

# 结构动力响应中急动度的计算\*

李岩汀, 徐绩青, 许锡宾, 蒲彦茹

(1. 重庆交通大学 河海学院, 重庆 400074;  
2. 国家内河航道整治工程技术研究中心(重庆交通大学);  
重庆交通大学 水利水运工程教育部重点实验室, 重庆 400074)

**摘要:** 急动度(jerk)在工程实践中具有重要的意义.将径向基函数逼近与配点法相结合,发展了一种能够有效求解动力响应的数值算法.该方法使用径向基函数插值来逼近真实的运动规律,能够用于急动度和急动度(三阶)方程的计算,弥补了传统的数值方法无法计算急动度的不足.并针对微分方程的特点,提出了改进的多变量联合插值函数,同时添加与微分方程同阶的初值条件,可显著减小数值震荡.算例表明,该方法具有计算过程简单、精度高的特点,同时对急动度方程也有很好的适用性.

**关键词:** 急动度; 径向基函数; 结构动力响应; 初值问题; 急动度方程

**中图分类号:** O324; O29      **文献标志码:** A      doi: 10.21656/1000-0887.370181

## 引言

急动度定义为加速度对时间的变化率,其相应的动力学量为力对时间的变化率.目前,国内外学者对急动度的研究还比较少,但也不难从中发现其重要的理论意义和应用价值.谈开孚等<sup>[1]</sup>以凸轮-从动杆系统分析了急动度的工程意义,提出过大的急动度相当于脉冲性的循环荷载,材料会发生“疲劳”破坏,且绝对值很大的负急动度会造成脱离接触的现象.梅凤翔等<sup>[2]</sup>给出了完整系统关于广义速度的 Lagrange 方程,这是一个描写变加速运动的三阶微分方程.黄沛天等<sup>[3]</sup>认为急动度也应成为一种新的高层建筑抗风、抗地震设计依据.Chase 等<sup>[4]</sup>提出了一种基于急动度的结构动力响应控制和损伤控制方法.杨学山等<sup>[5]</sup>设计出了一种性能良好的急动度测量传感器.何浩祥等<sup>[6]</sup>建立了地震动下急动度反应谱的求解方法,研究发现急动度对中短周期的结构作用明显,适当提高延性将有助于降低急动度造成的冲击.急动度在现代技术的众多领域中有很多应用,如高动态飞行器的跟踪测量、结构抗震新机理研究、高速机械加工的自动控制、高速列车和电梯舒适度的测量、通信设备的抗震性能检测、结构损伤定位与控制<sup>[7-9]</sup>等.因此提出一种能有效计算急动度的算法是非常必要的.

目前求解结构动力响应的方法主要有振型叠加法、直接积分法以及变二阶微分方程为一阶微分方程组的方法等.振型叠加法仅针对线性体系,且只采用前若干阶振型.直接积分法对

\* 收稿日期: 2016-06-06; 修订日期: 2017-03-01

基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目(KJ100417)

作者简介: 李岩汀(1993—),女,硕士生(E-mail: lijoan@outlook.com);

徐绩青(1974—),男,副教授(通讯作者. E-mail: plappk@sina.com).

线性系统和非线性系统均适用,如差分法、线性加速度法、改进的线性加速度法,这些方法均基于以下两点假设:①将连续的时间过程离散为有限个点,只要求运动微分方程在这些离散的时间点上满足,求得的结果是位移、速度、加速度在这些时间点上的值;②在时间间隔内假定位移、速度、加速度满足某种简单的关系,这种方法计算效率高,但存在难以控制的算法阻尼,计算精度较低,且由于理论上的基本假设,无法用于求解急动度。Runge-Kutta法是一类降阶的方法,精度令人满意,但出于数值稳定性的考虑,被设计成自身耗散的,即存在算法阻尼<sup>[10]</sup>。精细积分法<sup>[11]</sup>为动力响应的求解开辟了新的方向,但在求解非齐次方程时,也必须要对时间间隔内荷载的变化规律做出某种假设,此时其计算精度取决于非齐次项的拟合精度(例如,地震作用下)。

## 1 径向基函数逼近方法

径向基函数<sup>[12-13]</sup>(radial basis function, RBF)是一类以距离为变量的基函数集合。基本插值形式如下:

$$y(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|r - r_i\|), \quad (1)$$

