文章编号:1000-0887(2017)02-0189-11

软物质第二类二维准晶广义流体动力学*

范天佑

(北京理工大学 物理学院, 北京 100081)

(我刊编委沈亚鹏推荐)

摘要： 提出了第一类与第二类二维准晶概念.在笔者已有工作(范天佑. 软物质准晶广义流体动力学方程组[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 331-344.)的基础上,对可能的 7 次、9 次和 14 次对称软物质第二类二维准晶广义流体动力学进行了全面讨论,建立了它们的终态控制方程组,为软物质准晶学科的发展提供了一个数学模型,为探讨有关物理问题的时间-空间演化提供了可操作的实际可行的求解体系和分析工具,是对该工作的一个重要发展.

关 键 词： 软物质； 第二类二维准晶； 六维镶嵌空间； 广义流体动力学； 状态方程

中图分类号： O35；O469 **文献标志码：** A doi：10.21656/1000-0887.370198

引 言

文献[1]对已经发现的 12 次和 18 次对称软物质准晶和可能发现的 5 次、10 次和 8 次对称软物质准晶广义流体动力学进行了详细讨论,建立了相应的动力学方程组.从对称性的理论考虑, 5 次、10 次、8 次和 12 次对称的二维准晶,无论是固体的或软物质的,均属于同一类准周期对称结构, 其共同特征是：1）它们需要用 4 个独立整数标识倒格矢；2）基矢量可以看作 4-维镶嵌空间（V）向 2-维镶嵌空间（V_E）的投影；3）空间 V 是 V_E 与 V_I 的直接和,其中 V_I 为正交的补空间；4）空间 V_E 中的流体动力学自由度为声子场 $\boldsymbol{u}$,空间 V_I 中的流体动力学自由度为相位子场 $\boldsymbol{w}$.称具有这些特征的二维准晶为第一类二维准晶.相反,18 次与 7 次、9 次和 14 次对称二维准晶, 无论是固体的或者软物质的,不具有以上特征,而具有另外的特征,它们必须用 6-维镶嵌空间才能描写(详见下面介绍),属于另外同一类准周期对称结构,我们称它们为第二类二维准晶.迄今发现的固体二维准晶(无论是合金准晶或天然准晶),均属于第一类二维准晶;相反,已经发现的软物质准晶则既包含第一类二维准晶,又包含第二类二维准晶,说明软物质准晶还可能发现更多新的类别的准晶系,具有很大的发展潜力.

7 次、14 次、9 次和 18 次对称准晶与 5 次、10 次、8 次和 12 次对称准晶的对称结构不同,导致了 6-维镶嵌空间概念的诞生[2],导致了 Landau-Anderson[3]展开式的扩充[4-6]以及第二类相位子元激发(准粒子)的提出,促进了凝聚态物理的发展.目前观察到的 12 次和 18 次对称软物质准晶带给了人们许多新的物理和数学内涵,但是它们还有一点美中不足,即它们的声子元激发和相位子元激发不耦合,失去了若干精彩的特性.相反,7 次和 14 次对称软物质准晶,按照群

* 收稿日期： 2016-06-27；修订日期： 2016-12-28
基金项目： 国家自然科学基金(11272053)
作者简介： 范天佑(1939—),男,教授(E-mail：tyfan2013@163.com).

表示理论,不仅第一相位子元激发和第二相位子元激发相互耦合,而且声子元激发和相位子元激发存在强耦合,将展示许多精彩的特性.本文从对称性、本构关系、动力学和物态方程等几个层面去揭示可能的 7 次、9 次和 14 次对称软物质准晶的物理和数学特征,定量地刻画其物质分布、变形与运动,为发展软物质广义流体动力学提供一个分析基础.

1 六维镶嵌空间和第二类相位子元激发

迄今尚未在固体中发现 7 次、9 次、14 次和 18 次对称准晶以及尚未在软物质中发现的 7 次、14 次和 9 次对称的几类准晶,从对称性的角度讨论它们的结构和物理性质(包括力学性质)是很有意义的,这种讨论不仅对固体准晶有意义,同时为软物质准晶的研究提供基础.本文仅就可能的 7 次、14 次和 9 次对称软物质准晶开展讨论.这个讨论将导致"六维镶嵌空间"概念的提出,这是中国科学工作者的首创[2].

