正交修正; 修正系数; 大涡模拟

**中图分类号:** O357.41      **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370228

## 引言

对于水下航行体等高 Reynolds 数钝体绕流数值模拟问题,Reynolds 平均湍流模型在负压力梯度区和分离尾涡区不能很好地体现流动和分离,大涡模拟(large eddy simulation, LES)因为良好的细节捕捉能力,得到了越来越广泛的应用<sup>[1]</sup>.同时,随着大规模并行计算的快速发展,具有良好边界适应能力和网格生成效率的非结构网格成为流体计算的有效途径.

在大涡模拟对流项离散格式的选择上,Kraposhin 等<sup>[2]</sup>提出了一种基于中心差分的线性过滤格式,这种线性过滤格式基于梯度限制,类似于 TVD 格式,但是并不遵循 TVD 准则<sup>[3]</sup>,Kraposhin 等认为这种方法可以一定程度上抑制局部振荡.Travin 等<sup>[4]</sup>和 Spalart 等<sup>[5]</sup>针对分离涡

\* 收稿日期: 2016-07-21; 修订日期: 2016-10-18

基金项目: 国家自然科学基金(11572350);国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2014CB-744104)

作者简介: 熊英(1978—),女,博士生(E-mail: yxiong\_2011@163.com);

吴锤结(1955—),男,教授(通讯作者. E-mail: cjwudut@dlut.edu.cn).

(detached eddy simulation, DES)模型提出了一种对流差格式,即在 RANS(Reynolds-averaged Navier-Stokes)壁面函数层采用线性迎风格式,在 LES 求解区域采用高精度的线性格式.但是以上两种格式都是在结构或者半结构六面体网格上实现的.

目前,很多非结构网格的算法可以短时间内对几何体和流场进行快速准确的网格剖分,极大地降低了网格划分的难度,提高了计算效率<sup>[6-7]</sup>.Rippa<sup>[8]</sup>证明 Delaunay 三角剖分<sup>[9]</sup>最小化了网格节点任意标量函数所定义线性插值曲面的粗糙度.基于 Delaunay 三角剖分的 Netgen 前沿推进算法能够快速生成三维四面体网格,极大地提高了复杂几何体的网格剖分效率.Jindal 与 Long 等<sup>[10]</sup>用非结构四面体网格对小球绕流大涡模拟问题进行了研究,并分别对 Reynolds 数为 100, 300,  $1.14 \times 10^6$  的小球绕流的阻力系数、摩擦力因数和尾流进行了数值模拟,其结果与实验数据吻合得很好,从而验证了非结构网格在求解湍流大涡模型时的有效性,但 Jindal 与 Long 并未提及其所用的数值离散方法.由于非结构网格的非正交性对扩散项的影响最为显著,一些学者提出了对扩散项进行非正交修正.Ferziger 等<sup>[11]</sup>提出了延迟修正方法,Jasak<sup>[12]</sup>也提出了类似的超松弛修正方法.Moraes 等<sup>[13]</sup>的研究结论认为非结构网格节点和节点之间排列的非线性增加了梯度场的离散误差.对于非结构网格类的计算流体力学问题,对扩散项进行非正交修正是必要的,但 Moraes 等的研究对象仅限于二维非结构网格.

在大涡模拟计算网格的选择上,由于大涡模拟对网格质量要求较高,一般采用结构或者半结构六面体网格.实际工程应用中几何体外型的不规则性,给结构网格划分带来了一定困难.非结构网格具有良好的几何边界适应性和简单的几何拓扑结构,在不规则几何体的网格划分上具有一定的优势;对于动边界问题更容易实现网格的实时拓扑优化.非结构网格的缺点是正交性不好,网格畸变大.对基于非结构网格的大涡模拟,在数值离散方法的选择上如果仍然用和结构网格相同的离散格式,往往会导致计算不稳定、数值发散、非物理振荡等情况发生.例如,为了抑制局部振荡,非结构网格数值模拟的对流项一般使用迎风格式<sup>[14]</sup>,而迎风格式并不适用于大涡模拟;大涡模拟要求网格具有良好的正交性,而非结构网格本身正交性就很差.

为了解决这些问题,本文基于有限体积方法,从最基本的离散格式入手,从输运方程中对计算稳定性和精度影响较大的对流项和扩散项两个方面,深入讨论了各种离散格式对计算稳定性和精度的影响,确定了适用于四面体非结构网格的离散格式、修正方法和修正参数.

## 1 有限体积法的离散

首先以标准形式的输运方程说明有限体积法的基本离散过程以及本文的研究对象:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}}_{\text{time term}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi)}_{\text{convection term}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_{\phi} \nabla \phi)}_{\text{diffusion term}} = \underbrace{S_{\phi}(\phi)}_{\text{source term}}. \quad (1)$$

对于任意形状的网络单元体  $P$ , 体积记为  $V_p$ . 根据有限体积法, 对方程(1)在网格单元体上对时间和空间上积分得到积分形式的输运方程:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p} \rho \phi dV + \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV - \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \Gamma_{\phi} \nabla \phi) dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{V_p} S_{\phi}(\phi) dV \right) dt. \quad (2)$$

就有限体积法本身而言,影响其求解精度的因素主要包括两个方面<sup>[15-16]</sup>:方程的离散和求解域的离散.求解域的离散就是要划分合理的空间网格.虽然根据有限体积法的理论,有限体积法可以对任意形状网格体进行积分,且不会影响计算精度和守恒性,但是,质量差的网格

会在方程(2) 离散的过程中带来更大的误差.本文在非结构网格划分上用基于 Delaunay 三角剖分的 Netgen 前沿推进算法,能够获得平均非正交角度在 30°左右,最大非正交角度不大于 50°的四面体非结构网格.

对于非结构网格,在输运方程(2)的离散中,对计算精度和稳定性影响较大的项是对流项和扩散项,因此研究主要对这两项离散方法的选取进行讨论.

## 2 对流项离散格式的选择

对输运方程的对流项运用 Gauss(高斯)定理:

$$\int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{u})_f (\phi)_f = \sum_f F \phi_f, \tag{3}$$

其中  $\mathbf{S}_f$  是网格面向量,其大小等于网格单元面的面积,其方向指向单元面的外法线方向; $F$  是通过面  $f$  的质量流率,且

$$F = \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{u})_f. \tag{4}$$

注意到对流项的积分式(3)中,密度  $\rho$ 、速度  $\mathbf{u}$  和输运量  $\phi$  的乘积是对网格单元的面积分,在网格面上  $\phi$  的插值格式的选择对于有限体积方法精度和稳定性的影响是巨大的.任何守恒的差分格式首先应该保证有界性,即保证输运值  $\phi$  在初始分布的范围内变化.对于具体的网格来说,网格面上的  $\phi_f$  必须在该面两侧的网格中心节点上的值之间,即  $\phi_f \in [\phi_p, \phi_N]$ .

