

# 在柱坐标系下研究由拉伸缸引起的 Casson 纳米流体流动与传热传质现象\*

许晓勤<sup>1,2</sup>, 陈淑梅<sup>2</sup>

(1. 福建船政交通职业学院 汽车运用工程系, 福州 350007;  
2. 福州大学 机械工程及自动化学院, 福州 350116)

**摘要:** 首次利用柱坐标研究速度滑移和对流表面边界条件下,由拉伸缸引起的稳态层流 Casson 纳米流体流动、传热及传质现象.采用恰当的相似变换将偏微分控制方程转化为高阶非线性耦合常微分方程,并通过打靶法进行数值求解,图示并详细分析了不同物理参数对速度、温度及浓度分布的影响.结果显示,速度受滑移参数的影响较大,温度和浓度分别受 Biot 数和 Lewis 数的影响较大;随着 Casson 参数的增大,速度下降而温度和浓度都增加;温度随着 Brown(布朗)运动参数或热泳参数的增加而上升;浓度随着 Brown 运动参数的增大而减小,随着热泳参数的增大而增大,当热泳参数较大时,浓度出现了“回流”现象.

**关键词:** 柱坐标; Casson 纳米流体; 拉伸缸; 边界层流动; 速度滑移;  
对流边界条件

**中图分类号:** O351.2      **文献标志码:** A  
**doi:** 10.21656/1000-0887.370091

## 引 言

在许多机械、化学和材料工程中均存在非 Newton(牛顿)流体的输运现象.这种流体所呈现的剪切应力应变关系明显偏离经典的 Newton 流体(由 Navier-Stokes 方程描述).大多数非 Newton 流体方程均对 Navier-Stokes 方程中的动量守恒方程作某种程度的修改,包括幂律流体<sup>[1]</sup>、Casson 流体<sup>[2]</sup>、粘弹性流体(如上随体 Maxwell 模型)<sup>[3]</sup>、Walters-B 短记忆模型<sup>[4]</sup>、Oldroyd-B 模型<sup>[5]</sup>、差分 Reiner-Rivlin 模型<sup>[6-7]</sup>和 Bingham(宾汉)模型<sup>[8]</sup>等.在生物技术和食品工程发展中很多非 Newton 流体属于 Casson 流体,如生理悬浮液、血液、泡沫、化妆品、糖浆等均能用 Casson 模型近似描述.该模型用于描述塑性流体时,具有剪切稀化特性、屈服应力和高剪切粘度<sup>[9]</sup>.在很多领域,如生物工程和制造技术中已经对 Casson 流体输运现象进行了大量的理论、数值和实验研究.如 Nagarani 等研究了流经环形的 Casson 流体的质量传输,推导出解析解,同时考虑抽吸效应<sup>[10]</sup>;Mustafa 和 Hayat 等得到了沿拉伸表面的 Casson 流体驻点流与传热的同伦解,还考虑了粘性加热效应<sup>[11]</sup>.纳米流体是由尺寸小于 100 nm 的固体颗粒分散于基液

\* 收稿日期: 2016-03-29; 修订日期: 2016-05-31

基金项目: 2012 年度中央财政支持地方高校发展专项资金(闽教财[2012]788 号)

作者简介: 许晓勤(1981—),女,讲师,博士生(通讯作者. E-mail: m140210004@fzu.edu.cn);  
陈淑梅(1960—),女,教授,博士生导师.

中形成的,传统的传热流体由于导热系数低而无法达到冷却率的要求,而纳米颗粒由于存在 Brown 运动和热泳特性,可以提高基液的导热系数,从而作为一种新型的传热流体——纳米流体而得到广泛的研究与应用.如 Choi 和 Eastman 首次采用纳米颗粒(通常由金属或金属氧化物制成)与基液的混合物,称之为“纳米流体”<sup>[12]</sup>;Malvandi 和 Ganji 从理论上研究在均匀磁场作用下,圆形微通道中氧化铝/水纳米流体的流动与对流换热<sup>[13]</sup>;Makinde 等讨论了通过对流加热伸缩表面的浮力驱动纳米流体驻点流<sup>[14]</sup>;Hatami 和 Ganji 研究了非 Newton 纳米流体流过多孔介质的传热特性<sup>[15]</sup>.