上面已经指出 7 次、14 次、9 次和 18 次对称准晶与 5 次、10 次、8 次和 12 次对称准晶在对称性上具有原则的不同.这种不同使得准晶学科中使用的平行空间 $E^3_{\parallel}$ 和垂直空间 $E^3_{\perp}$ 概念需要扩充.Hu(胡承正)等[2]提出,现在需要由平行空间 $E^2_{\parallel}$ 和两个垂直空间 $E^2_{\perp 1}$ 及 $E^2_{\perp 2}$ 构成"六维镶嵌空间",即

$$E^6 = E^2_{\parallel} \oplus E^2_{\perp 1} \oplus E^2_{\perp 2}. \tag{1}$$

不妨称 $E^2_{\perp 1}$ 为第一垂直空间,$E^2_{\perp 2}$ 为第二垂直空间.基于这一概念,著名的 Landau-Anderson 展开式

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G} \in L_{\mathrm{R}}} \rho_{\boldsymbol{G}} \exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}\} = \sum_{\boldsymbol{G} \in L_{\mathrm{R}}} |\rho_{\boldsymbol{G}}| \exp\{-\mathrm{i}\Phi_{\boldsymbol{G}} + \mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}\} \tag{2}$$

中,相位角需要扩充并且表示成

$$\Phi_n = \boldsymbol{G}_n^{\parallel}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}_n^{\perp 1}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{G}_n^{\perp 2}\cdot\boldsymbol{w}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{G}_n^{\parallel}$ 表示平行空间的倒格矢,$\boldsymbol{G}_n^{\perp 1}$ 及 $\boldsymbol{G}_n^{\perp 2}$ 分别代表第一和第二垂直空间 $E^2_{\perp 1}$ 及 $E^2_{\perp 2}$ 中的倒格矢,$\boldsymbol{u}$ 代表平行空间中的声子场,$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 分别代表两个垂直空间中的相位子场,即第一与第二相位子场.

"六维镶嵌空间"(1)和 Landau-Anderson 展开式(2)、(3)是下文讨论的出发点和基础.展开式(2)、(3)具有丰富的内涵.首先,它们是 Landau 对称性破缺和元激发(准粒子)原理的应用.这种原理的实质是对大量原子集体激发的量子力学描述,是量子化的产物.其同时抓住了从高有序相向低有序相转化时发生的对称性破缺和序参量这些关键点,这里序参量就是方程(2)中的 $\rho_{\boldsymbol{G}}$,而 $\rho_{\boldsymbol{G}}$ 与相位紧密联系.杨振宁教授[7]指出 20 世纪物理的三大主旋律为量子化、对称性和相位,在 1987 年波动量子力学创始人 Schrödinger 诞辰 100 周年纪念会的报告中[8]他再次强调了相位对物理学的重要意义,并特别强调,它是量子力学最本质之处.通过上面简单的回顾可以发现,准晶弹性和广义流体动力学充分彰显了它们与量子化、对称性和相位的紧密关联,也就是同 20 世纪物理的三大主旋律紧密关联,这对我们理解基于元激发原理的准晶弹性和广义流体动力学很有意义.

2 7 次对称软物质准晶广义流体动力学

上一节介绍了准晶的声子元激发,第一相位子和第二相位子元激发的物理基础是对称性破缺和元激发原理.软物质准晶同固体准晶的最大区别在于软物质准晶是一种固体-液体中间相物质,它是一种复杂液体或有结构的液体,导致它同时具有固体与液体两者的性质.研究其

变形、运动、结构重组和动力学性质,需要发展广义流体动力学(generalized hydrodynamics).由于这种广义流体动力学本质上不同于固体准晶的流体动力学,需要引进流体声子元激发概念,这又是源自 Landau 学派[9]的一个原理.

建立软物质准晶广义流体动力学,就是要建立声子、第一相位子、第二相位子和流体声子的运动方程,以便定量地描述它们的分布和时-空演化,涉及宏观和介观两个层次.它们的本构关系是宏观层次的,与普通连续介质力学相似,而物态方程或状态方程则属于介观层次,对软物质而言,此问题尚未很好解决.即使有了以上资料,建立声子、第一相位子、第二相位子和流体声子的运动方程,也存在一定的困难,因为这种运动方程,并不能完全由寻常的守恒定律确定,还必须包括相关的耗散定则.由于超出了守恒定律,用广义 Langevin 方程为基础去建立运动方程比较适宜,因为它考虑了耗散效应.在推导这些方程时,采用 Poisson 括号方法是一个首选,因为它既适合于微观,又适合于宏观,还适合于微观导向宏观的极限过渡,具有很大的灵活性.Poisson 括号方法还可以同 Lie 群理论相结合,使其具有更大的普遍性,因而不仅适合于讨论复杂体系的弹性和广义流体动力学,还可以用到超流、铁磁体、反铁磁体、自旋玻璃体等更复杂的体系.Poisson 括号方法同代数方法相结合,还发展了它与其他方法的联系,例如同杨振宁-Mills 方法相结合[10-11].文献[1]用广义 Langevin 方程为基础,同时,采用 Poisson 括号方法对 12 次、18 次对称软物质准晶和可能的 5 次、10 次以及 8 次对称软物质准晶的广义动力学方程组的建立作了详细论证,该数学描述对 7 次、14 次和 9 次对称软物质准晶的广义动力学方程组的建立是类似的,因而此处略去细节.