对流项的离散就是对式(3)中的网格单元面输运量  $\phi_f$  离散.一阶迎风格式依靠单元面上流动的方向确定  $\phi_f$  的插值:

$$\phi_{fUD} = \begin{cases} \phi_p, & \text{if } F \geq 0, \\ \phi_N, & \text{if } F < 0. \end{cases} \tag{5}$$

一阶迎风格式保证了  $\phi_f$  的有界,但是其精度只有一阶,数值耗散过大.若网格单元节点  $P$  是网格单元节点  $N$  的上风网格, $P$  和  $N$  以  $f$  为面紧邻.将  $\phi_f$  在上风点  $P$  做二阶 Taylor(泰勒)展开,则

$$\phi_f = \phi_p + \nabla \phi_p \cdot \mathbf{r}_{pf}, \tag{6}$$

其中,  $\mathbf{r}_{pf}$  是  $P$  到面  $f$  的向量.对  $\nabla \phi$  做中心差分  $\nabla \phi = (\phi_N - \phi_p) / |\mathbf{r}_{pN}|$ ,默认  $\mathbf{r}_{pf}$  和  $\nabla \phi_p$  方向相同,而且  $2|\mathbf{r}_{pf}| = |\mathbf{r}_{pN}|$ .对于正交网格, $\mathbf{S}_f$  和  $\mathbf{r}_{pN}$  是平行的,得到线性迎风格式:

$$\phi_{fLUD} = \phi_p + 0.5(\phi_p - \phi_N). \tag{7}$$

线性迎风格式<sup>[14,17]</sup>具有二阶精度,并且具有非常好的稳定性,但是仍然具有较高的耗散性.中心差分格式结合了单元面周围网格的双向信息:

$$\phi_{fCD} = f_x \phi_p + (1 - f_x) \phi_N, \tag{8}$$

其中,  $f_x = |\mathbf{r}_{fN}| / |\mathbf{r}_{pN}|$ .中心差分格式具有二阶精度,但是带来了非物理振荡,不能保证  $\phi_f$  的有界.

由上面的分析可见,线性迎风格式具有二阶精度,但是仍然具有一定的耗散性.中心差分格式具有二阶精度,同时,因为结合了单元面周围网格的双向信息,所以能够更好地模拟对流问题.但是,对于对流动效明显的高 Reynolds 数流动,单纯的中心差分格式是不稳定的.

### 2.1 基于 TVD 函数限制器的线性迎风和中心差分混合格式

对于高 Reynolds 数流动,N-S 方程的对流项流场效应明显,对流项的离散格式选择将在很大程度上影响求解精度.为了获得一个精度较高,并且稳定的格式,把中心差分格式和线性迎风格式进行混合:

$$\phi_f = \phi_{LUD} + \Psi(r)(\phi_{CD} - \phi_{LUD}). \tag{9}$$

通过一个基于 TVD 格式<sup>[18]</sup>的函数限制器  $\Psi(r)$  控制差分格式的比例:

$$\Psi(r) = \max\left(\min\left(\frac{2r}{K_{Div}}, 1\right), 0\right), \tag{10}$$

其中  $K_{Div}$  是一个取值在  $(0,1)$  之间的标量,  $r$  是一个连续梯度比

$$r = 2 \left[ \frac{(\nabla\phi)_p}{(\nabla\phi)_f} \right] - 1. \tag{11}$$

式(9)~(11)所共同确定的离散格式是一个基于 TVD 通量限制器的离散格式,本文称为限制中心差分,该格式融合了线性迎风和中心差分,具有二阶精度,同时, TVD 性质决定了格式的稳定性.

### 2.2 对流项离散格式验证

为了验证对流项限制中心差分格式的计算精度和稳定性,考虑一个简单的对流方程:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) = 0. \tag{12}$$

方程(12)只有对流没有扩散,网格 Reynolds 数  $Re$  趋近于无穷大,此时只有交叉扩散,没有流向扩散.

如图 1 所示,对于流动不随网格方向分布的二维矩形流场  $(x \in [0,2], y \in [0,1])$ ,其初始速度场呈漩涡状,流场内任意点  $(x,y)$  处的速度矢量  $\mathbf{u}$  为

$$\mathbf{u} = \left( \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} \right). \tag{13}$$

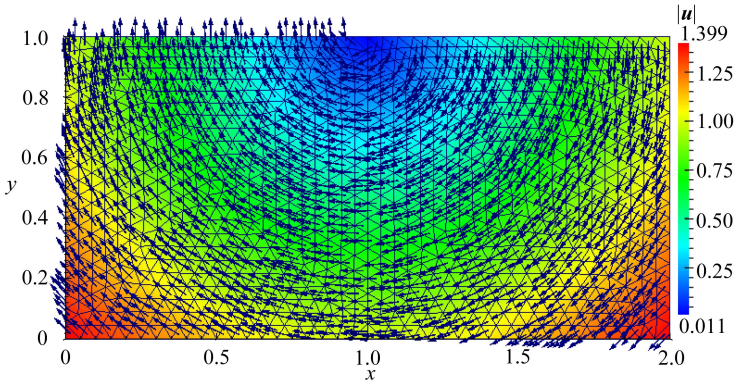
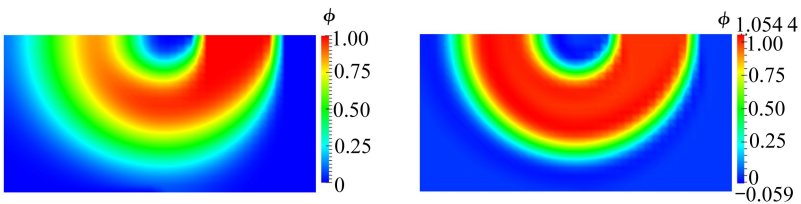


图 1 漩涡状初始速度场的对流问题

Fig. 1 The scalar transport problem of a swirl velocity field



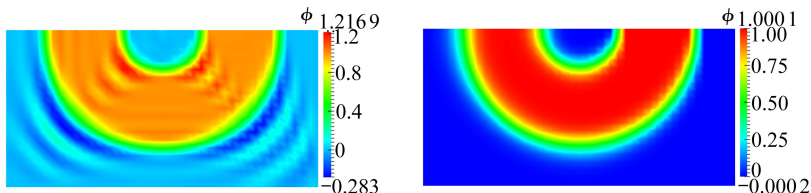
(a) 迎风格式

(a) The upwind scheme

(b) 线性迎风格式

(b) The linear upwind scheme





(c) 中心差分格式 (d) 限制中心差分格式  
(c) The central difference scheme (d) The limited central difference scheme

图 2 phi 在不同对流差分格式下的输运

Fig. 2 The transportation of phi under different convection discrete scheme

用 Delaunay 三角剖分算法对流场进行三角形剖分,生成非结构二维三角形网格,流场与网格不平行.分别用一阶迎风格式、二阶迎风格式、中心差分格式和限制中心差分格式对流场进行模拟.输运量 phi 在不同对流差分格式下的输运效果如图 2 所示.因为流场与网格交叉,各种离散格式都会产生一定程度上垂直于流向的交叉扩散.一阶迎风格式扩散性最强,线性迎风格式的发散性要明显小于一阶迎风格式,但仍然不如限制中心差分格式的精度好,不加限制器的中心差分格式在流场交叉扩散方向出现了非物理振荡.