其中,  $y(r)$  是插值函数;  $n$  是插值所用的径向基函数总数目,当节点的影响范围为整个求解区域时,  $n$  等于节点数目;  $\varphi(\|r - r_i\|)$  是径向基函数的一般形式,  $r_i$  为某一插值节点,  $r$  为求解区域内任意一点;  $\|r - r_i\|$  (通常取 2 范数) 是任意点到  $i$  节点的距离;  $\alpha_i$  为与第  $i$  节点对应的权重系数。由此可见,不论空间维数,径向基函数本质上均为一元(距离)函数,简单的形式为存储和计算带来了诸多方便。另一个重要的优点是径向基函数逼近能力非常强,几乎可以逼近所有的函数<sup>[12]</sup>。

径向基函数按照作用范围可分为全局支撑和局部紧支撑两类。全局支撑径向基函数,在计算过程中经常会产生病态稠密矩阵,限制了它们在大型结构计算中的应用。近年来提出的正定紧支撑径向基函数<sup>[14-16]</sup>(compactly supported RBF, CS-RBF),可以使系数矩阵具有带状稀疏的特点,这类函数适用于处理大规模计算。

将 RBF 和配点法结合起来求解微分方程具有很多优点,如无网格、形式简单、不需要数值积分、计算效率高等。但是从目前国内应用径向基函数求解微分方程的范围来看,几乎都是为了求解边值问题,主要原因在于径向基函数将空间距离作为自变量。笔者已经提出用“时间间隔”来替代“空间距离”作为径向基函数的自变量<sup>[17]</sup>,将“动力问题”转化为“静力问题”,基于这种思想就可以用于初值问题的求解。

以单自由度动力系统(2)为例来说明本文所构造的数值求解方法:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t), \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $m, c, k$  分别表示质量、阻尼和刚度;  $p(t)$  为外荷载,在地震作用下等于  $-m\ddot{u}_g(t)$ ;  $\ddot{u}_g(t)$  为地震产生的地面加速度(牵连加速度),通常被记录为时间间隔 0.02 s 的一系列离散数据。

将所求解时间区域  $\Omega$  用  $n$  个节点  $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$  离散,函数  $u(t)$  在区域  $\Omega$  里的近似函数  $u^h(t)$  可由一组以各节点  $t_i$  为中心的径向基函数  $\varphi(\|t - t_i\|)$  的线性组合表示为

$$u^h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|t - t_i\|) = \Phi^T(t) \alpha. \quad (3)$$

由于传统配点法存在较大的数值振荡,针对动力系统(2)的求解目标为  $u$  的二阶导数,提

出位移、速度联合插值的径向基函数表达式:

$$u^h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|t - t_i\|) + \beta_1 \frac{d\varphi(\|t - t_1\|)}{dt}. \quad (4)$$

式(4)中,增加了初始时刻径向基函数的一阶导数的线性组合.根据笔者的实际计算经验<sup>[18]</sup>,在式(4)的基础上添加二阶导数项,同时添加二阶导数的初始条件进行约束,可大大减小数值振荡,这个初始条件有明确的物理意义(初始时刻的加速度)和数学意义(使二阶导数满足初始时刻的微分方程),则

$$u^h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|t - t_i\|) + \beta_1 \frac{d\varphi(\|t - t_1\|)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2\varphi(\|t - t_1\|)}{dt^2}. \quad (5)$$

可以发现,式(5)要求插值基函数具有高阶连续性,由于对 CS-RBF 进行高阶求导会造成系数矩阵的病态,当微分方程的阶数较高时更加明显.因此,最终提出用辅助函数来代替高阶导数项

$$u^h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|t - t_i\|) + \beta_1 \frac{d\varphi(\|t - t_1\|)}{dt} + \beta_2 \xi(\|t - t_1\|) = \Phi^T(t)\alpha, \quad (6)$$

式(6)中,  $\beta_1, \beta_2$  为附加系数;  $\xi(\|t - t_1\|)$  为辅助函数,可取为其他紧支撑径向基函数.