由于连续表面运动而引起的边界层流动是基本的物理现象,也是流动的一种重要类型,广泛存在于许多工程领域中,如电线和纤维涂层、金属和聚合物挤出、食品加工、连续铸造、塑料片材的拉伸、换热器及化学处理设备. Crane 首次研究了拉伸板上的流动<sup>[16]</sup>;Bachok 等研究了过半无限长平板的稳态纳米边界层流<sup>[17]</sup>;Rashidi 等对非线性等温渗透延伸板上的纳米流体动力学性能进行了 HAM 仿真<sup>[18]</sup>.通过延伸缸体上的流动由于在工业和工程领域的广泛应用,引起了很多学者的关注.Wang 在由拉伸缸拉伸而引起的流动方面的研究是先驱<sup>[19]</sup>;Ishak 等讨论了均匀抽吸/喷注和 MHD 对拉伸缸引起的流动和热传递的影响<sup>[20-21]</sup>;Abbas 等考虑了多孔介质中有热辐射存在时通过拉伸缸导电粘性流体的层流 MHD 流动与传热<sup>[22]</sup>;Hayat 等还研究了倾斜拉伸缸引起的变导热系数流体流动,考虑了粘性耗散和热辐射的影响<sup>[23]</sup>;Bachok 和 Ishak 研究了给定表面热通量时,浸在不可压缩粘性流体中的拉伸缸引起的稳态层流问题<sup>[24]</sup>;Mahdy 研究了拉伸缸引起的 Casson 流体流动与传热现象,考虑了 Soret 和 Dufour 效应<sup>[25]</sup>.

在上述文献综述中,大部分流场均满足壁面无滑移条件.然而某些特定场合并不满足无滑移条件,如在某些工业热问题和制造流体动力学系统中滑移效应是很重要的<sup>[26]</sup>,滑移现象也存在于疏水性表面,特别是微纳米流体.滑移边界条件对剪切力、滞后效应和加速性能等影响较大.近年来,许多学者对滑移流进行了大量研究,主要集中在微机电系统(MEMS)<sup>[27]</sup>.如 Sparrow 等首次对带有均匀热源管道内的层流滑移流与传热进行研究<sup>[28]</sup>;Inman 进一步描述了具有壁面温度的平行板通道或管道的热对流滑移流<sup>[29]</sup>.这些研究普遍表明,速度滑移行为会增强换热,而热滑(或“温度跳”)会降低传热.最近,Mukhopadhyay 等研究了部分滑移对拉伸缸内 MHD 和化学反应性浓质传输的影响<sup>[30-32]</sup>;Hayat 等研究了滑移条件对垂直拉伸缸传热和传质的影响<sup>[33]</sup>;Majeed 等<sup>[34]</sup>采用 Chebyshev(切比雪夫)谱-Newton 迭代方法来研究在部分滑移和给定热通量条件下拉伸缸引起的传热问题,结果显示:拉伸缸体上的流体速度和表面摩擦因数受滑移参数的影响很大.

受到上述文献的启发,本文在速度滑移和对流表面边界条件下,研究由拉伸缸引起的稳态层流 Casson 纳米流体流动以及传热传质问题,并详细分析了曲率参数、Casson 参数、Brown 运动参数、热泳参数等对 Casson 纳米流体流动、温度和浓度分布的影响.

## 1 数学模型

考虑不可压缩的 Casson 纳米流体,由于缸体(半径为  $a$ ) 拉伸而产生边界层流动,如图 1 所示.假设 Casson 纳米流体流动稳定、轴对称且为层流.研究由于缸体运动而引起的边界层流动现象一般采用柱坐标系下的 N-S 方程,取缸体轴向为  $z$  轴,径向为  $r$  轴,缸体沿轴向( $z$  轴)以  $V_w = V_0 z/L$  的速度向两边拉伸.

Casson 流体作各向同性、不可压缩流动时的流变状态方程为<sup>[2,35]</sup>

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2\left(\mu_B + \frac{P_y}{\sqrt{2\pi}}\right) e_{ij}, & \pi > \pi_c, \\ 2\left(\mu_B + \frac{P_y}{\sqrt{2\pi_c}}\right) e_{ij}, & \pi < \pi_c. \end{cases} \quad (1)$$

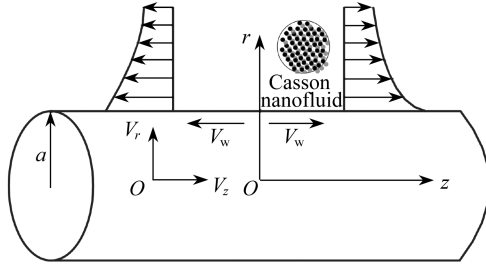


图 1 由缸体拉伸引起的 Casson 纳米流体流动示意图

Fig. 1 Schematic of the Casson nanofluid flow induced by a stretching cylinder

在方程(1)中,  $\pi = e_{ij}e_{ij}$ ,  $e_{ij}$  表示  $(i, j)$  变形率分量,  $\pi$  表示变形率分量的自乘量,  $\pi_c$  表示变形率分量自乘量基于非 Newton 模型时的临界值,  $\mu_B$  表示非 Newton 流体的塑性动力学粘度,  $P_y$  表示流体的屈服应力. 由此产生的 Casson 纳米流体流动的边界层方程如下:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \quad (3)$$

$$V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \tau \left(D_B \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\tau D_T}{T_\infty} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right], \quad (4)$$

$$V_r \frac{\partial C}{\partial r} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} = D_B \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) + \frac{D_T}{T_\infty} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad (5)$$