7 次对称软物质准晶,具有基本的重要性,它包含 4 种元激发,并且声子与第二相位子耦合,第一与第二相位子耦合,其变形能密度由群表示理论得出,为

$$
\begin{aligned}
&f_{\mathrm{def}}=f_{\boldsymbol{u}}+f_{\boldsymbol{v}}+f_{\boldsymbol{w}}+f_{\boldsymbol{uw}}+f_{\boldsymbol{vw}},\\
&f_{\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}L\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}+M\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\\
&f_{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{2}T_1v_{ij}v_{ij}+T_2(v_{xx}v_{yy}-v_{xy}v_{xy}),\\
&f_{\boldsymbol{w}}=\frac{1}{2}K_1w_{ij}w_{ij}+K_2(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}w_{xy}),\\
&f_{\boldsymbol{uw}}=R[(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})(w_{xx}+w_{yy})+2\varepsilon_{xy}(w_{yx}-w_{xy})],\\
&f_{\boldsymbol{vw}}=G[(v_{xx}-v_{yy})(w_{xx}-w_{yy})+(v_{yx}+v_{xy})(w_{yx}+w_{xy})],\\
&\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ v_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\ w_{ij}=\frac{\partial w_i}{\partial x_j},\\
&\boldsymbol{u}=(u_x,u_y),\ \boldsymbol{v}=(v_x,v_y),\ \boldsymbol{w}=(w_x,w_y).
\end{aligned}
$$

弹性本构关系为

$$
\begin{cases}
\sigma_{ij}=\dfrac{\partial f_{\mathrm{def}}}{\partial\varepsilon_{ij}}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}+r_{ijkl}v_{kl}+R_{ijkl}w_{kl},\\[2ex]
\tau_{ij}=\dfrac{\partial f_{\mathrm{def}}}{\partial v_{ij}}=T_{ijkl}v_{kl}+r_{klij}\varepsilon_{kl}+G_{ijkl}w_{kl},\\[2ex]
H_{ij}=\dfrac{\partial f_{\mathrm{def}}}{\partial w_{ij}}=K_{ijkl}w_{kl}+R_{klij}\varepsilon_{kl}+G_{klij}v_{kl},
\end{cases}
$$

从而得到

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=(L+2M)\varepsilon_{xx}+L\varepsilon_{yy}+R(w_{xx}+w_{yy}),\\ \sigma_{yy}=L\varepsilon_{xx}+(L+2M)\varepsilon_{yy}-R(w_{xx}+w_{yy}),\\ \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=2M\varepsilon_{xy}+R(w_{yx}-w_{xy}),\\ \tau_{xx}=T_1v_{xx}+T_2v_{yy}+G(w_{xx}-w_{yy}),\\ \tau_{yy}=T_2v_{xx}+T_1v_{yy}-G(w_{xx}-w_{yy}),\\ \tau_{xy}=T_1v_{xy}-T_2v_{yx}+G(w_{yx}+w_{xy}),\\ \tau_{yx}=-T_2v_{xy}+T_1v_{yx}+G(w_{yx}+w_{xy}),\\ H_{xx}=K_1w_{xx}+K_2w_{yy}+R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})+G(v_{xx}-v_{yy}),\\ H_{yy}=K_2w_{xx}+K_1w_{yy}+R(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})-G(v_{xx}-v_{yy}),\\ H_{xy}=K_1w_{xy}-K_2w_{yx}-2R\varepsilon_{xy}+G(v_{xy}+v_{yx}),\\ H_{yx}=K_1w_{yx}-K_2w_{xy}+2R\varepsilon_{xy}+G(v_{xy}+v_{yx}).\end{cases}\tag{4}$$