过点(1,1)和点(0,0)的直线上,4种离散格式下输运量 phi 的分布情况如图 3 所示.线性迎风格式不但耗散较大,而且出现了小的凸起,可见,线性迎风格式不能保证有界性;中心差分格式则出现了较强的周期性非物理振荡;加入 TVD 通量限制器的限制中心差分格式“限制”了非物理振荡,在网格节点数有限的条件下,获得了更高的精度.因此,对于非结构网格的对流项离散格式,基于 TVD 格式限制器的限制中心差分格式在保证二阶精度的条件下,获得了较好的稳定性和精度.

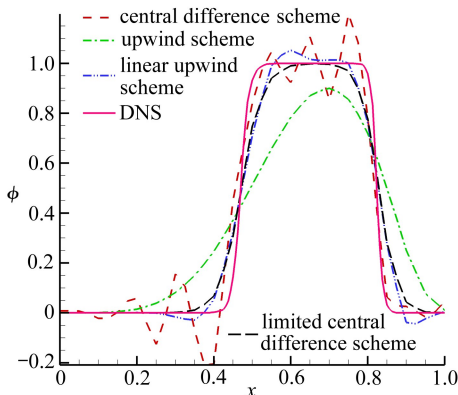


图 3 y = x 斜线上 phi 的分布

Fig. 3 The scalar phi transport on the y = x line

### 3 扩散项离散格式的选择

#### 3.1 非正交修正

对扩散项运用 Gauss 定理:

$$\int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f = \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f \quad (14)$$

如果  $\mathbf{S}_f$  与  $\mathbf{r}_{PN}$  平行,那么,二阶精度下

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{S}_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{r}_{PN}|} \quad (15)$$

但是对于非正交网格,式(15)无法达到二阶精度,这是因为多数情况下,  $\mathbf{S}_f$  与  $\mathbf{r}_{PN}$  会有一个夹角,这个角度越大,网格的正交性越差,这个夹角也是网格非正交性的量度<sup>[19]</sup>.对于大涡模拟,本文认为这个角度最好不要超过 60°,当然越小越好,但对于非结构网格或者结构复杂的物体往往是不可能的.超松弛修正方法把面向量分成两部分,一部分是与  $\mathbf{r}_{PN}$  方向平行的向量,称之为正交部分;另一部分,就是非正交部分,这里采用了 Jasak<sup>[12]</sup> 提出的“超松弛”非正交修正方

法,并加入了一个修正系数.

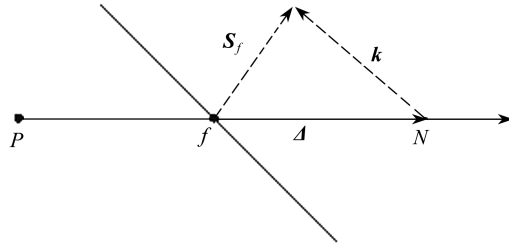


图 4 超松弛非正交修正方法

Fig. 4 Nonorthogonal treatment in the over-relaxed approach

非正交情况下,面向量  $S_f$  被分成两个部分,即平行于向量  $r_{PN}$  的部分  $\Delta$  和向量  $k$ ,如图 4 所示,有如下向量关系式成立:

$$S_f = \Delta + k. \quad (16)$$

对于  $\Delta$  的取值,参考 Jasak<sup>[12]</sup> 在其博士学位论文中提出的超松弛修正法:

$$\Delta = \frac{r_{PN}}{r_{PN} \cdot S_f} |S_f|^2. \quad (17)$$

基于超松弛修正法,  $S_f \cdot (\nabla\phi)_f$  分解为两部分

$$S_f \cdot (\nabla\phi)_f = \underbrace{\Delta \cdot (\nabla\phi)_f}_{\text{orthogonal part}} + \underbrace{k \cdot (\nabla\phi)_f}_{\text{nonorthogonal part}}, \quad (18)$$

其中,正交部分用中心差分方法隐式求解,非正交部分用精度低一些的方法显式求解.对于某些非结构网格,比如非正交部分比正交部分大很多的网格结构或者局部正交性差的网格结构,超松弛修正方法常常不稳定,这里加入一个修正系数  $K_{dc}$  限制式(18)中非正交部分的比例:

$$S_f \cdot (\nabla\phi)_f = \Delta \cdot (\nabla\phi)_f + K_{dc} [k \cdot (\nabla\phi)_f], \quad (19)$$

其中

$$K_{dc} \Delta \cdot (\nabla\phi)_f > [k \cdot (\nabla\phi)_f]. \quad (20)$$

由以上分析可见,超松弛修正在理论上能够降低网格节点连线与网格界面之间的非垂直性所引起的梯度离散误差,但在实际的计算过程中,还要根据具体的网格信息对修正系数进行合理的选取.

### 3.2 扩散项格式验证

为验证超松弛非正交修正方法的可行性和修正效果,考虑一个简单的扩散问题:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \nabla \cdot (\Gamma \nabla\phi) = 0. \quad (21)$$

#### 3.2.1 45°均匀非正交六面体网格的非正交修正

首先,对于一个非正交角度为均匀 45°的非正交网格,如图 5 所示,  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [0, 1]$ .其中一对边定义为第一类边界条件,  $\phi = 1$ ,另外一对边定义为第二类边界条件,  $\nabla\phi = 0$ .对前面的算例重新进行非均匀三角网格划分,如图 6 所示.

扩散项分别采用超松弛修正和不修正进行计算,并和 DNS 结果进行比较,  $\phi$  的分布如图 7 所示.图 8 是点(0.5, 0)到点(1.5, 1.0)之间的线段上  $\phi$  值的分布.对于均匀非正交角度的四边形网格,不加非正交修正的输运曲线发生了偏离,这说明网格非正交性“妨碍”了扩散效应,使二次扩散曲线产生线性化偏离的趋势.而加入超松弛修正的扩散曲线与直接数值模拟结果完全吻合.

