

# 无网格介点法:一种具有 $h$ - $p$ - $d$ 适应性的无网格法\*

杨建军<sup>1</sup>, 郑健龙<sup>2</sup>

(1. 长沙理工大学 道路结构与材料交通行业重点实验室, 长沙 410114;  
2. 长沙理工大学 交通运输工程学院, 长沙 410114)

**摘要:** 提出了一种新型无网格法,即无网格介点(MIP)法.MIP法采用移动最小二乘核近似,有利于提高数值方法的计算稳定性,而且算法更为简便.MIP法采用局部介点近似技术,使得这种方法不仅具有一般的  $h$  适应性,而且具有  $p$ - $d$  适应性,从而使方法在数值实施上更具有灵活性.数值算例结果表明,MIP法具有计算简单,效率高,精度高的优点,而且显示出对多种求解问题具有广泛适用的特性.

**关键词:** 无网格法; 介点原理;  $h$ - $p$ - $d$  适应性; 移动最小二乘核近似; 局部介点近似

**中图分类号:** O241; O343 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370159

## 引 言

无网格法是一种基于散点信息求解偏微分方程问题的数值方法.相比于有限元法、差分法等传统的基于网格求解的数值方法,无网格法可减少、甚至完全免除对网格的依赖.该方法的近似函数通过节点构造,节点单元的增减更为自由灵活,其数值求解在自适应分析、大变形、结构破坏等问题中体现出独特的优越性<sup>[1]</sup>.无网格法的起源可追溯到 20 世纪 70 年代<sup>[2]</sup>,早期研究较为活跃的方法有广义有限差分法(GFDM)<sup>[3-5]</sup>和光滑粒子流体动力学(SPH)法<sup>[6-7]</sup>.无网格法作为一类独立的数值方法研究分支,直到 20 世纪末的最后几年才真正开始被关注,Belytschko 等于 1996 年发表的一篇关于无网格法研究的综述<sup>[8]</sup>,引起了计算力学界的普遍关注,并直接引发了一轮无网格法研究的热潮.

当代无网格法的研究以弱式方法的兴起为主要特征,其中以扩散单元法(DEM)<sup>[9]</sup>、无网格 Galerkin(伽辽金)(EFG)法<sup>[10]</sup>和无网格局部 Petrov(彼得洛夫)-Galerkin(MLPG)法<sup>[11]</sup>最具代表性.弱式无网格法采用积分运算,降低了对近似函数的求导运算阶数,可避免高阶导数近似误差,从而有效提高了数值方法的求解精度和稳定性.然而弱式方法也有其自身的局限性,比如以 EFG 法为代表的全局弱式方法,需要依赖背景网格,这不仅丧失了无网格特征的纯粹

\* 收稿日期: 2016-05-23; 修订日期: 2016-06-10

基金项目: 国家自然科学基金(51478053)

作者简介: 杨建军(1975—),男,讲师,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: yangjianjun01@126.com);

郑健龙(1954—),男,教授,博士,博士生导师,工程院院士.

性,也增加了其数值实施的复杂性.以 MLPG 法为代表的局部弱式法,不需要背景网格,这体现了弱式方法的一大进步.然而局部弱式法需要在局部域及其与全局域相交的边界上执行积分运算,这不仅计算量大,在数值实施上较为复杂,而且难以处理具有不规则边界的问题<sup>[12]</sup>.

基于配点技术的强式无网格法具有数值实施简单,计算高效,易于处理不规则边界问题等优点.然而强式方法的精确性和稳定性在一些特殊问题中有时难以保证,其计算“普适性”一直是需要解决的问题.新近的研究结果表明,合理应用介点,可提高无网格法的收敛性<sup>[1]</sup>.基于该介点原理的阐述,本文将提出一种具有  $h$ - $p$ - $d$  适应性的无网格法,即无网格介点法,并将通过一些数值验证,检验其计算效果及求解适应性.

## 1 移动最小二乘核近似 (MLSc)

移动最小二乘近似 (MLS) 法被广泛应用于构造无网格近似函数<sup>[9-10]</sup>.然而,进一步研究表明,MLS 法具有潜在的不稳定性,一种简单而有效的改进方法就是用核基函数  $p(x - x_*)$  代替普通基函数  $p(x)$ .为了与传统的 MLS 法相区别,这种使用核基函数的 MLS 近似被称为 MLS 核近似 (MLSc)<sup>[13]</sup>.由多项式核基函数  $p(x - x_*)$  重构的 MLSc 近似函数  $\tilde{u}(\xi) \equiv \tilde{u}(x - x_*)$  将具有更为纯粹的局部近似特性,如图 1 所示.

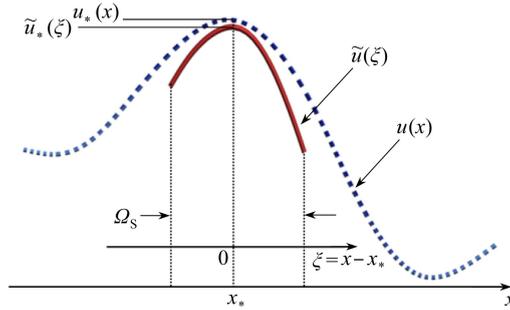


图 1 移动最小二乘核近似 (MLSc) 图示

Fig. 1 Schematic of the moving least squares core approximation (MLSc)

MLSc 中用完备多项式表示的近似公式写为

$$u_*(x) \approx \tilde{u}_*(x - x_*) = \mathbf{p}_*^T(x - x_*) \mathbf{a}(x - x_*), \quad \forall x \in \Omega_s(x_*), \quad (1)$$