而流体本构关系为

$$\begin{cases}\sigma'_{xx}=-p+2\eta\left(\dot{\xi}_{xx}-\dfrac{1}{3}\dot{\xi}_{kk}\right),\\ \sigma'_{yy}=-p+2\eta\left(\dot{\xi}_{yy}-\dfrac{1}{3}\dot{\xi}_{kk}\right),\\ \sigma'_{xy}=\sigma'_{yx}=2\eta\dot{\xi}_{xy},\\ \dot{\xi}_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}\right).\end{cases}\tag{5}$$

采用与文献[1]相类似的步骤,从广义 Langevin 方程出发,用 Poisson 括号方法,并且在采用状态方程

$$p=f(\rho)=3\frac{k_B T}{l^3\rho_0^3}(\rho_0^2\rho+\rho_0\rho^2+\rho^3)\tag{6}$$

的条件下,得到这一准晶系的动力学方程如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0,\\ \dfrac{\partial(\rho V_x)}{\partial t}+\dfrac{\partial(V_x\rho V_x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(V_y\rho V_x)}{\partial y}=\\ \qquad -\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\nabla^2(\rho V_x)+M\nabla^2u_x+\\ \qquad (L+M-B)\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{u}-(A-B)\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial\delta\rho}{\partial x},\\ \dfrac{\partial(\rho V_y)}{\partial t}+\dfrac{\partial(V_x\rho V_y)}{\partial x}+\dfrac{\partial(V_y\rho V_y)}{\partial y}=\\ \qquad -\dfrac{\partial p}{\partial y}+\eta\nabla^2(\rho V_y)+M\nabla^2u_y+\\ \qquad (L+M-B)\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{u}-(A-B)\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial\delta\rho}{\partial y},\end{cases}\tag{7a}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y}= \\
\qquad V_x+\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{u}}\left[M\nabla^2u_x+(L+M)\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{u}+R\left(\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)\right], \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y}= \\
\qquad V_y+\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{u}}\left[M\nabla^2u_y+(L+M)\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{u}+R\left(\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}\right)\right], \\
\dfrac{\partial v_x}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{v}}[T_1\nabla^2v_x+G\nabla^2w_x], \\
\dfrac{\partial v_y}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{v}}[T_1\nabla^2v_y+G\nabla^2w_y], \\
\dfrac{\partial w_x}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial w_x}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial w_x}{\partial y}=\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{w}}\left[K_1\nabla^2w_x+R\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)+G\nabla^2v_x\right], \\
\dfrac{\partial w_y}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial w_y}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial w_y}{\partial y}=\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{w}}\left[K_1\nabla^2w_y+R\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)+G\nabla^2v_y\right], \\
p=f(\rho)=3\dfrac{k_B T}{l^3\rho_0^3}(\rho_0^2\rho+\rho_0\rho^2+\rho^3),
\end{array}\right. \tag{7b}$$

其中 $\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}V_x+\boldsymbol{j}V_y$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}u_x+\boldsymbol{j}u_y$，$L=C_{12}$，$M=(C_{11}-C_{12})/2$ 为声子弹性常数，T_1，K_1 是第一与第二相位子弹性常数，R，G 是声子-第二相位子和第一-第二耦合弹性常数，η 代表流体动力黏性系数(为了简单起见，这里只考虑 η_{ijkl} 的标量形式)，而 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{v}}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{w}}$ 为声子、第一相位子和第二相位子的耗散系数，A 和 B 是由于质量密度变化而引进的材料常数.

方程组(7)包含 10 个场变量，即声子位移场 $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y)$，第一相位子位移场 $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y)$ 和第二相位子位移场 $\boldsymbol{w}=(w_x,w_y)$，流体声子速度场 $\boldsymbol{V}=(V_x,V_y)$ 以及质量密度 ρ 和流体压力 p，方程式也是 10 个，其中第 1 个方程为质量守恒方程，第 2，3 个方程为动量守恒方程，第 4，5 个方程为声子耗散方程，第 6，7 个方程为第一相位子耗散方程，第 8，9 个方程为第二相位子耗散方程，第 10 个方程为物态方程或状态方程，此状态方程为文献[1]首次解决.方程组(7)封闭，可以求解.如果没有物态方程或状态方程，那么未知场变量的数目多于场方程的数目，此种情形下，问题在数学上不相容，无解.可见，物态方程或状态方程的提出极为关键.