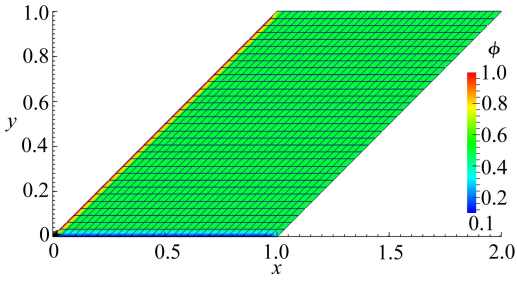


图 5 45° 均匀非正交四边形网格

Fig. 5 The uniform 45° nonorthogonal quadrilateral mesh

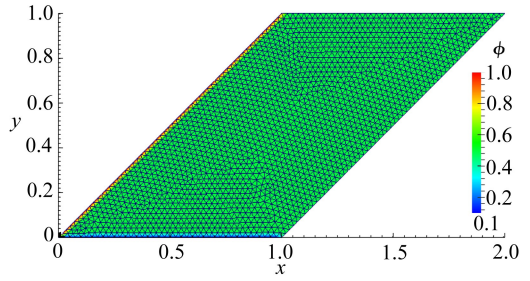
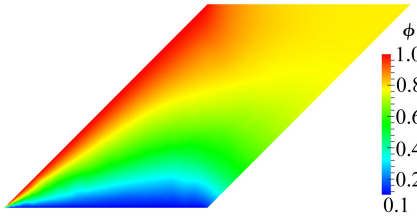


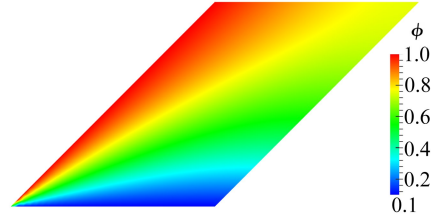
图 6 非均匀三角形非结构网格

Fig. 6 The completely unstructured triangular mesh



(a) 非正交修正

(a) With nonorthogonal correction



(b) 无非正交修正

(b) Without nonorthogonal correction

图 7 有无非正交修正的比较

Fig. 7 Comparison of cases with or without nonorthogonal correction

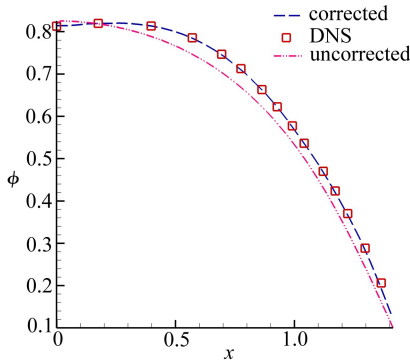


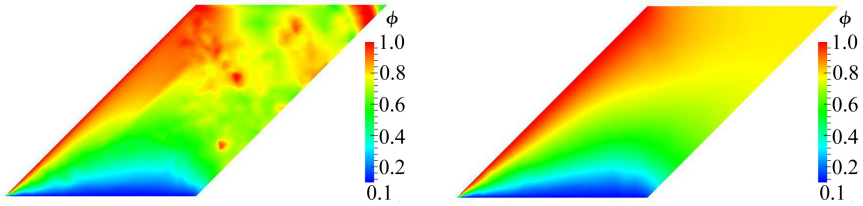
图 8 点(0.5, 0)到点(1.5, 1.0)线段上 phi 的分布

Fig. 8 The scalar  $\phi$  on the line from (0.5, 0) to (1.5, 1.0)

### 3.2.2 四面体非结构网格的扩散项非正交修正

对于规则的非正交网格,超松弛修正获得了很好的修正效果,但是,在实际工程应用中的非正交网格往往是不规则和不均匀的,不太可能获得均匀分布的非正交角度.所以,对前面的算例重新进行非均匀三角网格划分,如图 6 所示,用 Delaunay 三角剖分算法进行网格划分,最大非正交角度 50°,平均非正交角度 30°.

计算结果如图 9 和 10 所示,用完全非正交修正的方法得到了一个振荡解.对于这种情况需要对非正交修正比例进行控制,如图 10 所示,  $K_{dc} = 0.333$  时的修正曲线虽然和直接数值模拟结果没有完全吻合,但是在保证了数值稳定性的前提下,仍然获得了一个相对更好的数值解,并且这个解优于未加入修正时的解.这说明,对于一般的非正交网格,选择合理的修正系数,超松弛非正交修正能够获得更好的结果.



(a) 完全非正交修正

(b) 非正交修正,  $K_{dc} = 0.333$

(a) Completely nonorthogonal correction

(b) Nonorthogonal correction,  $K_{dc} = 0.333$

图 9 完全修正和部分修正的比较

Fig. 9 Comparison between correction and correction with a coefficient

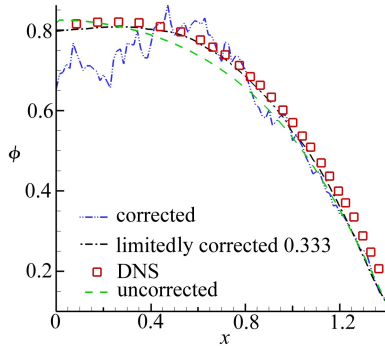


图 10 点(0.5, 0)到点(1.5, 1.0)线段上  $\phi$  的分布

Fig. 10 The scalar  $\phi$  on the line from (0.5, 0) to (1.5, 1.0)

## 4 小球绕流的大涡模拟

用前面得到的离散格式和参数建立基于四面体非结构网格、Reynolds 数  $Re = 1.14 \times 10^6$  下的小球绕流三维非稳态大涡模拟模型。

### 4.1 大涡模拟控制方程

对 N-S 方程空间滤波后得到不可压缩粘性流体大涡模拟的 N-S 方程<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij} + \tau_{ij}), \quad (22)$$

其中

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (23)$$

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}, \quad (24)$$

式(24)中,  $\tau_{ij}$  表示亚网格和滤波尺度之间的动量交换<sup>[20]</sup>, 称为亚网格应力张量, 首先基于分离涡模型 (DES)<sup>[21]</sup> 对亚网格应力张量建模。

### 4.2 分离涡模型

DES 方法将涡粘模型用于建立 LES 未解尺度模式, 亚网格应力张量表示为<sup>[22-23]</sup>

$$\tau_{ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}, \quad (25)$$

其中,  $\nu_t$  表示湍流涡粘系数. 涡粘系数通过下式确定：



$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu 1}, \quad (26)$$

其中

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu 1}^3}, \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \quad (27)$$

欲求得  $\nu_t$ , 须先对  $\tilde{\nu}$  求解, 采用 Spalart-Allmaras 模式, 建立关于  $\tilde{\nu}$  的涡粘系数方程<sup>[24-25]</sup>:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} \{ \nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + C_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2 \} + C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - C_{\omega} f_{\omega} \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{d}} \right)^2, \quad (28)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{S} &= |\bar{S}| + f_{\nu 2} \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa \tilde{d})^2}; f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + f_{\nu} \chi}; f_{\omega} = g \left( \frac{1 + C_{\omega 3}^6}{g^6 + C_{\omega 3}^6} \right)^{1/6}; \\ g &= r + C_{\omega 2} (r^6 - r); r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} (\kappa \tilde{d})^2}; |\bar{S}| = (2\bar{\Omega}_{ij} \bar{\Omega}_{ij})^{1/2}; \\ \bar{\Omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \right. \quad (29)$$

方程(28)和(29)参数设置如表 1 所示. 方程(28)中的  $\tilde{d}$  表示一个湍流长度尺度. 对于不同的 DES 模型,  $\tilde{d}$  有不同的定义.