式中,  $x_*$  表示目标点或计算点,  $u_*(x) \equiv u(x_*)$  为目标场函数,  $\tilde{u}_*(x - x_*)$  为近似函数,  $\mathbf{p}_*^T(x - x_*)$  为多项式核基函数向量,  $\mathbf{a}(x - x_*)$  为系数向量. MLSc 基于散点集  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^N$  ( $\forall \mathbf{x}_j \in \Omega_s(x_*)$ ) 构造如下离散加权  $L_2$  范数:

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) [\mathbf{p}_j^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) - \hat{u}_j]^2, \quad (2)$$

式中,  $\hat{u}_j \equiv u_j(\mathbf{x})$ ,  $w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$  为权函数, 可以选用的权函数有多种形式, 本文中选用 Gauss 型权函数, 即

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \exp\left(-\left(\alpha \cdot \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|}{r_s}\right)^2\right),$$

其中,  $r_s$  为局部域  $\Omega_s$  的半径尺度,  $\alpha$  为形状参数, 本文对其取值为  $\alpha = 2.5$ . 对式 (2) 定义的范数求其最小值, 即令  $\partial F / \partial \mathbf{a} = \mathbf{0}$ , 则可解得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \hat{\mathbf{u}}, \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \\ \bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{p}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{p}_j^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = [\bar{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)]_{j=1}^N, \quad \bar{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{p}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \quad (5)$$

式中  $[\cdot]_{j=1}^N$  表示按脚标符号  $J$  从 1 到  $N$  顺序排列的行矩阵, 并有  $\hat{\mathbf{u}}^\top = [\hat{u}_j]_{j=1}^N$ .

将式(3)代入式(1), 则得到 MLSc 的近似函数公式, 写为

$$\tilde{u}_*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{p}_*^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j, \quad (6)$$

其中,  $\phi_j(\mathbf{x})$  即为 MLSc 形函数, 并定义为

$$\phi_j(\mathbf{x}) \equiv \phi_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{p}_*^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) [\bar{\mathbf{A}}_j^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \bar{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)], \quad (7)$$

其一阶导数  $\phi_{j,i}$  和二阶导数  $\phi_{j,ii}$  分别写为

$$\begin{cases} \phi_{j,i}(\mathbf{x}) \\ \phi_{j,ii}(\mathbf{x}) \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{p}_{*,i}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \\ \mathbf{p}_{*,ii}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \end{cases} [\bar{\mathbf{A}}_j^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \bar{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)], \quad (8)$$

更一般的形式,  $\phi_j(\mathbf{x})$  的  $d$  阶导数写为

$$\phi_j^{(d)}(\mathbf{x}) = [\mathbf{p}_*^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)]^{(d)} [\bar{\mathbf{A}}_j^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \bar{\mathbf{B}}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)], \quad (9)$$

由式(8)和(9)可看出, 在该导数计算公式中, 系数函数  $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$  不必参与导数运算. 这种处理不仅使算法更为简洁, 而且更适用于本文的方法.

## 2 局部介点近似技术

无网格介点法的核心策略就是使用了一种“局部介点近似技术”, 如图 2 所示. 对计算节点  $\mathbf{x}_l$ , 根据周边场节点信息严格定义其局部域  $\Omega_l^l$ . 数值实施中, 局部介点云(图 2(b)中“+”表示的点集)采用标准模板的方式通过局部坐标平移、尺度缩放和全局边界裁剪的方式布设在局部域  $\Omega_l^l$  上. 局部介点云模板通过合理设计, 在满足文献[13]给出的“第二几何条件”基础上可实现效率与精确性的平衡. 此外, 局部介点云的疏密设置是相对自由的, 其对应于 MLSc 的核基函数  $p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$  次数可更为灵活地选用, 即赋予其具有  $p$  适应性, 对一般 2 阶偏微分方程问题, 建议局部域  $\Omega_l^l$  上近似采用 3 次核基函数  $p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ .

局部介点近似中, 计算节点  $\mathbf{x}_l$  的场变量通过其局部域  $\Omega_l^l$  上的介点执行近似, 即

$$\tilde{u}_l(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{N_p} \phi_p(\mathbf{x}) \hat{u}_p, \quad \text{on } \Omega_l^l, \quad (10)$$

而任意一介点  $\mathbf{x}_p$  的场变量通过其覆盖域  $\Omega_c^p$  上的场节点集  $\{\mathbf{x}_j\}$  执行近似, 即

$$\hat{u}_p \approx \tilde{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_j} \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j, \quad \text{on } \Omega_c^p. \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 则有

$$\tilde{u}_l(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_j} \phi_p(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j, \quad (12)$$

对于一般的低阶导数近似, 其  $d$  阶导数近似公式写为

$$\tilde{u}_l^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_j} \phi_p^{(d)}(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j. \quad (13)$$

由式(12)的构造特点, 对于高阶导数问题或一些特殊问题, 还可以建立其导数分配机制, 即将导数运算分别作用于局部域  $\Omega_l^l$  上的近似函数和覆盖域  $\Omega_c^p$  上的近似函数. 本文将这种导数运算较为自由地分配在不同近似空间的计算规则定义为“ $d$  适应性”, 其  $d$  阶导数近似公式更一般的形式应改写为

$$\tilde{u}_l^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_j} \phi_p^{(d-\alpha)}(\mathbf{x}) \phi_j^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \hat{u}_j, \quad \alpha \leq d/2. \quad (14)$$

可见,计算节点  $\mathbf{x}_l$  的场变量的近似是在其支撑域  $\Omega_s^l$  上分两步完成,如图 2(b) 所示,而支撑域  $\Omega_s^l$  是各介点  $\mathbf{x}_p$  对应的覆盖域  $\Omega_c^p$  的并集,即  $\Omega_s^l = \cup_{N_p} \Omega_c^p$ .