3 14 次对称软物质准晶广义流体动力学

14 次对称软物质准晶也非常有趣，它包含 4 种元激发，并且声子与第一和第二相位子耦合，虽然与 7 次对称软物质准晶相近，却又不完全相同，由群表示理论得到变形能密度：

$$f_{\mathrm{def}}=f_{\boldsymbol{u}}+f_{\boldsymbol{v}}+f_{\boldsymbol{w}}+f_{\boldsymbol{uw}}+f_{\boldsymbol{vw}},$$

$$f_{\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}L\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}+M\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},$$

$$f_{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{2}T_1v_{ij}v_{ij}+T_2(v_{xx}v_{yy}-v_{xy}v_{xy}),$$

$$f_w = \frac{1}{2} K_1 w_{ij} w_{ij} + K_2 (w_{xx} w_{yy} - w_{xy} w_{xy}),$$

$$f_{uw} = R[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})(w_{xx} + w_{yy}) + 2\varepsilon_{xy}(w_{yx} - w_{xy})],$$

$$f_{vw} = G[(v_{xx} + v_{yy})(w_{xx} - w_{yy}) + (v_{yx} - v_{xy})(w_{yx} + w_{xy})].$$

其弹性本构关系由变形能密度得到,为

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (L + 2M)\varepsilon_{xx} + L\varepsilon_{yy} + R(w_{xx} + w_{yy}), \\
\sigma_{yy} &= L\varepsilon_{xx} + (L + 2M)\varepsilon_{yy} - R(w_{xx} + w_{yy}), \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 2M\varepsilon_{xy} + R(w_{yx} - w_{xy}), \\
\tau_{xx} &= T_1 v_{xx} + T_2 v_{yy} + G(w_{xx} - w_{yy}), \\
\tau_{yy} &= T_2 v_{xx} + T_1 v_{yy} - G(w_{xx} - w_{yy}), \\
\tau_{xy} &= T_1 v_{xy} - T_2 v_{yx} + G(w_{yx} + w_{xy}), \\
\tau_{yx} &= - T_2 v_{xy} + T_1 v_{yx} + G(w_{yx} + w_{xy}), \\
H_{xx} &= K_1 w_{xx} + K_2 w_{yy} + R(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) + G(v_{xx} + v_{yy}), \\
H_{yy} &= K_2 w_{xx} + K_1 w_{yy} + R(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) - G(v_{xx} + v_{yy}), \\
H_{xy} &= K_1 w_{xy} - K_2 w_{yx} - 2R\varepsilon_{xy} + G(v_{yx} - v_{xy}), \\
H_{yx} &= K_1 w_{yx} - K_2 w_{xy} + 2R\varepsilon_{xy} + G(v_{yx} - v_{xy}),
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

加上流体本构关系

$$\sigma'_{xx} = - p + 2\eta\left(\dot{\xi}_{xx} - \frac{1}{3}\dot{\xi}_{kk}\right),$$

$$\sigma'_{yy} = - p + 2\eta\left(\dot{\xi}_{yy} - \frac{1}{3}\dot{\xi}_{kk}\right),$$

$$\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = 2\eta\dot{\xi}_{xy},$$

经过与上一节相类似的推导,可以得到 14 次对称软物质准晶的广义动力学方程组如下:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}) = 0, \\
&\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial(V_x \rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \rho V_x)}{\partial y} = \\
&\qquad - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2(\rho V_x) + M \nabla^2 u_x + \\
&\qquad (L + M - B)\frac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{u} - (A - B)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}, \\
&\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} + \frac{\partial(V_x \rho V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \rho V_y)}{\partial y} = \\
&\qquad - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2(\rho V_y) + M \nabla^2 u_y + \\
&\qquad (L + M - B)\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{u} - (A - B)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\partial y},
\end{aligned}\right. \tag{9a}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_x}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \\
\qquad V_x + \boldsymbol{\Gamma_u}\left[M\nabla^2 u_x + (L+M)\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{u} + R\left(\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)\right], \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = \\
\qquad V_y + \boldsymbol{\Gamma_u}\left[M\nabla^2 u_y + (L+M)\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{u} + R\left(\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}\right)\right],
\end{cases}
\tag{9b}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \boldsymbol{\Gamma_v}\left[T_1\nabla^2 v_x + G\left(\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right) - 2G\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x\partial y}\right], \\
\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \boldsymbol{\Gamma_v}\left[T_1\nabla^2 v_y + 2G\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial y} + G\left(\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}\right)\right], \\
\dfrac{\partial w_x}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial w_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial w_x}{\partial y} = \\
\qquad \boldsymbol{\Gamma_w}\left[K_1\nabla^2 w_x + R\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) + G\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + 2G\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}\right], \\
\dfrac{\partial w_y}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial w_y}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial w_y}{\partial y} = \\
\qquad \boldsymbol{\Gamma_w}\left[K_1\nabla^2 w_y + R\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) - 2G\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y} - G\left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)\right], \\
p = f(\rho) = 3\dfrac{k_B T}{l^3\rho_0^3}(\rho_0^2\rho + \rho_0\rho^2 + \rho^3),
\end{cases}
\tag{9c}
$$