将各时间节点  $t_i (i = 1, 2, \dots, n, 1, 1)$  代入插值函数(6),则可以得到有  $n + 2$  个方程的线性方程组

$$A\alpha = u, \quad (7)$$

其中

$$A =$$

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|t_1 - t_1\|) & \varphi(\|t_1 - t_2\|) & \cdots & \varphi(\|t_1 - t_n\|) & \frac{d\varphi(\|t_1 - t_1\|)}{dt} & \xi(\|t_1 - t_1\|) \\ \varphi(\|t_2 - t_1\|) & \varphi(\|t_2 - t_2\|) & \cdots & \varphi(\|t_2 - t_n\|) & \frac{d\varphi(\|t_2 - t_1\|)}{dt} & \xi(\|t_2 - t_1\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(\|t_n - t_1\|) & \varphi(\|t_n - t_2\|) & \cdots & \varphi(\|t_n - t_n\|) & \frac{d\varphi(\|t_n - t_1\|)}{dt} & \xi(\|t_n - t_1\|) \\ \frac{d\varphi(\|t_1 - t_1\|)}{dt} & \frac{d\varphi(\|t_1 - t_2\|)}{dt} & \cdots & \frac{d\varphi(\|t_1 - t_n\|)}{dt} & \frac{d^2\varphi(\|t_1 - t_1\|)}{dt^2} & \frac{d\xi(\|t_1 - t_1\|)}{dt} \\ \frac{d^2\varphi(\|t_1 - t_1\|)}{dt^2} & \frac{d^2\varphi(\|t_1 - t_2\|)}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2\varphi(\|t_1 - t_n\|)}{dt^2} & \frac{d^3\varphi(\|t_1 - t_1\|)}{dt^3} & \frac{d^2\xi(\|t_1 - t_1\|)}{dt^2} \end{bmatrix};$$

$u = [u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2]^T$ ,  $v_1, v_2$  为附加未知量,在此分别代表初始时刻的速度和加速度.

由式(7)解出系数矩阵  $\alpha = A^{-1}u$ , 并将其代入式(6)得

$$u^h(t) = \Phi^T(t)A^{-1}u = N(t)u, \quad (8)$$

令  $N(t) = \Phi^T(t)A^{-1}$ . 定义:  $A$  为动力特征矩阵;  $N(t)$  为时间特征函数,类似于有限元中的形函数.由于  $u^h(t)$  是解析表达式,故可对其求各阶导数得

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = N'(t)u; \\ \ddot{u}(t) = N''(t)u. \end{cases} \quad (9)$$

注 式(9)中对  $N$  求导时,仅取前  $n$  行,矩阵  $N$  的第  $n + 1$  和  $n + 2$  行为之后引入初始速度条件和初始加速度条件而设置.

将式(8)、(9)代入动力系统(2)中,并代入对应时刻的外荷载 $p(t)$ ,整理得

$$(m\mathbf{N}'' + c\mathbf{N}' + k\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{p}. \quad (10)$$

根据速度和加速度的初始条件有

$$\{\varphi'(\|t_1 - t_1\|), \varphi'(\|t_1 - t_2\|), \dots, \varphi'(\|t_1 - t_n\|), \\ \varphi''(\|t_1 - t_1\|), \xi'(\|t_1 - t_1\|)\} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}(0); \quad (11a)$$

$$\{\varphi''(\|t_1 - t_1\|), \varphi''(\|t_1 - t_2\|), \dots, \varphi''(\|t_1 - t_n\|), \\ \varphi'''(\|t_1 - t_1\|), \xi''(\|t_1 - t_1\|)\} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}(0). \quad (11b)$$

式(11b)中,  $\ddot{\mathbf{u}}(0)$ 可由式(2)代入初始位移和初始速度得到;若为多自由度系统,初始位移和初始速度已知,初始加速度可由解线性方程组求得;若为地震荷载,则初始加速度等于 $\ddot{\mathbf{u}}_g(0)$ .

联合式(10)、(11),组成 $n + 2$ 维线性方程组,式(11a)和(11b)分别为初始速度和初始加速度的约束条件,二阶微分方程即被离散为代数方程组.并代入初始位移的约束条件(可用有限元中的划零置一法),求解此方程组即得 $\mathbf{u}$ ,将 $\mathbf{u}$ 回代到式(9)分别求得各个时刻的速度和加速度.

一般情况下,位移和荷载的变化总是连续的,在实际工程应用中认为位移的三阶导数和荷载的一阶导数总是存在的,对式(2)求导得

$$m\ddot{\mathbf{u}} + c\dot{\mathbf{u}} + k\mathbf{u} = -m\ddot{\mathbf{u}}_g(t),$$

整理得

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\text{abs}} = \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}_g = -m^{-1}(c\dot{\mathbf{u}} + k\mathbf{u}), \quad (12)$$

式(12)中, $\ddot{\mathbf{u}}_{\text{abs}}$ 表示绝对急动度, $\ddot{\mathbf{u}}$ 表示相对急动度; $\ddot{\mathbf{u}}_g$ 为牵连急动度.