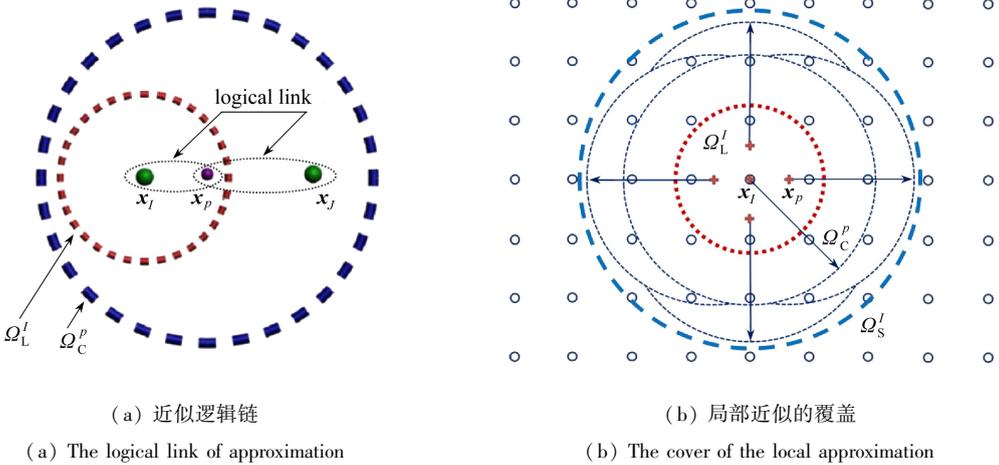


图 2 局部介点近似

Fig. 2 The local intervention-point approximation

此外,需提及的是,Breitkopf 等提出双网格扩散配点 (DGDC) 法<sup>[14]</sup>时,采用了“两步近似”技术,这与前述的局部介点近似技术有一定相似性.这两种近似技术主要体现为两点区别: 1) 局部介点近似中介点是局部而临时设置的,而两步近似中其“赋值点”是全局而固定设置的; 2) 局部介点近似中有严格的局部域设定,而两步近似中并没有严格的局部域概念.相比于两步近似,局部介点近似采用合理设计的介点云模板和严格的局部域尺度设定,一方面更有利于保证其近似精确性和稳定性,另一方面可以赋予数值方法具有  $p$ - $d$  适应性,使数值方法更具灵活性和适用性,此外,近似计算中不需要全局搜索邻近的介点,从而有利于提高计算效率.

### 3 无网格介点 (MIP) 法

无网格介点法 (meshless intervention-point method, MIP method) 正是基于上述 MLSc 近似法和局部介点近似技术而实现.为了进一步阐述其数值实施过程,考虑一般 2D 弹性体静力学问题,在问题域  $\Omega$  上的平衡方程为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (15)$$

给定边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_t, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_u, \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $\Gamma_t$  为应力边界,  $\Gamma_u$  为位移边界,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$  为应力向量,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  为已知的体力向量,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  为位移向量,  $\mathbf{n}$  为边界的外法向向量,  $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  为给定的外力向量,  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  为给定的位移约束向量,  $\mathbf{L}$  为微分算子, 并有

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T.$$

对应于本问题, MIP 法的数值离散如图 3 所示, 可见, 局部介点近似技术仅用于问题域内和应力边界上的导数近似问题, 而位移边界上无需采用这种特别的近似技术. 用  $\mathbf{D}$  表示材料常数矩阵,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$  表示应变向量, 将本构方程  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  和应变-位移方程  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , 以及式 (12) 代入式 (15) 左边, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{L}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \\ \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{x}) \\ u_y(\mathbf{x}) \end{bmatrix} &\approx \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \phi_p(\mathbf{x}) \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_{xJ} \\ \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \phi_p(\mathbf{x}) \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_{yJ} \end{bmatrix} = \\ \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \underbrace{\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \phi_p(\mathbf{x})}_{\mathbf{A}_p} \phi_J(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \hat{u}_{xJ} \\ \hat{u}_{yJ} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

由上式可发现, 微分算子  $\mathbf{L}$  两次作用于局部域  $\Omega_L^l$  上,  $\mathbf{A}_p$  矩阵中将产生 2 阶导数运算. 而在覆盖域  $\Omega_C^p$  上, 不会执行导数运算, 故可将该离散形式称为“L2C0”型,  $\mathbf{L}$  表示局部域  $\Omega_L^l$ , 紧随其后的数字表示该域上的导数运算阶数,  $\mathbf{C}$  表示覆盖域  $\Omega_C^p$ , 紧随其后的数字亦表示该域上的导数运算阶数. 由式 (14) 定义的  $d$  适应性, 还可给出式 (17) 的对应的“L1C1”型离散形式, 即

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{x}) \\ u_y(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \underbrace{\mathbf{L}^T \phi_p(\mathbf{x})}_{\mathbf{B}_p^T} \mathbf{D} \underbrace{\mathbf{L} \phi_J(\mathbf{x})}_{\mathbf{B}_J} \begin{bmatrix} \hat{u}_{xJ} \\ \hat{u}_{yJ} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

同理, 式 (16) 中的应力边界方程等号左边可推导出:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \underbrace{\mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{L} \phi_p(\mathbf{x})}_{\mathbf{B}_p} \phi_J(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \hat{u}_{xJ} \\ \hat{u}_{yJ} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