其中 $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$,$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}V_x + \boldsymbol{j}V_y$,$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}u_x + \boldsymbol{j}u_y$,$L = C_{12}$,$M = (C_{11} - C_{12})/2$ 为声子弹性常数,T_1,K_1 是第一与第二相位子弹性常数,R,G 是声子-第二相位子和第一-第二耦合弹性常数,$\boldsymbol{\eta}$ 代表流体动力粘性系数(为了简单起见,这里只考虑 $\boldsymbol{\eta}_{ijkl}$ 的标量形式),而 $\boldsymbol{\Gamma_u}$,$\boldsymbol{\Gamma_v}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma_w}$ 为声子、第一相位子和第二相位子的耗散系数,A 和 B 是由于质量密度变化而引进的材料常数.

方程组(9)包含 10 个场变量,即声子位移场 $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$,第一相位子位移场 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ 和第二相位子位移场 $\boldsymbol{w} = (w_x, w_y)$,流体声子速度场 $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$ 以及质量密度 $\boldsymbol{\rho}$ 和流体压力 p, 方程式也是 10 个,其中第 1 个方程为质量守恒方程,第 2,3 个方程为动量守恒方程, 第 4,5 个方程为声子耗散方程, 第 6,7 个方程为第一相位子耗散方程, 第 8,9 个方程为第二相位子耗散方程,第 10 个方程为物态方程或状态方程,文献[1]首次解决了这里的物态方程或状态方程.方程组(9)封闭,可以求解.如果没有物态方程或状态方程,那么未知场变量的数目多于场方程的数目,此种情形下,问题在数学上不相容,无解.可见, 物态方程或状态方程的提出极为关键.

这个方程组与方程组(7)非常接近,仅仅在第 7~9 个方程有所不同.

4 9 次对称软物质准晶广义流体动力学

9 次对称软物质准晶与 7 次和 14 次对称软物质准晶不同,它和 18 次对称准晶更相近.它

包含 4 种元激发,并且声子与相位子不耦合,而第一和第二相位子耦合.由群表示理论有变形能密度为

$$
\begin{aligned}
&f_{\text{def}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = f_{\text{def}}(\varepsilon_{ij},v_{ij},w_{ij}) = f_{\boldsymbol{u}} + f_{\boldsymbol{v}} + f_{\boldsymbol{w}} + f_{\boldsymbol{vw}},\\
&f_{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}L(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2 + M\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\\
&f_{\boldsymbol{v}} = T_1[(v_{11}+v_{22})^2 + (v_{21}-v_{12})^2] + T_2[(v_{11}-v_{22})^2 + (v_{21}+v_{12})^2],\\
&f_{\boldsymbol{w}} = K_1[(w_{11}+w_{22})^2 + (w_{21}-w_{12})^2] + K_2[(w_{11}-w_{22})^2 + (w_{21}+w_{12})^2],\\
&f_{\boldsymbol{vw}} = G[(v_{11}-v_{22})(w_{11}+w_{22}) + (v_{21}+v_{12})(w_{21}-w_{12})],\\
&\qquad\qquad x = x_1,\ y = x_2,\ i = 1,2,\ j = 1,2,
\end{aligned}
$$