表 1 Spalart-Allmaras DES 模型参数设置<sup>[26]</sup>

Table 1 Constants of the original Spalart-Allmaras DES turbulence model<sup>[26]</sup>

$\sigma$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	$C_{\nu 1}$	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	$C_{\omega 3}$	$\kappa$
2/3	0.135 5	0.622	7.1	$C_{b1}/\kappa^2$	0.3	2	0.41

DES 模型基于 Spalart 与 Allmaras<sup>[27]</sup> 的 RANS 模型, 在靠近壁面处采用 RANS 模式求解, 在湍流核心区参用 LES 模式求解. 其 LES 模式和 RANS 模式之间的切换由湍流长度尺度  $\tilde{d}$  的变化来完成. 根据 Piomelli 等<sup>[23]</sup> 对 DES 模型长度尺度  $\tilde{d}$  的定义:

$$\tilde{d} = \tilde{d}_{DES} = \min(d_w, C_{DES} \Delta_{max}), \quad (30)$$

式中,  $d_w$  是网格点到壁面的垂直距离,  $\Delta_{max}$  表示当地网格尺度, 对于非结构网格,  $\Delta_{max} = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ , 经验系数  $C_{DES} = 0.65$ . DES 模型的缺点是: 当边界层厚度过大时, DES 模型容易引起网格诱导分离, 在边界层内部就发生了 RANS-LES 之间的转换.

### 4.3 延迟分离涡模型

在 DES 基础上发展而来的 DDES (delayed detached eddy simulation) 模型<sup>[24]</sup> 对湍流长度尺度  $\tilde{d}$  进行了重新的定义, 避免了 DES 模型的网格诱导分离现象. DDES 能够检测到边界层, 即使是网格间距达到了 RANS-LES 转换标准, 也能够边界层内部保证完全的 RANS 模式. DDES 模型下  $\tilde{d}$  的定义:

$$\tilde{d} = \tilde{d}_{DDES} = d_w - f_d \max(0, (d_w - C_{DES} \delta)), \quad (31)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} r_d &= \frac{\nu_t + \nu}{\max[\sqrt{U_{i,j} U_{i,j}}, 10^{-10}] \cdot \kappa^2 d_w^2}, \\ f_d &= 1 - \tanh(8r_d)^3, \end{aligned} \right. \quad (32)$$

这里,  $U_{i,j}$  表示速度梯度,  $r_d$  在对数律区内等于 1, 在湍流区等于 0. 与 DES 模型定义的长度尺度  $\tilde{d}_{DES}$  相比, DDES 模型定义的长度尺度  $\tilde{d}_{DDES}$  不仅仅依赖于网格, 还与涡粘场有关.

#### 4.4 改进的延迟分离涡模型

本文采用改进的延迟分离涡模型(improved delayed detached eddy simulation, IDDES)<sup>[28-29]</sup>. IDDES 模型能够在 DDES 模型和壁面大涡模型之间转换,这种转换依赖于一个变化的亚网格湍流长度尺度  $\tilde{d}$ . 这个重新定义的  $\tilde{d}$  或者等于 DDES 初始定义的长度尺度  $\tilde{d}_{\text{DDES}}$ , 或者等于壁面函数所定义的长度尺度. 当湍流发生时, 如果所提供的网格分辨率足以分辨 LES 模型的小尺度涡, 壁面函数模型就会被激发. IDDES 湍流长度尺度  $\tilde{d}$  的定义:

$$\tilde{d} = \tilde{d}_{\text{IDDES}} = \tilde{f}_d(1 + f_e)l_{\text{RANS}} + (1 - \tilde{f}_d)l_{\text{LES}}, \quad (33)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{\text{RANS}} = d_w; l_{\text{LES}} = C_{\text{DES}}\psi\Delta; \Delta = \min(\max(C_\omega d_w, C_\omega\Delta_{\text{max}}, \Delta_{\text{wn}}), \Delta_{\text{max}}); \\ \tilde{f}_d = \max[1 - f_{dt}, f_B]; \\ f_{dt} = 1 - \tanh[(8r_{dt})^3]; f_B = \min[2\exp(-9\alpha^2), 1]; \\ \alpha = 0.25 - \frac{d_w}{h_{\text{max}}}; f_e = \max[f_{e1} - 1, 0]\psi f_{e2}; \\ f_{e1} = \begin{cases} 2\exp(-11.09\alpha^2), & \text{if } \alpha \geq 0, \\ 2\exp(-9\alpha^2), & \text{if } \alpha < 0; \end{cases} \\ f_{e2} = 1 - \max(f_i, f_l); f_i = \tanh[(C_i^2 r_{dt})^3]; f_l = \tanh[(C_l^2 r_{dt})^{10}]; \\ r_{dt} = \frac{\nu_t}{(\kappa d_w)^2 \max\left\{\left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2}, 10^{-10}\right\}}; \\ r_{dl} = \frac{\nu}{(\kappa d_w)^2 \max\left\{\left[\sum_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2}, 10^{-10}\right\}}; \\ \psi^2 = \min\left\{10^2, \frac{1 - C_{b1}/(C_{w1}\kappa^2 f_w^*)f_{v2}}{\max(f_{v1}, 10^{-300})}\right\}. \end{array} \right. \quad (34)$$

对于方程(33)和(34)未定义的量,  $\Delta_{\text{wn}}$  表示壁面法线方向的网格步长,  $h_{\text{max}}$  表示最大网格边长, 其他相关的参数说明如表 2 所示. IDDES 结合了 DDES 模型和壁面大涡模型的优点, 不仅能够模拟大规模强分离, 而且能够模拟壁面流.

表 2 IDDES 模型系数选择

Table 2 Constants of the IDDES model

$C_i$	$C_t$	$C_\omega$	$f_w^*$
3.55	1.63	0.15	0.424

#### 4.4 壁面函数

在 IDDES 壁面函数模型的建立中, 选择经典的 Spalding 模型<sup>[30]</sup>:

$$y^+ = u^+ \frac{1}{E} \left[ e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ \frac{1}{2} (\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6} (\kappa u^+)^3 \right], \quad (35)$$

其中,  $\kappa = 0.41$  是 von Karman 常数,  $E = 9.1$  是常数, 并且有, 第一网格的无量纲距离  $y^+ = y_0 u_\tau / \nu$ , 无量纲速度  $u^+ = \bar{u}_0 / u_\tau$ , 其中  $y_0$  是到壁面的垂直距离,  $\bar{u}_0$  是切向速度的模,  $u_\tau$  是摩擦力速度.