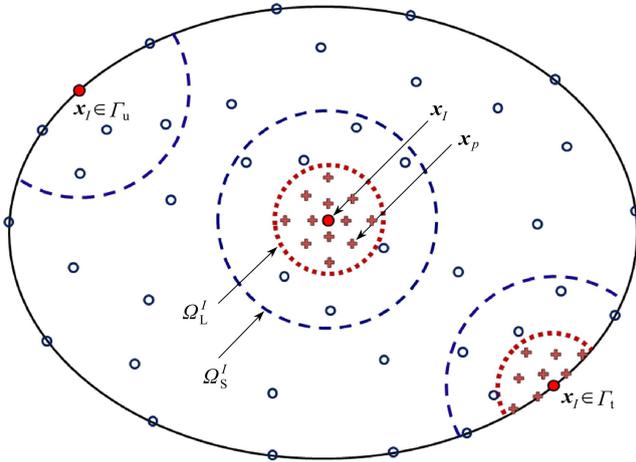


图 3 MIP 法图示

Fig. 3 Schematic of the MIP method

对于此问题, MIP 法的求解系统方程写为

$$\mathbf{K}_{[2n \times 2n]} \cdot \mathbf{U}_{[2n \times 1]} = \mathbf{F}_{[2n \times 1]}, \quad (20)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为系统刚度矩阵,  $\mathbf{U}$  为待求位移矩阵,  $\mathbf{F}$  为荷载矩阵, 脚标表示对应矩阵的维度, 其中,  $n$  表示离散域的场节点数量. 据式 (17) ~ (19), 可给出按场节点逐行组装的离散系统方程:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{A}_p \phi_j(\mathbf{x}), & \text{L2C0, } \mathbf{x}_I \in \Omega, \\ \text{or } \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j, & \text{L1C1, } \mathbf{x}_I \in \Omega, \\ \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{n}_I \mathbf{D} \mathbf{B}_p \phi_j(\mathbf{x}), & \mathbf{x}_I \in \Gamma_1, \\ \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{I}_j, & \mathbf{x}_I \in \Gamma_u, \end{cases} \quad (21a)$$

$$\mathbf{F}_I = \begin{cases} [b_x(\mathbf{x}) \quad b_y(\mathbf{x})]^T, & \mathbf{x}_I \in \Omega, \\ [\bar{t}_x(\mathbf{x}) \quad \bar{t}_y(\mathbf{x})]^T, & \mathbf{x}_I \in \Gamma_1, \\ [\bar{u}_x(\mathbf{x}) \quad \bar{u}_y(\mathbf{x})]^T, & \mathbf{x}_I \in \Gamma_u, \end{cases} \quad (21b)$$

式中

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \phi_p(\mathbf{x}) = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_p(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_p(\mathbf{x})}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_p(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_p(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_p(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_p(\mathbf{x})}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{L} \phi_p(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial \phi_p(\mathbf{x}) / \partial x & 0 & \partial \phi_p(\mathbf{x}) / \partial y \\ 0 & \partial \phi_p(\mathbf{x}) / \partial y & \partial \phi_p(\mathbf{x}) / \partial x \end{bmatrix}^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{L} \phi_j(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial \phi_j(\mathbf{x}) / \partial x & 0 & \partial \phi_j(\mathbf{x}) / \partial y \\ 0 & \partial \phi_j(\mathbf{x}) / \partial y & \partial \phi_j(\mathbf{x}) / \partial x \end{bmatrix}^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{I}_j = \begin{bmatrix} \phi_j(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_j(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_I = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}_I, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中,  $E, \nu$  分别为弹性模量和 Poisson(泊松)比.从以上 MIP 法离散系统方程的推演可以看出,其离散方程很容易从原始平衡方程得到,整体求解系统方程的组装简单而直接,程序结构非常简洁,在实际应用和数值实施中很容易实现.

## 4 数值算例

### 4.1 悬臂梁问题

先考虑一经典的悬臂梁算例,如图 4(a)所示.该问题存在如下解析解<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[ (6L-3x)x + (2+\nu) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right], \\ u_y = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L-x)x^2 \right], \\ \begin{cases} \sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I}, \\ \sigma_y = 0, \\ \tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right), \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

式中  $I$  为截面惯性矩, 并有  $I = D^3/12$ , 计算参数取值为

$$D = 2, L = 12, P = 6, E = 10^4, \nu = 1/3.$$

问题域采用  $9 \times 25$  个规则布点方案, 共 225 个节点, 如图 4(b) 所示.

图 5 给出了数值解与精确解的比较计算结果, 其中图 5(a) 为竖向位移解, 图 5(b) 为  $x$  方向的应力解. 图中不仅给出 MIP 法的 L2C0 和 L1C1 两种计算格式的比较, 同时也给出了一般配点方法的求解结果<sup>[16]</sup>. 由计算结果可以看出, 在稀疏的规则场节点离散条件下, 本文方法的两种计算格式均能给出较为精确的数值求解结果, 而且计算精度明显高于直接配点法.