由上述步骤可知,径向基函数逼近的方法在求解方程(2)时,根据物理力学方程,先使用径向基函数插值来逼近真实的运动规律,然后在这个逼近真实的运动规律基础上对位移求得速度和加速度,因此速度和加速度的解也趋近于真实的运动,基于此可以用式(12)来计算急动度.而传统方法,如Newmark- $\beta$ 法、Wilson- $\theta$ 法等,计算的基础是预先将加速度的变化规律假定为简单的线性变化,这种假设并不一定符合真实的运动,因此不能再用该方法所求得的速度和加速度来计算急动度.

## 2 算例分析

### 2.1 两自由度振动体系

两自由度振动体系<sup>[19]</sup>动力方程如式(13)所示

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} f(t), \quad (13)$$

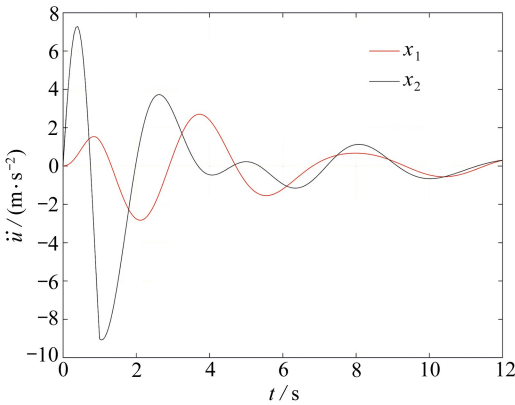
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 \leq t \leq 1.0, \\ 0, & 0. \end{cases} \quad (14)$$

取时间步长为0.01 s和0.05 s,分别应用精细积分法(PTSIM)、Newmark- $\beta$ 法(NM,取 $\beta = 0.25$ )、Wilson- $\theta$ 法(WN,取 $\theta = 1.4$ )以及本文方法(RBF-A)进行求解.用本文方法计算时,采用式(6)作为插值函数,同时径向基函数采用文献[12]中函数 $\varphi(r) = (1-r)^5(1+5r+9r^2+5r^3+r^4)$ 和辅助函数 $\xi(r) = (1-r)^6(6+36r+82r^2+72r^3+30r^4+5r^5)$ .将式(14)代入式(13)解得初始加速度为 $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ .表1给出了部分计算结果和相对误差.图1给出了时间间隔取0.05 s时加速度和急动度的求解结果.结果表明该方法的计算精度是令人满意的.

表 1 两自由度体系的位移反应

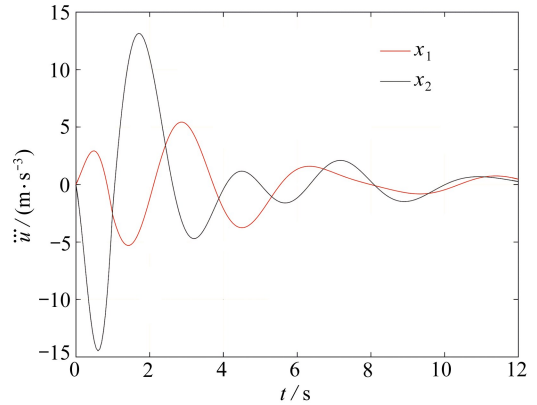
Table 1 Displacement responses of the 2-DOF system

method	$\Delta t / s$	displ.	time $t / s$					maximum error $e / \%$
			0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
exact solution		$x_1$	0.000 470	0.007 885	0.039 505	0.116 976	0.253 439	-
		$x_2$	0.039 548	0.282 357	0.800 647	1.489 892	2.106 276	-
RBF-A	0.01	$x_1$	0.000 471	0.007 886	0.039 506	0.116 975	0.253 437	0.178 5
		$x_2$	0.039 550	0.282 361	0.800 653	1.489 897	2.106 277	0.003 9
	0.05	$x_1$	0.000 471	0.007 880	0.039 486	0.116 936	0.253 377	0.279 6
		$x_2$	0.039 449	0.282 177	0.800 423	1.489 658	2.106 026	0.252 2
PTSIM	0.01	$x_1$	0.000 426	0.007 532	0.038 434	0.114 916	0.250 571	9.410 2
		$x_2$	0.036 916	0.274 260	0.788 794	1.479 749	2.104 527	6.657 1
NM	0.01	$x_1$	0.000 472	0.007 895	0.039 519	0.116 978	0.253 399	0.532 2
		$x_2$	0.039 585	0.282 367	0.800 541	1.489 569	2.105 679	0.091 7
	0.05	$x_1$	0.000 534	0.008 129	0.039 893	0.117 224	0.253 072	13.775 0
		$x_2$	0.404 560	0.282 682	0.798 644	1.484 640	2.098 377	2.295 0
WN	0.01	$x_1$	0.000 474	0.007 900	0.039 524	0.116 972	0.253 371	0.958 0
		$x_2$	0.039 529	0.282 260	0.800 396	1.489 419	2.105 508	0.049 0
	0.05	$x_1$	0.000 559	0.008 237	0.040 017	0.117 148	0.252 528	19.033 2
		$x_2$	0.039 146	0.280 235	0.795 776	1.482 518	2.098 249	1.017 0