可以得到弹性本构关系为

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sigma_{xx} = (L+2M)\varepsilon_{xx} + L\varepsilon_{yy},\\
&\sigma_{yy} = L\varepsilon_{xx} + (L+2M)\varepsilon_{yy},\\
&\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2M\varepsilon_{xy},\\
&\tau_{xx} = T_1 v_{xx} + T_2 v_{yy} + G(w_{xx} - w_{yy}),\\
&\tau_{yy} = T_2 v_{xx} + T_1 v_{yy} - G(w_{xx} - w_{yy}),\\
&\tau_{xy} = T_1 v_{xy} - T_2 v_{yx} + G(w_{yx} + w_{xy}),\\
&\tau_{yx} = -T_2 v_{xy} + T_1 v_{yx} + G(w_{yx} + w_{xy}),\\
&H_{xx} = K_1 w_{xx} + K_2 w_{yy} + G(v_{xx} - v_{yy}),\\
&H_{yy} = K_2 w_{xx} + K_1 w_{yy} - G(v_{xx} - v_{yy}),\\
&H_{xy} = K_1 w_{xy} - K_2 w_{yx} + G(v_{xy} + v_{yx}),\\
&H_{yx} = K_1 w_{yx} - K_2 w_{xy} + G(v_{xy} + v_{yx}).
\end{aligned}
\right.
\tag{10}
$$

由上述本构关系,从广义 Langevin 方程出发,用 Poisson 括号方法,可以得到 9 次对称软物质准晶广义动力学方程组如下:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}) = 0,\\
&\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial(V_x\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y\rho V_x)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\nabla^2(\rho V_x) +\\
&\qquad \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{V} + M\nabla^2 u_x + (L+M-B)\frac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{u} - (A-B)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\partial x},\\
&\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} + \frac{\partial(V_x\rho V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y\rho V_y)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\nabla^2(\rho V_y) +\\
&\qquad \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{V} + M\nabla^2 u_y + (L+M-B)\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{u} - (A-B)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\partial y},\\
&\frac{\partial u_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = V_x + \Gamma_{\boldsymbol{u}}\left[M\nabla^2 u_x + (L+M)\frac{\partial}{\partial x}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right],\\
&\frac{\partial u_y}{\partial t} + V_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial u_y}{\partial y} = V_y + \Gamma_{\boldsymbol{u}}\left[M\nabla^2 u_y + (L+M)\frac{\partial}{\partial y}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right],
\end{aligned}
\right.
\tag{11a}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \Gamma_v \left[T_1 \nabla^2 v_x + G\left(\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - 2G \dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial y} \right], \\
\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \Gamma_v \left[T_1 \nabla^2 v_y + 2G \dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} + G\left(\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) \right], \\
\dfrac{\partial w_x}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial w_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial w_x}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_x + G\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + 2G \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right], \\
\dfrac{\partial w_y}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial w_y}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial w_y}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_y - 2G \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + G\left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \right], \\
p = f(\rho) = 3 \dfrac{k_B T}{l^3 \rho_0^3} (\rho_0^2 \rho + \rho_0 \rho^2 + \rho^3),
\end{cases} \tag{11b}
$$

其中 $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}V_x + \boldsymbol{j}V_y$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}u_x + \boldsymbol{j}u_y$, $L = C_{12}$, $M = (C_{11} - C_{12})/2$ 为声子弹性常数,T_1, K_1 是第一与第二相位子弹性常数,R,G 是声子-第二相位子和第一-第二耦合弹性常数,η 代表流体动力粘性系数(为了简单起见,这里只考虑 η_{ijkl} 的标量形式),而 Γ_u,Γ_v 和 Γ_w 为声子、第一相位子和第二相位子的耗散系数,A 和 B 是由于质量密度变化而引进的材料常数.

方程组(11)包含 10 个场变量,即声子位移场 $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$,第一相位子位移场 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ 和第二相位子位移场 $\boldsymbol{w} = (w_x, w_y)$,流体声子速度场 $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$ 以及质量密度 ρ 和流体压力 p, 方程式也是 10 个,其中第 1 个方程为质量守恒方程,第 2,3 个方程为动量守恒方程, 第 4,5 个方程为声子耗散方程, 第 6,7 个方程为第一相位子耗散方程, 第 8,9 个方程为第二相位子耗散方程,第 10 个方程为物态方程或状态方程,物态方程为文献[1]首次解决.方程组(11)封闭,可以求解.如果没有物态方程或状态方程,那么未知场变量的数目多于场方程的数目,此种情形下,问题在数学上不相容,无解.可见, 物态方程或状态方程的提出极为关键.

方程组(11)与文献[1]中得到的 18 次对称软物质准晶的广义动力学方程很接近,唯一的不同仅仅在第一相位子与第二相位子的耦合弹性能密度有所差别,因而终态控制方程有少许不同.