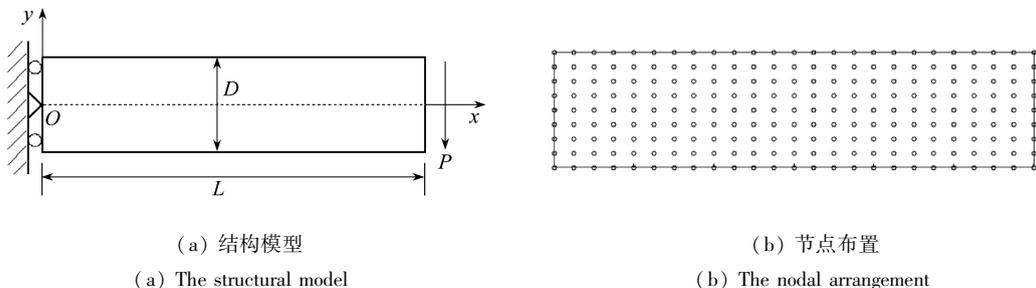


图 4 悬臂梁结构

Fig. 4 The model of a cantilever beam

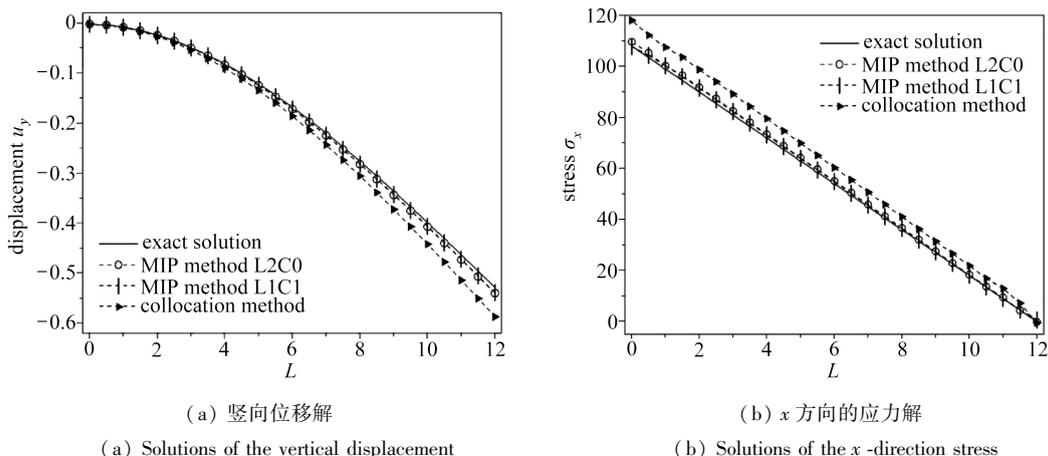


图 5 悬臂梁问题数值解的比较

Fig. 5 Comparison of the numerical solutions to the cantilever beam problem

## 4.2 带圆孔的无限板问题

考虑一带圆孔的无限大板, 在  $x$  方向受集度为  $q$  的均布拉伸荷载. 该问题存在如下解析解<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} u_r = \frac{q}{4\eta} \left[ r \left( \frac{\kappa - 1}{2} + \cos(2\theta) \right) + \frac{a^2}{r} [1 + (1 + \kappa) \cos(2\theta)] - \frac{a^4}{r^3} \cos(2\theta) \right], \\ u_\theta = \frac{q}{4\eta} \left[ (1 - \kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right] \sin(2\theta), \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \sigma_x(x, y) = q \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right], \\ \sigma_y(x, y) = -q \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right], \\ \tau_{xy}(x, y) = -q \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right], \end{cases} \quad (28)$$

式中  $\eta = \frac{E}{2(1+\nu)}, \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ .

利用该问题的结构对称特性,取有限结构的 1/4 进行求解,结构参数及场节点离散方案如图 6(a) 所示.本文计算参数取为:  $q = 1.0, a = 1, b = 5, E = 10^3, \nu = 0.3$ .图 6(b) 给出板中应力  $\sigma_x$  的数值求解结果和分布形态.

图 7 给出了应力的数值解与精确解的比较计算结果,从图 7(a) 的计算结果可以看出, MIP 法的两种计算格式求解精度要明显高于普通配点法.为了便于分析数值解的求解误差,特给出本文采用的误差函数

$$e(\xi) = (1/N) \sqrt{\sum_{I=1}^N (\xi_{\text{num}} - \xi_{\text{exa}})_I^2 / \sum_{I=1}^N (\xi_{\text{exa}})_I^2}, \quad (29)$$

式中,角标  $I$  表示分析路径上的场节点序列号,  $N$  表示分析路径上的场节点数量,  $\xi_{\text{num}}$  表示数值解,  $\xi_{\text{exa}}$  表示精确解.平均场节点间距用式  $h = \sqrt{A_{\text{area}}} / (\sqrt{n_{\text{node}}} - 1)$  确定,其中  $A_{\text{area}}$  表示求解域的面积,  $n_{\text{node}}$  表示场节点数量.图 7(b) 给出了数值法的求解误差比较,并据此分析其收敛性.从图中可以看出, MIP 法的收敛率线总是位于直接配点法的下面,说明 MIP 法相比于普通配点法具有更高的求解精度和更好的收敛性.计算结果初步表明, MIP 法的两种求解格式中, L2C0 求解格式的计算精度和收敛性通常要优于 L1C1 求解格式.

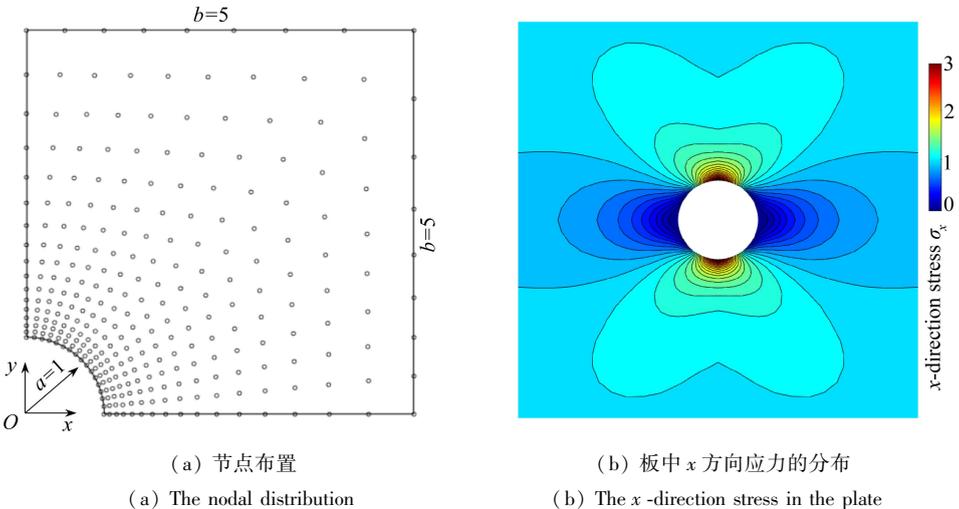
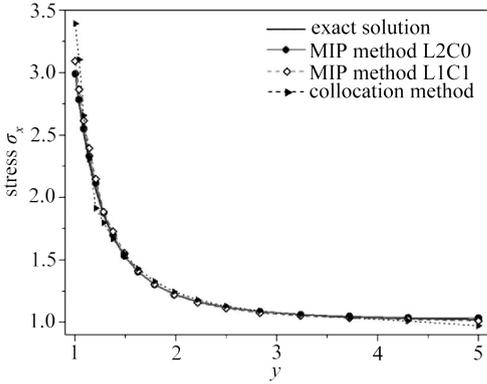