(a) 加速度

(a) Acceleration



(b) 急动度

(b) Jerk

图 1 时间间隔为 0.05 s 时本文方法求得的加速度和急动度

Fig. 1 The results of acceleration and jerk with the present method for  $\Delta t = 0.05$  s

## 2.2 地震荷载作用下的七自由度结构

七自由度结构<sup>[20]</sup>的动力方程如下:

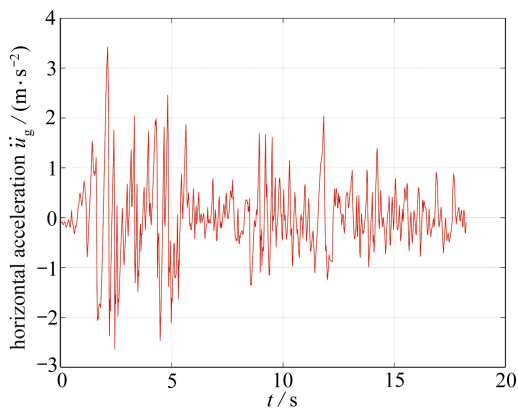
$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t), \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (15)$$

其质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵分别为

$$\mathbf{M} = \text{diag}[153 \quad 170 \quad 170 \quad 170 \quad 170 \quad 170 \quad 183],$$

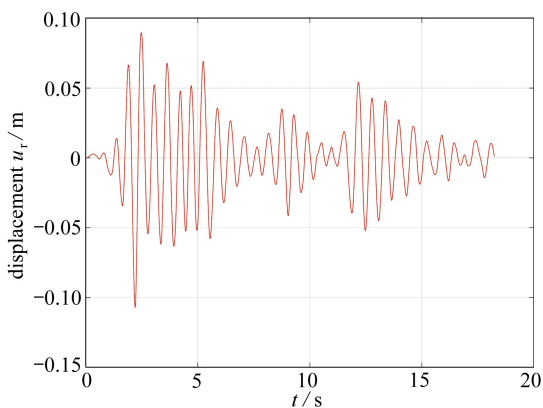
$$C = \begin{bmatrix} 3\,510 & -5\,780 & 1\,830 & 425 & 121 & 29.6 & 8.74 \\ -5\,780 & 13\,500 & -8\,950 & 1\,090 & 215 & 69.4 & 16.5 \\ 1\,830 & -8\,950 & 14\,500 & -8\,740 & 1\,160 & 231 & 78.5 \\ 425 & 1\,090 & -8\,740 & 14\,600 & -8\,720 & 1\,170 & 251 \\ 121 & 215 & 1\,160 & -8\,720 & 14\,600 & -8\,710 & 1\,230 \\ 29.6 & 69.4 & 231 & 1\,170 & -8\,710 & 14\,600 & -8\,430 \\ 8.74 & 16.5 & 78.5 & 251 & 1\,230 & -8\,430 & 13\,900 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^4 \times \begin{bmatrix} 204 & -350 & 111 & 25.7 & 7.3 & 1.79 & 0.529 \\ -350 & 808 & -542 & 66.2 & 13 & 4.2 & 1 \\ 111 & -542 & 870 & -529 & 70.3 & 14 & 4.75 \\ 25.7 & 66.2 & -529 & 874 & -528 & 70.7 & 15.2 \\ 7.3 & 13 & 70.3 & -528 & 875 & -527 & 74.6 \\ 1.79 & 4.2 & 14 & 70.7 & -527 & 876 & -510 \\ 0.529 & 1 & 4.75 & 15.2 & 74.6 & -510 & 833 \end{bmatrix}.$$