其中,  $V_z, V_r$  分别表示  $z, r$  方向的速度分量,  $\beta = \mu_B \sqrt{2\pi_c} / P_y$  为 Casson 参数,  $T$  为 Casson 纳米流体温度,  $T_\infty$  为 Casson 纳米流体无穷远处的温度,  $C$  为 Casson 纳米流体浓度,  $\nu = \mu / \rho$  为运动粘度,  $\mu$  为动力粘度,  $\rho$  为流体密度,  $\alpha$  为热扩散率,  $c_p$  是比定压热容,  $\tau = (\rho c)_p / (\rho c)_f$  为纳米颗粒的有效热容量与基液的有效热容量之比,  $D_B$  是 Brown 扩散系数,  $D_T$  是热泳扩散系数.

边界条件:

在  $r = a$  处

$$\begin{cases} V_r = 0, V_z = V_w(z) + B_1 \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial V_z}{\partial r} = V_0 \frac{z}{L} + B_1 \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial V_z}{\partial r}, \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T_w - T), C = C_w; \end{cases} \quad (6)$$

在  $r \rightarrow \infty$  处

$$V_z \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, C \rightarrow C_\infty; \quad (7)$$

其中,  $V_0, B_1$  均为常数,  $k$  为导热系数,  $h$  为对流传热系数,  $a$  为缸体半径,  $L$  为参考长度,  $T_w$  为壁

面温度,  $C_w$  为壁面浓度,  $C_\infty$  为 Casson 纳米流体无穷远处的浓度.

引入下列相似变量:

$$\eta = \frac{r^2 - a^2}{2a} \sqrt{\frac{V_0}{\nu L}}, \quad \psi = \sqrt{\frac{\nu V_0}{L}} azf(\eta), \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \phi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \quad (8)$$

其中  $\psi$  是流函数. 根据定义, 可知速度分量为

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{V_0}{L} zf', \quad V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{a}{r} \sqrt{\frac{\nu V_0}{L}} f. \quad (9)$$

将速度分量代入方程(2)~(5), 可知方程(2)自动满足, 方程(3)~(5)简化为

$$(1 + 2\gamma\eta) \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''' + 2\gamma \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f'' + ff'' - f'^2 = 0, \quad (10)$$

$$(1 + 2\gamma\eta) \theta'' + 2\gamma\theta' + Pr f\theta' + Pr(1 + 2\gamma\eta) (N_B \theta' \phi' + N_T \theta'^2) = 0, \quad (11)$$

$$(1 + 2\gamma\eta) \phi'' + 2\gamma\phi' + Le f\phi' + \frac{N_T}{N_B} [(1 + 2\gamma\eta) \theta'' + 2\gamma\theta'] = 0, \quad (12)$$

式中  $\gamma$  为曲率参数,  $Pr$  为 Prandtl 数,  $N_T$  为热泳参数,  $N_B$  为 Brown 运动参数,  $Le$  为 Lewis 数, 各参数表达式为

$$\gamma = \sqrt{\frac{\nu L}{a^2 V_0}}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad N_T = \frac{\tau D_T}{\nu T_\infty} (T_w - T_\infty), \quad N_B = \frac{\tau D_B}{\nu} (C_w - C_\infty), \quad Le = \frac{\nu}{D_B}. \quad (13)$$

边界条件(6)、(7)转化为

$$\begin{cases} f(0) = 0, f'(0) = 1 + B_1 \sqrt{\frac{\nu V_0}{L}} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''(0) = 1 + B \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''(0), \\ \theta'(0) = -B_1 [1 - \theta(0)], \phi(0) = 1, \\ f'(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0, \phi(\infty) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $B$  为速度滑移参数,  $B_1 = (h/k) \sqrt{\nu L/V_0}$  为 Biot 数.

假定压缩功和摩擦热忽略不计, 流体表面摩擦力因数  $C_f$ 、局部 Nusselt 数  $Nu_z$  和 Sherwood 数  $Sh_z$  分别定义为

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho V_w^2}, \quad Nu_z = \frac{zq_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad Sh_z = \frac{zq_m}{D_B(C_w - C_\infty)}. \quad (15)$$

此处表面摩擦力  $\tau_w$ 、热通量  $q_w$  与质量通量  $q_m$  可以分别写成

$$\tau_w = \mu_B \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)_{r=a}, \quad q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=a}, \quad q_m = -D_B \left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=a}. \quad (16)$$

利用相似变换(8)可得

$$C_f \cdot Re_z^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''(0), \quad Nu_r = \frac{Nu_z}{Re_z^{1/2}} = -\theta'(0), \quad Sh_r = \frac{Sh_z}{Re_z^{1/2}} = -\phi'(0), \quad (17)$$

其中  $Re_z = zV_w/\nu$  为局部 Reynolds 数,  $Nu_r$  和  $Sh_r$  分别为简化的 Nusselt 数和简化的 Sherwood 数.