图 6 带圆孔无限板问题的离散模型和求解结果

Fig. 6 The discrete model and numerical results for the problem of an infinite plate with a hole

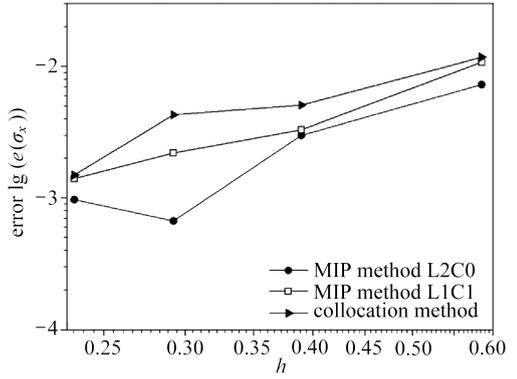
### 4.3 轴对称薄板问题

考虑一周边简支圆板,圆板上表面施加集度为  $q$ , 指向  $z$  轴负方向的轴向均布荷载,如图 8(a) 所示.该问题具有轴对称性,可以简化为平面问题求解分析,即求解域的离散只需选取一个对称面即可,如图中给出的任意轴对称面  $S$ , 该求解域的节点离散如图 8(b) 所示.



(a) 应力解的比较

(a) Comparison of the numerical solutions

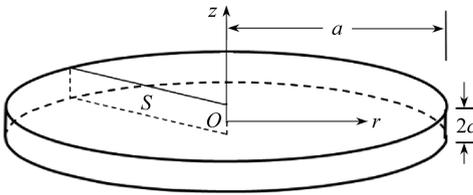


(b) 求解误差和收敛性

(b) Comparison of the errors and convergence

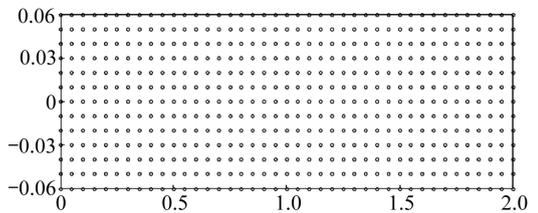
图7 带孔无限板问题的数值解比较

Fig. 7 Comparison of the numerical solutions to the problem of an infinite plate with a hole



(a) 结构模型

(a) The structural model



(b) 轴对称面节点离散

(b) Nodal arrangements of the axisymmetric area

图8 轴对称薄板问题的结构模型和离散方案

Fig. 8 The structural model and discretization for the problem of an axisymmetric plate

此处,需特别说明,轴对称问题的控制方程为<sup>[17-19]</sup>

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + b_r = 0, \\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + b_z = 0. \end{cases} \quad (30)$$

可见上式不同于式(15),因此,其对应的 MIP 法离散方程也不同于式(21),但很容易通过式(30)推导出,此处不予赘述.该轴对称薄板问题存在解析解<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} u_z = \frac{3q(1-\nu^2)}{128Ec^3} \left[ r^4 - \frac{3+\nu}{1+\nu} 2a^2r^2 + \frac{5+\nu}{1+\nu} a^4 \right], \\ \sigma_r = q \left[ \frac{2+\nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{r^2z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2+\nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3+\nu)}{32} \frac{a^2z}{c^3} \right]. \end{cases} \quad (31)$$

本文对该问题的计算参数取值为:  $a = 2, 2c = 0.12, E = 7.0 \times 10^5, \nu = 1/3, q = 100$ .对于该问题,弱式方法通常能给出理想的解答<sup>[17-19]</sup>,但一般强式方法很难处理该问题.

MIP 法求解这一问题,应当采用 L1C1 计算格式.为了更全面了解本文方法对于该问题的求解精度和计算效率,故将 MLPG 法的求解结果也列入比较<sup>[19]</sup>,如图9所示.由计算结果可以看出, MIP 法对该问题能够给出精确解答,其求解精度与 MLPG 法相当,然而,直接配点法求解该问题是严重失真的,实际上,即便采用更稠密的节点离散方案,直接配点法的求解都是完全