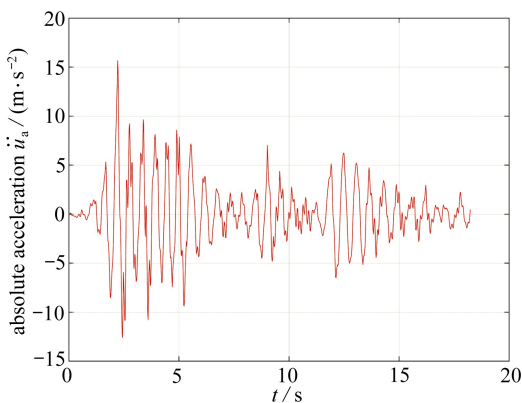
(a) 水平加速度

(a) The horizontal acceleration



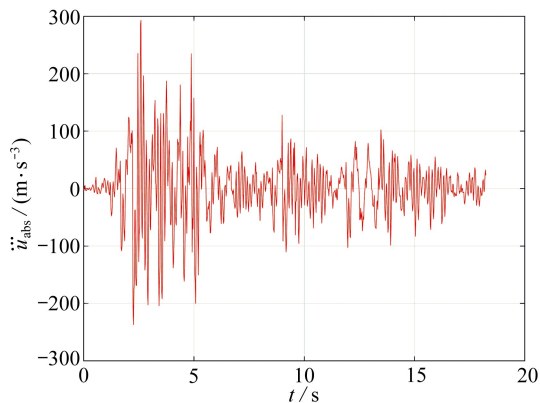
(b) 相对位移

(b) The relative displacement



(c) 绝对加速度

(c) The absolute acceleration



(d) 绝对急动度

(d) The absolute jerk

图2 地震荷载及部分计算结果

Fig. 2 The seismic load and some of the calculation results

结构受如图 2(a)所示水平加速度的地震荷载,计算历时取  $t = 18.24$  s, 时间间隔  $\Delta t = 0.02$  s.应用本文方法进行求解,式(6)作为插值函数,  $\varphi(r)$  和  $\xi(r)$  采用与 2.1 小节相同的形式,同时添加二阶导数的初始条件  $\ddot{u}(0) = -\ddot{u}_g(0) = -0.014 \text{ m/s}^2$ .图 2(b)~(d)给出了第一个自由度的部分计算结果.本文方法能够便捷地应用于复杂荷载作用下的动力响应分析和急动度计算,如地震、风等复杂荷载,无需拟合荷载变化.

### 2.3 表征非线性振动的三阶微分方程

Gottlieb<sup>[21]</sup>给出了一类急动度(三阶)方程:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\gamma \dot{x} - \alpha \dot{x}^3 - \beta x^2 \dot{x} + \delta x \ddot{x} - \varepsilon \dot{x} \ddot{x}^2, \\ x(0) = a, \dot{x}(0) = b, \ddot{x}(0) = c. \end{cases} \quad (16)$$

本算例中考虑  $\alpha = \beta = 1, \delta = \gamma = \varepsilon = 0, a = c = 0, b = 0.5$  的情况,则有

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dot{x}^3 - x^2 \dot{x}, \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.5, \ddot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

数学领域的一些学者们致力于研究该方程的近似解析解,他们都把四阶精细 Runge-Kutta 法并取 0.001 的步长求得的数值解奉为“精确解”<sup>[21-23]</sup>.

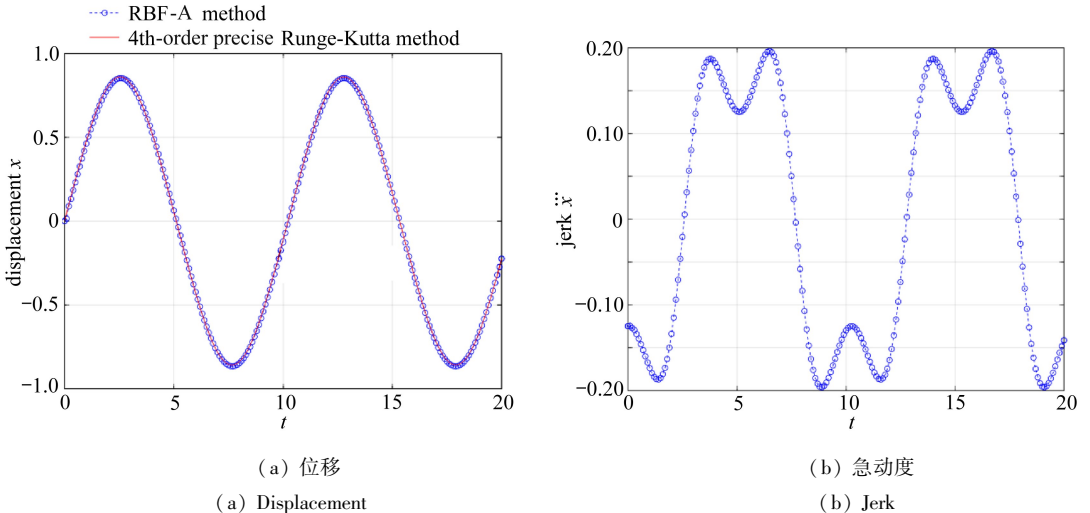


图 3 本文方法取  $\Delta t = 0.1$  和四阶精细 Runge-Kutta 法取步长 0.001 的计算结果比较及本文方法计算的急动度

Fig. 3 The comparison of the displacement results with the RBF-A method for  $\Delta t = 0.1$  and the 4th-order precise Runge-Kutta method for  $\Delta t = 0.001$ , and the jerk results with the present method