Spalding 模型的优点是不仅适用于对数律层, 也适用于粘性子层和过渡层, 从而不用担心

$y^+$  局部值过小(例如: $y^+ < 30$ ,甚至更小)对计算有效性的影响.因此,只要保证  $y^+$  落在对数律区域以内( $y^+ < 300$ ) 就能够满足要求.

#### 4.6 $Re = 1.14 \times 10^6$ 下的非定常三维小球绕流数值模拟

考虑动力粘性系数  $\nu = 1 \times 10^{-6}$ , Reynolds 数  $Re = 1.14 \times 10^6$  下的非定常三维小球绕流流场.如图 11(a) 所示圆柱形三维流场,网格划分方法使用 Netgen 前沿推进法<sup>[31]</sup>.网格总数  $3.3 \times 10^6$  个,如图 11(a) 所示;小球表面网格数 67 312 个,如图 11(b) 所示.无量纲第一网格距离  $y^+ < 300$ .网格最大非正交角度不大于  $55^\circ$ ,平均非正交角度不大于  $30^\circ$ .采用无量纲计算方法,小球直径  $D$ ,如图 11(a) 所示,直角坐标系下小球绕流流场区域是  $x \in (-5D, 15D)$ ,  $y \in (-4D, 4D)$ ,  $z \in (-4D, 4D)$ ,流场大小  $20D \times 8D \times 8D$ ,小球位于  $x = 0D, y = 0D, z = 0D$  处.综合前面的研究结果,利用限制器中心差分和非正交修正对 N-S 方程进行有限体积离散.时间格式选择后向二阶差分格式,插值格式选择最小二乘法,离散格式选择如表 3 所示.

表 3 小球绕流离散差分格式

Table 3 Discretization schemes for the sphere flow model

	discrete scheme	interpolation scheme
$\partial/\partial t$	backward difference	
$\nabla$	central difference	least squares
$\nabla \cdot$	central difference with a TVD limiter	least squares
$\nabla^2 \cdot$	central difference with nonorthogonal correction	least squares

表 4 IDDES 大涡模拟下的小球绕流边界条件

Table 4 Boundary conditions for the sphere flow model under IDDES

	velocity $u$	pressure $p$	subgrid viscosity $\mu_t$	eddy viscosity coefficient $\mu$
inlet	1.65	zero gradient	$2.7 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-5}$
outlet	zero gradient	0	$2.7 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-5}$
sphere	0	zero gradient	Spalding's wall function	0
other	symmetry	symmetry	symmetry	symmetry

边界条件如表 4 所示.初始  $u_\infty t/D = 0$  时刻有均匀速度流场  $u_0 = u_\infty = 1.65$  流过小球,当  $u_\infty t/D = 30$  流态达到基本稳定.如图 12(a) 和 12(b) 所示,小球尾流区出现了  $\Omega$  形状的涡街,并沿着流向形成成对涡脱,这与 Taneda<sup>[32]</sup> 的实验观察是一致的.

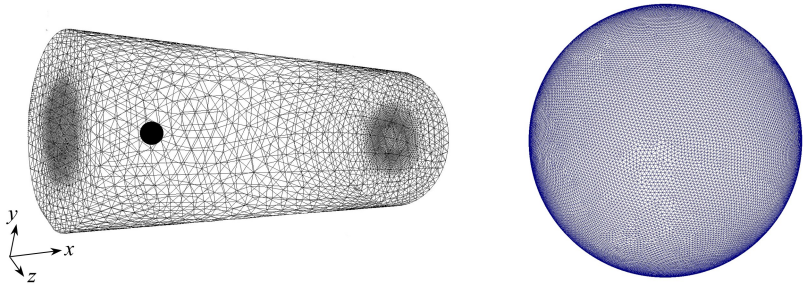
同时分别采用 Kraposhin 等<sup>[2]</sup> 的线性滤波中心差分 and TVD 限制中心差分的涡量如图 13 所示,线性滤波方法出现了局部非物理振荡,对于非结构网格大涡模拟并不稳定.

压力和速度在迭代计算中的残差收敛情况如图 14(a) 所示,速度场稳定收敛,压力场保持稳定有界.

#### 4.7 小球受力分析

首先对小球整体受力情况进行分析.粘性流场中的小球受到来自流体的作用力,对于小球的整体受力情况,首先对小球的阻力系数进行分析.小球绕流的阻力系数数值计算公式:  $C_d = F_x / (0.5\rho_\infty u_\infty^2 \pi D^2/4)$ ,其中  $D$  是小球直径,  $F_x$  是小球受到的来自  $x$  方向的流向作用力.线性迎风格式下阻力系数平均为 0.159,而限制中心差分的阻力系数平均为 0.142,实验值平均值是 0.14.可见,线性迎风格式的耗散增加了小球的阻力,限制中心差分格式的阻力系数更接近实验结果.反映小球整体受力情况的参数还包括升力系数和俯仰力矩系数.其计算公式分别是  $C_l = F_y / (0.5\rho_\infty u_\infty^2 \pi D^2/4)$ ,  $C_m = M_z / (0.5\rho_\infty u_\infty^2 \pi D^3/4)$ ,其中  $F_y$  是小球受到的展向作用力,  $M_z$  是小球受到的俯仰力矩.阻力系数、升力系数和俯仰力矩系数随着时间的变化曲线如图 14(b) 所

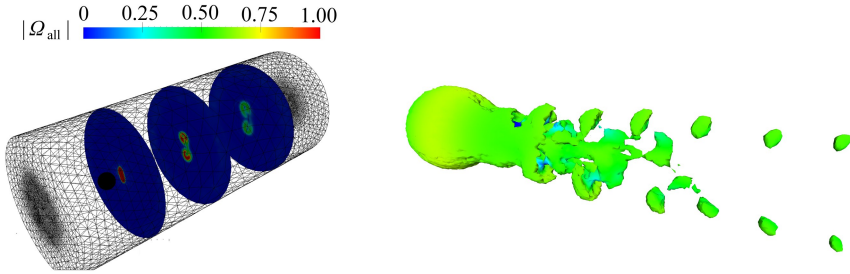
示.流场的非对称性使小球受到了一个向上的升力,同时给了小球一个顺时针的俯仰力矩.