发散和不收敛的,可以说对于此类问题,直接配点法是不适用的。

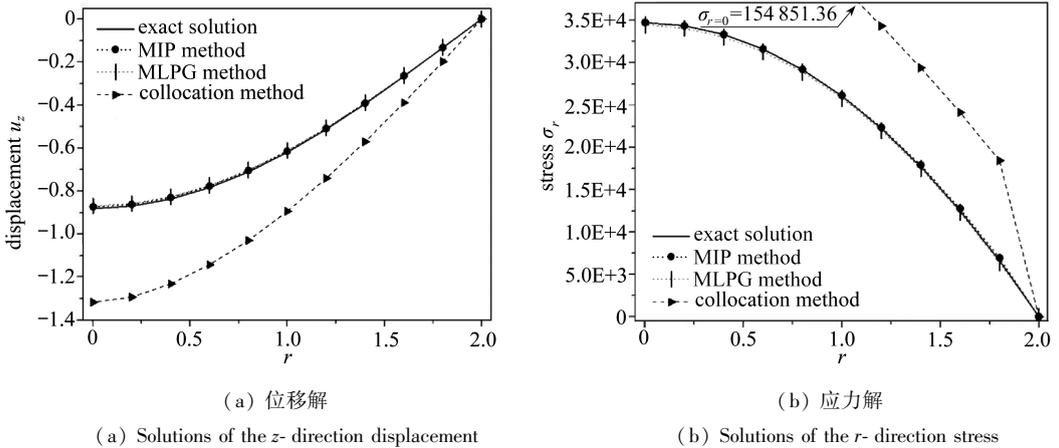


图9 轴对称薄板的数值解

Fig. 9 Numerical solutions to the problem of an axisymmetric plate

为了进一步考察 MIP 法的计算效率,表 1 给出了 MIP 法和 MLPG 法在求解该问题时的计算机 CPU 运算时间的比较,可以看出,MIP 法的计算效率远高于 MLPG 法。

表 1 MIP 法与 MLPG 法数值求解耗时成本比较

Table 1 Solution time costs of the MIP method and the MLPG method

number of field nodes	time cost for numerical solution $T/s$	
	MIP method	MLPG method
147	0.936 725	4.481 785
273	1.864 536	10.101 940
533	3.963 082	23.046 047
793	6.238 015	37.716 791

#### 4.4 Euler 梁问题

MIP 法具有  $p$  自适应性,这意味着该方法在求解高阶偏微分方程问题中有理论上的可能性,为了验证这一设想,故引入该算例进行初步检验.受均布荷载作用的 Euler 梁问题如图 10 所示.该问题是一个 4 阶微分方程问题,其平衡方程写为

$$EI \cdot \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} = q(x), \quad (32)$$

式中,  $u(x)$  表示 Euler 梁的挠度函数,  $EI$  表示梁的弯曲刚度.该问题有如下解析解:

$$u(x) = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3), \quad (33)$$

式中的计算参数取值为

$$EI = 10^5, q = 1, L = 100.$$

其边界条件为  $u_{x=L}(x) = 0, \partial u / \partial x|_{x=0} = -qL^3 / (24EI)$ . 另引入求解控制条件  $\partial u / \partial x|_{x=L/2} = 0$ .

本文求解该问题使用 51 个节点进行 1D 离散.对于该 4 阶微分方程问题,利用 MIP 的  $d$  适应性,可以有更多的计算格式,此处考虑 L2C2, L3C1 和 L4C0 这 3 种求解格式,计算结果如图 11 所示.可以看出,本文方法能对该问题给出较为合理的解答.而对这种高阶微分方程问题,通常方法是不能直接进行求解的。

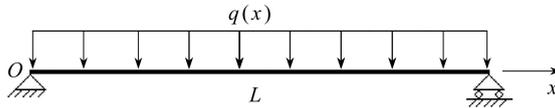


图 10 Euler 梁

Fig. 10 The Euler beam

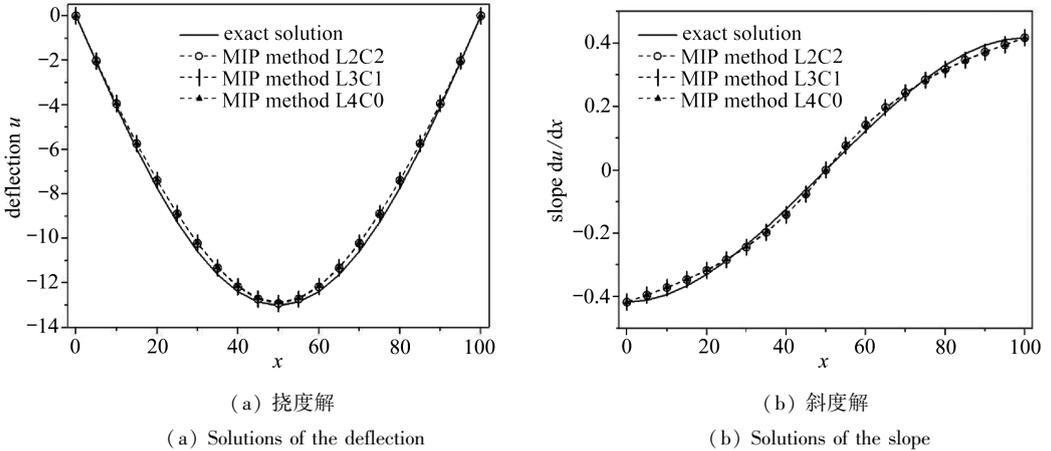


图 11 Euler 梁的数值解

Fig.11 Numerical solutions to the Euler beam problem

## 5 结论与讨论

无网格介点(MIP)法的关键特征有两点,其一是使用了移动最小二乘核近似(MLS<sub>c</sub>)法来构造无网格法形函数,其二是使用了“局部介点近似技术”来进行数值离散.MLS<sub>c</sub>的使用,不仅使近似计算更为简单,而且可显著提高近似计算的稳定性,有关理论阐释可参考文献[13].局部介点近似技术的使用,使得局部域上近似计算可以更自由的选择基函数,并可构造出高阶连续的近似函数,即近似计算是  $p$  适应的;而且导数运算可在局部域和覆盖域上的近似计算中更为自由地分配,即导数运算是  $d$  适应的.所以,MIP 法具有  $h$ - $p$ - $d$  适应性,不仅增强了求解灵活性,也意味着其求解适应能力更强.此外,对 MLS 稳定和高效计算的研究中,复变量移动最小二乘法是一项需要关注的研究进展<sup>[20-21]</sup>,将其代替 MLS<sub>c</sub> 用于本文的方法也是可以考虑的一项后续研究内容.