针对该算例,可以类似地提出位移、速度、加速度、急动度联合插值表达式:

$$\begin{aligned} x^h(t) = & \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\|t - t_i\|) + \beta_1 \frac{d\varphi(\|t - t_1\|)}{d(t)} + \\ & \beta_2 \xi(\|t - t_1\|) + \beta_3 \frac{d\xi(\|t - t_1\|)}{d(t)}, \end{aligned} \quad (18)$$

同时在已有约束条件的基础上,添加三阶导数的初始条件  $\ddot{x}(0) = -0.5^3$ .则方程(16)被离散为一组非线性代数方程组,由于采用迭代算法,因此可十分便捷地代入约束条件,只需用约束条件取代对应时刻的非线性方程即可.用本文方法,取计算时间段为 20,时间间隔为 0.1,  $\varphi(t)$  和  $\xi(t)$  采用与算例 1 相同的形式,求得解的周期为 10.242 2,与四阶精细 Runge-Kutta 法求得的 10.210 8 相差 0.308%,其他计算结果如图 3 所示.结果表明该方法对高阶微分方程也具有很好

的适用性。

### 3 结 论

本文将径向基函数与配点法相结合,构造了一种能够有效求解动力响应和急动度的数值方法.此外本文方法还具有以下优点:

1) 根据物理力学方程,使用径向基函数插值来逼近真实的运动规律,能够有效求解结构的急动度,突破了传统的步进式直接积分方法由于理论上的假设缺陷而造成的求解困难。

2) 基于配点法,无需数值积分,计算效率高.与步进式直接积分法不同,本文方法是在计算时间段内对结构运动进行整体求解,没有递推格式,不存在误差累积和算法阻尼。

3) 提出并改进了各阶导数联合插值的表达式,添加与微分方程同阶导数的初值条件进行约束是必要的,能够大大减小数值振荡。

本文所构造的数值算法适用范围广,针对不同的微分方程,可灵活构造相应的插值函数,对线性、非线性以及高阶微分方程都能够达到不错的求解效果,完全可以发展成为一种急动度计算的通用方法。

#### 参考文献(References):

- [1] 谈开孚,赵永凯,郭小弟.谈加加速度[J].力学与实践,1988,10(5):46-51.(TAN Kai-fu, ZHAO Yong-kai, GUO Xiao-di. Study on jerk[J]. *Mechanics in Engineering*, 1988, 10(5): 46-51.(in Chinese))
- [2] 梅凤翔,刘瑞,罗勇.高等分析力学[M].北京:北京理工大学出版社,1991:251.(MEI Feng-xiang, LIU Rui, LUO Yong. *Advanced Analytical Mechanics*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991: 251.(in Chinese))
- [3] 黄沛天,黄文,胡利云.关于变加速动力学及其应用[J].力学与实践,2004,26(1):67-68.(HUANG Pei-tian, HUANG Wen, HU Li-yun. On non-uniformly accelerating dynamics and its application[J]. *Mechanics in Engineering*, 2004, 26(1): 67-68.(in Chinese))
- [4] Chase J G, Barroso L R, Hunt S. Quadratic jerk regulation and the seismic control of civil structures[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2003, 32(13): 2047-2062.
- [5] 杨学山,齐霄斋,李兆治,等.基于测量加速度微分量的传感器[J].震动与冲击,2008,27(12):143-147.(YANG Xue-shan, QI Xiao-zhai, Lee G C, et al. Sensor for measuring the derivative of acceleration component[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(12): 143-147.(in Chinese))
- [6] 何浩祥,闫维明,陈彦江.地震动加加速度反应谱的概念及特性研究[J].工程力学,2011,28(11):124-129.(HE Hao-xiang, YAN Wei-ming, CHEN Yan-jiang. Study on concept and characteristics of seismic jerk response spectra[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(11): 124-129.(in Chinese))
- [7] AN Yong-hui, Hongki J, Jr Spencer B F, et al. A damage localization method based on the 'jerk energy' [J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, 23(2): 025020. doi: 10.1088/0964-1726/23/2/025020.
- [8] Bertero R D, Bertero V V. Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, 31(3): 627-652.
- [9] HE Zheng, XU Yi-chao. Correlation between global damage and local damage of RC frame