(a) 小球绕流流场网格 (b) 小球表面网格  
 (a) The flow field mesh for the sphere (b) The surface mesh for the sphere

图 11 流场和网格

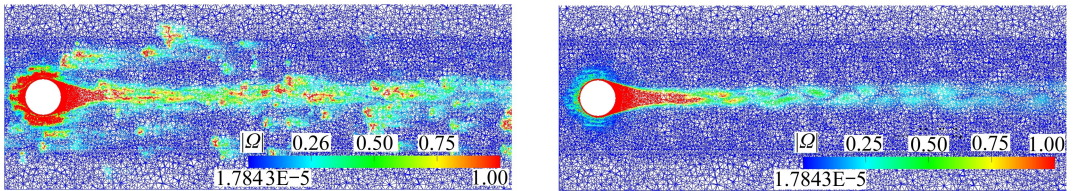
Fig. 11 Flow field and mesh



(a) 流场和涡量剖面示意图 (b) Q 准则下的涡量场等值面图  
 (a) The illustration of the flow field and vorticity section (b) The vorticity isosurface under the Q rule

图 12 尾涡流场

Fig. 12 Wake vortex flow field



(a) Kraposhin 线性滤波中心差分格式下的局部涡量 (b) 限制中心差分格式下的局部涡量  
 (a) Magnitude of vorticity under the filtered linear scheme (b) Magnitude of vorticity under the limited central difference scheme

图 13 大涡模拟下两种对流差分格式的比较

Fig. 13 Comparison of 2 convection difference schemes for large eddy simulation

然后对小球局部受力情况进行分析.反映小球绕流局部受力情况的参数主要是压力系数  $C_p$  和摩擦力因数  $C_f$ .根据压力系数定义,  $C_p = (p - p_\infty) / (0.5 \rho_\infty u_\infty^2)$ , 小球纵向剖面上的压力系数分布如图 15(a) 所示.线性迎风格式下的平均压力系数与 Achenbach<sup>[33]</sup> 的实验基本符合,但在背风区 ( $\phi > 120^\circ$ ), 限制中心差分格式与实验数据吻合的更好.作为比较,同时图 15(a) 也标注了 Constantinescu 等<sup>[34]</sup> 的计算结果.与 Constantinescu 等的计算结果相比,研究结果在背风区更接近真实流场.这说明,表 2 的格式计算大涡模拟是可行的.

对于粘性流体绕流,反映局部受力情况的另一个重要参数是壁面摩擦力因数.根据定义,

$C_f = \tau_w / (0.5\rho_\infty u_\infty^2)$ , 其中壁面摩擦力  $\tau_w = \mu(\partial u / \partial y)|_{\text{wall}}$ . 小球纵向剖面上的摩擦力因数分布如图 15(b) 所示. 壁面摩擦力与实验结果走势基本一致, 但在值大小上还是有所差异. 但是, 在高 Reynolds 数下, 壁面摩擦力在总阻力上所占比重很小, 所以, 精确的计算壁面摩擦力对于整体受力分析重要性并不显著.

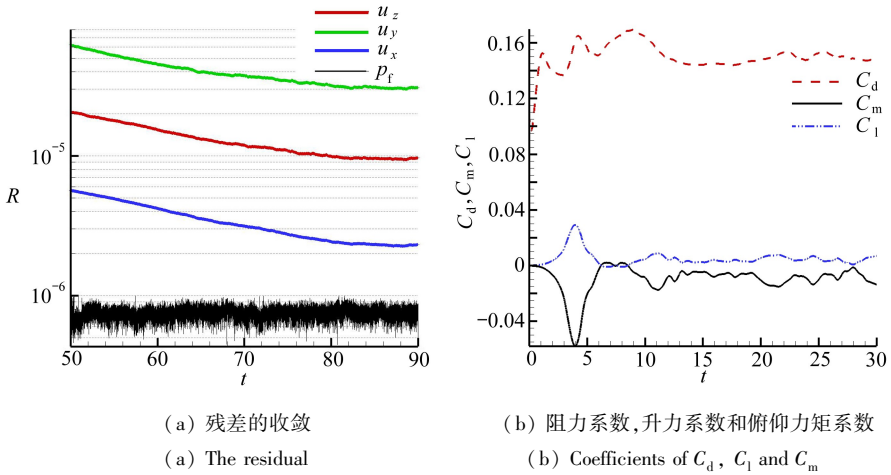


图 14 残差和总体受力情况

Fig. 14 Residual and general force

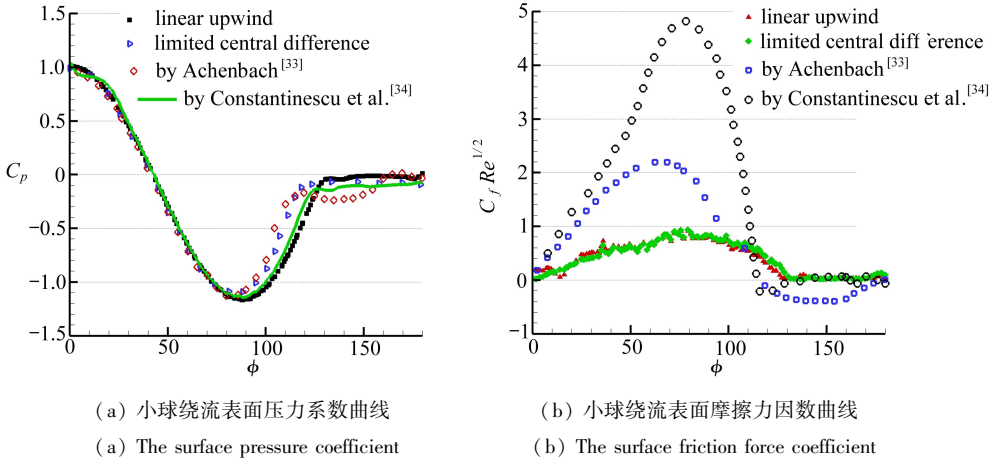


图 15 表面压力和表面摩擦力

Fig. 15 The surface pressure force and surface friction

## 5 结 论

四面体非结构类网格的大涡模拟, 在离散格式的选择上不同于结构网格. 对流项线性迎风格式能够保证稳定性, 但是其过高的扩散性会使阻力系数偏大, 流场过于发散. 中心差分格式和线性滤波中心差分格式都会带来非物理振荡. 基于 TVD 的限制中心差分格式在保证稳定性的前提下, 计算结果最接近实际流场. 四面体网格的非正交性对扩散项的影响最明显, 对扩散项进行超松弛非正交修正是必要的. 对于研究的问题, 修正系数 0.333 时, 计算结果相对较好.

本文主要讨论了对流项和扩散项. 对于非定常流动, 除了考虑空间项的离散, 还需要考虑



时间项的离散.对于时间项的离散以及具体的插值格式的选择,限于篇幅,并未做深入讨论,而是直接用时间二阶后向差分 and 最小二乘法插值格式.数值计算结果表明,所选用的离散格式在保证计算精度的前提下是稳定的和收敛的.本文研究结果对于非结构网格大涡模拟和四面体网格动边界问题具有一定的参考价值.