MIP 法是一种真正的无网格法,其离散系统方程的构造类似于配点法,仅需按节点组装,数值实施简单而直接.MIP 法相比于弱式方法,无需积分计算,无需任何背景网格或背景单元,计算更加高效,而且很容易处理不规则边界问题,这一点是显然的.MIP 法相比于一般配点法,其求解精度更高.特别是对一些特殊问题,比如轴对称问题,一般配点法是不适用的,而 MIP 法却没有任何求解障碍.甚至于对一般数值方法无能为力的高阶微分方程求解问题,MIP 法也有获得合理解答的可能性.经过数值验证,表明 MIP 法不仅具有计算简单、效率高、精度高的优点,而且对多类求解问题具有“广泛适用”的潜在优势.

**致谢** 作者衷心感谢道路结构与材料交通行业重点实验室(长沙)开放基金重点项目(KFJ120201)对本文的资助。

## 参考文献(References):

- [1] YANG Jian-jun, ZHENG Jian-long. Intervention-point principle of meshless method[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2013, **58**(4/5): 478-485.
- [2] Li S, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, **55**(1): 1-34.
- [3] Jensen P S. Finite difference techniques for variable grids[J]. *Computers & Structures*, 1972, **2**(1/2): 17-29.
- [4] Perrone N, Kao R. A general finite difference method for arbitrary meshes[J]. *Computers & Structures*, 1975, **5**(1): 45-57.
- [5] Liszka T, Orkisz J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics[J]. *Computers & Structures*, 1980, **11**(1/2): 83-95.
- [6] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *The Astronomical Journal*, 1977, **82**: 1013-1024.
- [7] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, **181**(3): 375-389.
- [8] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless methods: an overview and recent developments[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4): 3-47.
- [9] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. *Computational Mechanics*, 1992, **10**(5): 307-318.
- [10] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2): 229-256.
- [11] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics[J]. *Computational Mechanics*, 1998, **22**(2): 117-127.
- [12] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, **39**(1): 1-36. (ZHANG Xiong, LIU Yan, MA Shang. Meshfree methods and their applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2009, **39**(1): 1-36. (in Chinese))
- [13] 杨建军, 郑健龙. 移动最小二乘法的近似稳定性[J]. 应用数学学报, 2012, **35**(4): 637-648. (YANG Jian-jun, ZHENG Jian-long. Stability of moving least squares approximation[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2012, **35**(4): 637-648. (in Chinese))
- [14] Breitkopf P, Touzot G, Villon P. Double grid diffuse collocation method[J]. *Computational Mechanics*, 2000, **25**(2): 199-206.
- [15] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [16] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, Taylor R L. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, **39**(22): 3839-3866.
- [17] 韩治, 杨海天, 王斌. 无网格伽辽金法求解轴对称问题[J]. 工程力学, 2005, **22**(5): 64-68. (HAN Zhi, YANG Hai-tian, WANG Bin. Solving axisymmetric problems via EFGM[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, **22**(5): 64-68. (in Chinese))
- [18] 陈建桥, 梁元博, 丁亮. 无网格局部 Petrov-Galerkin 法求解轴对称问题[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2007, **24**(4): 9-12. (CHEN Jian-qiao, LIANG Yuan-bo, DING Liang. Numerical analysis of axisymmetric problems by MLPG[J]. *Journal of Huazhong University of Sci-*

- ence and Technology (Urban Science Edition)*, 2007, **24**(4): 9-12.(in Chinese))
- [19] 杨建军, 郑健龙. 无网格 MLPG 法求解轴对称弹性力学问题[J]. 工程力学, 2012, **29**(8): 8-13. (YANG Jian-jun, ZHENG Jian-long. Analysis of axisymmetric elasticity problems using the meshless local Petrov-Galerkin method[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(8): 8-13.(in Chinese))
- [20] 程玉民, 彭妙娟, 李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用[J]. 力学学报, 2005, **37**(6): 719-723.(CHENG Yu-min, PENG Miao-juan, LI Jiu-hong. The complex variable moving least-square approximation and its application[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, **37**(6): 719-723.(in Chinese))
- [21] 孙新志, 李小林. 复变量移动最小二乘近似在 Sobolev 空间中的误差估计[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 416-425.(SUN Xin-zhi, LI Xiao-lin. Error estimates for the complex variable moving least square approximation in Sobolev spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 416-425.(in Chinese))

## A Meshless Intervention-Point Method With $h$ - $p$ - $d$ Adaptability

YANG Jian-jun<sup>1</sup>, ZHENG Jian-long<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Road Structure and Material of Ministry of Transport, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, P.R.China;

2. School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, P.R.China)

**Abstract:** A truly meshless method, the meshless intervention-point (MIP) method, was presented. The moving least squares core (MLSC) approximation was applied to build the shape functions, and to help formulate a more simple and stable algorithm. Furthermore, a local intervention-point approximation technique for numerical discretization was introduced to endow the method with the  $h$ - $p$ - $d$  adaptability, which meant higher flexibility and applicability in reality. The results from several numerical tests show that the proposed method is simple, efficient and accurate, and exhibits all-round potential for engineering computation.

**Key words:** meshless method; intervention-point principle;  $h$ - $p$ - $d$  adaptability; moving least squares core approximation; local intervention-point approximation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51478053)

---

引用本文/Cite this paper:

杨建军, 郑健龙. 无网格介点法:一种具有  $h$ - $p$ - $d$  适应性的无网格法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(10): 1013-1025.

YANG Jian-jun, ZHENG Jian-long. A meshless intervention-point method with  $h$ - $p$ - $d$  adaptability[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(10): 1013-1025.