5 结论与讨论

本文讨论了软物质第二类二维准晶中的 7 次、14 次和 9 次准晶和它们的广义流体动力学方程组,就内容来说,它们是文献[1]讨论的扩充,但是 7 次和 14 次对称准晶比文献[1]讨论的 18 次对称软物质准晶的意义更大,因为 7 次和 14 次对称准晶的声子与相位子存在强耦合,能够揭示更深刻的物理本质.9 次软物质准晶与 18 次对称软物质准晶由于对称性很接近,因而其动力学方程的数学结构很接近.

由于文献[1]和本文的工作,软物质第一类和第二类二维准晶全部都被讨论了.由于迄今发现的软物质准晶都是二维准晶,从这种意义上讲,全部已经发现的和可能发现的软物质准晶都被文献[1]和本文从对称性理论和广义流体动力学理论角度上描写了.

总起来看,动力学方程组(7),(9)和(11)和文献[1]得到的动力学方程组在数学上虽然有差别,但是存在很大的一致性,其数学求解步骤和方法很接近,我们可以借鉴求解软物质第一类二维准晶广义流体动力学方程组的方法来求解现在的新方程组和新的边值和初值问题,

这些具体计算和结果,将在随后的文章中报导.

致谢　作者感谢中南大学李显方教授的大力帮助.

参考文献(References):

[1] 范天佑. 软物质准晶广义流体动力学方程组[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 331-344.(FAN Tian-you. Equation systems of generalized hydrodynamics for soft-matter quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 331-344.(in Chinese))

[2] HU Cheng-zheng, DING Di-hua, YANG Wen-ge, et al. Possible two-dimensional quasicrystals structures with a six-dimensional embedding space[J]. *Phys Rev B*, 1994, **49**(14): 9423-9427.

[3] Anderson P W. *Basic Notations of Condensed Matter Physics*[M]. Menlo Park: Benjamin-Cummings, 1984.

[4] DING Di-hua, YANG Wen-ge, HU Cheng-zheng, et al. Generalized elasticity theory of quasicrystals[J]. *Phys Rev B*, 1993, **48**(10): 7003-7010.

[5] Fan T Y. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2016.

[6] 范天佑. 固体与软物质准晶数学弹性与相关理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2014.(FAN Tian-you. *Mathematical Theory of Elasticity and Relevant Topics of Solid and Soft-matter Quasicrystals and Its Applications*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2014.(in Chinese))

[7] 杨振宁. 序[M]//李华钟. 量子几何相位概论. 北京: 科学出版社, 2013.(YANG Chen-ning. Preface[M]//LI Hua-zong. *Introduction to Quantum Geometry Phase*. Beijing: Science Press, 2013.(in Chinese))

[8] Yang C N. Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger[C]//Kilmister C W, ed. *Schrödinger Century Celebration of a Polymath*, *1987*. New York: Cambridge University Press, 2012: 53-84.

[9] Landau L D, Lifshitz E M. *Statistical Physics*[M]. Part 2, Oxford: Pergamon Press, 1980.

[10] Dzyaloshinskii I E, Volovick G E. On the concept of local invariance in the theory of spin glasses[J]. *Journal de Physique*, 1978, **39**(6): 693-700.

[11] Volovick G E, Dzyaloshinskiĭ I E . Additional localized degrees of freedom in spin glasses[J]. *Zh Eksp Teor Fiz*, 1978, **75**(7): 1102-1109.

Generalized Hydrodynamics for Second 2D Soft-Matter Quasicrystals

FAN Tian-you
(*School of Physics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *P.R.China*)
(Recommended by SHEN Ya-peng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The concept on the first and second kinds of 2D quasicrystals was put forward, and through extension of ref. [1], the generalized hydrodynamics for possible soft-matter quasicrystals with 7-, 9- and 14-fold symmetries was suggested based on the Langevin equation and with the derivation method of the Poisson bracket. The derivation referred to the previous work of the author. The soft-matter quasicrystals observed so far were 2D ones. From this point of view, all the soft-matter quasicrystals both discovered and possibly discovered were considered in ref. [1] and the present work from the angle of symmetry and generalized hydrodynamics, where the equation of state as a key, was built by ref. [1]. Final governing equations (7), (9) and (11) were similar to those given in ref. [1], and the solution was also similar, so that the way of solution for the first kind of 2D soft-matter quasicrystals is beneficial to the second kind.

Key words: soft matter; second 2D quasicrystal; 6D embedding space; generalized hydrodynamics; equation of state

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11272053)

引用本文/Cite this paper:

范天佑. 软物质第二类二维准晶广义流体动力学[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(2): 189-199.

FAN Tian-you. Generalized hydrodynamics for second 2D soft-matter quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(2): 189-199.