### 参考文献(References):

- [1] 张兆顺,崔桂香,许春晓.湍流大涡数值模拟的理论和应用[M].北京:清华大学出版社,2008. (ZHANG Zhao-shun, CUI Gui-xiang, XU Chun-xiao. *Theory and Application of Large Eddy Simulation of Turbulent Flow*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese))
- [2] Kraposhin M, Bovtrikova A, Strijhak S. Adaptation of Kurganov-Tadmor numerical scheme for applying in combination with the PISO method in numerical simulation of flows in a wide range of Mach numbers[J]. *Procedia Computer Science*, 2015, **66**: 43-52.
- [3] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **135**: 260-278.
- [4] Travin A, Shur M, Strelets M, Spalart P R. Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows[C]//*Proceedings of the 42nd Euromech Colloquium on LES and Complex Transition and Turbulent Flows*. 2000: 239-254.
- [5] Spalart P R, Shur M L, Strelets M K, Travin A K. Sensitivity of landing-gear noise predictions by large-eddy simulation to numerics and resolution [C]//*50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Nashville, Tennessee, 2012; AIAA 2012-1174.
- [6] 吴望一,林光.多项式基函数法[J].应用数学和力学,2009, **30**(9): 1021-1032. (WU Wang-yi, LIN Guang. Basic function scheme of polynomial type[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(9): 1021-1032. (in Chinese))
- [7] 葛全文. Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式[J].应用数学和力学,2014, **35**(1): 92-101. (GE Quan-wen. Lagrangian high-order staggered conservative gasdynamics scheme on unstructured meshes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 92-101. (in Chinese))
- [8] Rippa S. Minimal roughness property of the Delaunay triangulation[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1990, **7**(6): 489-497.
- [9] Lawson C L. Transforming triangulations[J]. *Discrete Mathematics*, 1972, **3**(4): 365-372.
- [10] Jindal S, Long L N, Plassmann P E, Sezer-Uzol N. Large eddy simulations around a sphere using unstructured grids[C]//*34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. Portland, Oregon, 2004; AIAA 2004-2228.
- [11] Ferziger J H, Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*[M]. 2nd ed. Germany: Springer-Verlag, 2001.
- [12] Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows[D]. PhD Thesis. London: University of London, 1996; 83-86.
- [13] Moraes A, Lage P, Cunha G. Analysis of the non-orthogonality correction of finite volume discretization on unstructured meshes[C]//*22nd International Congress of Mechanical Engineering*. Ribeirão Preto, SP, 2013; 3518-3530.
- [14] Barth T J, Jespersen D C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes[C]//*27th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Reno, NV, 1989.

- [15] Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*[M]. John Wiley & Sons, 1991.
- [16] Muzaferija S. Adaptive finite volume method for flow prediction using unstructured meshes and multigrid approach[D]. PhD Thesis. London: University of London, 1994.
- [17] Price H S, Varga R S, Warren J E. Application of oscillation matrices to diffusion-convection equations[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1966, **45**: 301-311.
- [18] Sweby P K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, **21**(5): 995-1011.
- [19] Boris J P, Book D L. Flux-corrected transport I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works [J]. *Journal of Computational Physics*, 1973, **11**(1): 38-69.
- [20] Lesieur M, Métais O, Comte P. *Large-Eddy Simulations of Turbulence*[M]. Cambridge University Press, 2005: 39-40.
- [21] Spalart P R, Jou W H, Strelets M, Allmaras S R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach[C]//*Advances in DNS/LES*. Columbus: Greyden Press, 1997.
- [22] Piomelli U, Balaras E, Pasinato H, Squires K D, Spalart P R. The inner-outer interface in large-eddy simulations with wall layer models[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2003, **24**(4): 538-550.
- [23] Piomelli U, Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2002, **34**: 349-374.
- [24] Spalart P R, Deck S, Shur M L, Squires K D, Strelets M K, Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant of ambiguous grid densities[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2006, **20**(3): 181-195.
- [25] Spalart P R. Detached-eddy simulation[J]. *Annual Review Fluid Mechanics*, 2009, **41**: 181-202.
- [26] Villiers E. The potential of large eddy simulation for the modelling of wall bounded flows[D]. PhD Thesis. London: University of London, 2006.
- [27] Spalart P R, Allmaras S R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows[J]. *La Recherche Aéronautique*, 1994, **1**(1): 5-21.
- [28] Shur M L, Spalart P R, Strelets M K, Travin A K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2008, **29**(6): 1638-1649.
- [29] Werner H, Wengle H. Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel[C]//*Selected Papers From the Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*. 1993: 155-168.
- [30] Spalding D B. A single formula for the "law of the wall"[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, **28**(3): 455-458.
- [31] Schöberl J. NETGEN an advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules[J]. *Computing and Visualization in Science*, 1997, **1**(1): 41-52.
- [32] Taneda S. Experimental investigations of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers [J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1956, **11**(10): 1104-1108.
- [33] Achenbach E. Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, **54**: 565-575.
- [34] Constantinescu G S, Pacheco R, Squires K D. Detached-eddy simulation of flow over a sphere

[C]//40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. Reno, NV, 2002; AIAA 2002-0425.

## LES Discretization Methods for Unstructured Meshes Based on the Finite Volume Method

XIONG Ying<sup>1,3</sup>, GUAN Hui<sup>2</sup>, WU Chui-jie<sup>3</sup>

(1. Unit 91550 of PLA, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China;

2. College of Meteorology and Oceanography, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, P.R.China;

3. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Contributed by WU Chui-jie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The LES of unstructured meshes is an effective way to solve the high Reynolds number flow around complex geometries. Firstly, based on the finite volume method, the discretization methods for the convection term and the diffusion term were analyzed. For the convection term, the central difference scheme with a TVD limiter ensured 2nd-order accuracy and inhibited the nonphysical oscillations. Dissipation of the linear upwind scheme was large and can not guarantee boundedness. The central difference scheme caused a period of nonphysical oscillations. For the diffusion term, the method of over relaxation nonorthogonal correction reduced the discretization error caused by the nonorthogonal mesh. The correction coefficients were chosen according to the nonorthogonal degree of the mesh. Secondly, numerical simulation of unsteady flow around a sphere with high Reynolds number was conducted based on the improved delayed detached eddy simulation (IDDES) model and the tetrahedral mesh. The limited central difference scheme was used for the convection term, and the over relaxation correction was used for the diffusion term. The least squares method was used for the interpolation scheme. The 2nd-order backward difference scheme was used for the time term. The calculation results show that, the proposed discretization methods are stable and in good agreement with the experimental data.

**Key words:** unstructured tetrahedral mesh; limited central difference; TVD limiter; nonorthogonal correction; correction coefficient; LES

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11572350); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB-744104)

引用本文/Cite this paper:

熊英, 关晖, 吴锤结. 基于有限体积法的非结构网格大涡模拟离散方法研究[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(11): 1129-1144.

XIONG Ying, GUAN Hui, WU Chui-jie. LES discretization methods for unstructured meshes based on the finite volume method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(11): 1129-1144.