- structures under strong earthquakes[J]. *Structural Control and Healthy Monitoring*, 2017, **24**(3): e1877. doi: 10.1002/stc.1877.
- [10] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **32**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **32**(2): 131-136.(in Chinese))
- [11] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.(HU Hai-yan. *Applied Nonlinear Transient Dynamical*[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000.(in Chinese))
- [12] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解[J]. 工程数学学报, 2002, **19**(2): 1-12.(WU Zong-min. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, **19**(2): 1-12.(in Chinese))
- [13] 陈文, 傅卓佳, 魏星. 科学与工程计算中的径向基函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2014. (CHEN Wen, FU Zhuo-jia, WEI Xing. *The Radial Basis Function Methods in Science and Engineering Mathematics*[M]. Beijing: Science Press, 2014.(in Chinese))
- [14] WU Zong-min. Compactly supported positive definite radial functions[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 1995, **4**(1): 283-292.
- [15] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported Radial functions of minimal degree[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 1995, **4**(1): 389-396.
- [16] Buhmann M D. Radial functions on compact support[J]. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1998, **41**(1): 33-46.
- [17] 徐绩青, 李正良, 吴林键. 基于径向基函数逼近的结构动力响应计算方法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(5): 533-541. (XU Ji-qing, LI Zheng-liang, WU Lin-jian. A calculation method for structural dynamic responses based on the approximation theory of radial basis function[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 533-541.(in Chinese))
- [18] 李岩汀, 许锡宾, 周世良, 等. 基于径向基函数逼近的非线性动力系统数值求解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(3): 311-318. (LI Yan-ting, XU Xi-bin, ZHOU Shi-liang, et al. A numerical approximation method for nonlinear dynamic systems based on radial basis functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(3): 311-318.(in Chinese))
- [19] 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的更新精细积分方法[J]. 力学学报, 2004, **36**(2): 191-195. (WANG Meng-fu, ZHOU Xi-yuan. Renewal precise time step integration method of structural dynamic analysis[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(2): 191-195.(in Chinese))
- [20] 张继峰, 邓子辰, 张凯. 结构动力方程求解的改进精细 Runge-Kutta 方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(4): 378-385. (ZHANG Ji-feng, DENG Zi-chen, ZHANG Kai. An improved precise Runge-Kutta method for structural dynamic equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(4): 378-385.(in Chinese))
- [21] Gottlieb H P W. Harmonic balance approach to periodic solutions of nonlinear jerk equations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **271**(3/5): 671-683.
- [22] Wu B S, Lim C W, Sun W P. Improved harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations[J]. *Physics Letters A*, 2006, **354**(1/2): 95-100.
- [23] Ramos J I. Analytical and approximate solutions to autonomous, nonlinear, third-order ordinary differential equations[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, **11**(3): 1613-1626.

# A Numerical Method for Calculation of Structural Jerk Responses

LI Yan-ting, XU Ji-qing, XU Xi-bin, PU Yan-ru

(1. *School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China;*

2. *National Engineering Research Center for Inland Waterway Regulation (Chongqing Jiaotong University); Key Laboratory of Hydraulic & Waterway Engineering of the Ministry of Education, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China)*

**Abstract:** Jerk is of great significance in engineering practice. A numerical method for solving jerk responses was constructed through combination of the radial basis function (RBF) approximation and the collocation method. The proposed method was used to calculate the jerk and the 3rd-order jerk equations, and the RBF interpolation was adopted to approximate the real motion rule, which made good the defect that the traditional methods can't be used to calculate the jerk. Aimed at the numerical characteristics of the dynamic differential equations, an improved RBF expression of multivariable joint interpolation combining the all-order derivatives of the variable was presented. The initial-value condition of the same order with the differential equation was added to obviously decrease the numerical oscillation. The results of the numerical examples indicate that the proposed method has the advantages of a simple calculation process, high accuracy and high applicability to jerk equations.

**Key words:** jerk; radial basis function; structural dynamic response; initial-value problem; jerk equation

---

引用本文/Cite this paper:

李岩汀, 徐绩青, 许锡宾, 蒲彦茹. 结构动力响应中急动度的计算[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(8): 922-931.

LI Yan-ting, XU Ji-qing, XU Xi-bin, PU Yan-ru. A numerical method for calculation of structural jerk responses[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(8): 922-931.