## 2 数值方法

常微分方程(10)~(12)及边界条件(14)构成了两点边值问题, 解决这种问题的数值方法有同伦分析法(HAM)<sup>[11,27]</sup>、Keller-box 法<sup>[36]</sup>、Crank-Nicolson 法(CNM)<sup>[4-5]</sup>、打靶法<sup>[14]</sup>等. 本文采用打靶法进行数值求解, 打靶法计算精度高, 方法简单, 主要思路是: 适当选择和调整初值条

件  $(f''(0), \theta(0), \phi'(0))$ , 求解常微分方程 (10) ~ (12), 使之逼近给定的边界条件  $(f'(\infty) = \theta(\infty) = \phi(\infty) = 0)$ . 如果将描述的曲线视作弹道, 那么求解过程即不断调整试射条件使之达到预定的靶子 (误差控制在  $10^{-6}$  内), 所以称作打靶法或试射法. 为了验证该方法的有效性, 当  $Pr$  取不同值时, 用本方法求得的  $Nu_r$  和  $Sh_r$  与现有文献结果进行比较 (文献 [37] 采用四阶 Runge-Kutta (龙格-库塔) 法, 文献 [27] 采用优化同伦分析法), 结果吻合, 如表 1 所示 ( $N_T = N_B = 0.5, Le = 5, \gamma = 0, B = 0, B_i = 0.1, \beta \rightarrow \infty$ ).

表 1  $Pr$  取不同值时  $Nu_r$  和  $Sh_r$  与现有文献结果比较

Table 1 The present results compared with the previous numerical solutions

$Pr$	Makinde and Aziz <sup>[37]</sup>		Abolbashari et al. <sup>[27]</sup>		present study	
	$Nu_r$	$Sh_r$	$Nu_r$	$Sh_r$	$Nu_r$	$Sh_r$
1	0.078 9	1.547 7	0.078 9	1.547 7	0.078 93	1.547 68
2	0.080 6	1.555 4	0.080 6	1.555 4	0.080 62	1.555 43
5	0.073 5	1.598 3	0.073 5	1.598 3	0.073 45	1.598 32

### 3 结果讨论

图 2 和图 3 给出曲率参数  $\gamma$  对速度、温度和浓度分布的影响 ( $\beta = 1, B = 0.1, B_i = 0.2, Le = 2, N_B = 0.5, N_T = 0.5, Pr = 0.72$ ). 从图 2 和图 3 可以看出, 当  $\eta$  较小时, 随着曲率参数的增大, 温度降低, 速度也降低但变化不明显, 而当  $\eta$  较大时, 随着曲率参数的增大, 速度增大且边界层变厚, 温度上升但变化不明显; 浓度会随着曲率参数的增大而增加.

图 4 和图 5 给出 Casson 参数  $\beta$  对速度、温度和浓度分布的影响 ( $B = 0.1, B_i = 0.2, Le = 2, N_B = 0.5, N_T = 0.5, Pr = 0.72, \gamma = 0.5$ ). 从图 4 可以得出, 随着 Casson 参数的增大, 速度下降且边界层变薄, 这是因为 Casson 参数对流体流动起阻碍作用从而使得流体流动减慢. 从图 5 可以看出, 随着 Casson 参数的增大, 温度和浓度都增加且边界层均变厚, 这是因为 Casson 参数增大意味着粘度增加, 而粘度增加会增大传热速率, 从而使温度上升, 而温度场会带动浓度场, 从而使浓度也增加.

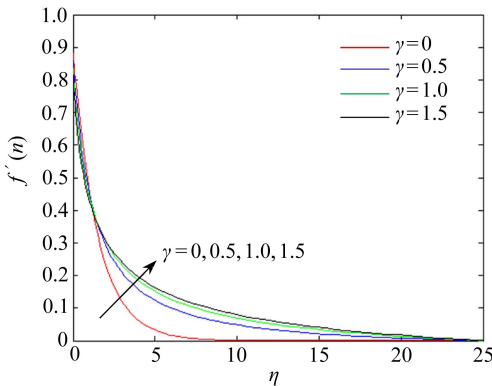


图 2 曲率参数  $\gamma$  对速度轮廓的影响

Fig. 2 The effect of curvature parameter  $\gamma$  on the velocity profile

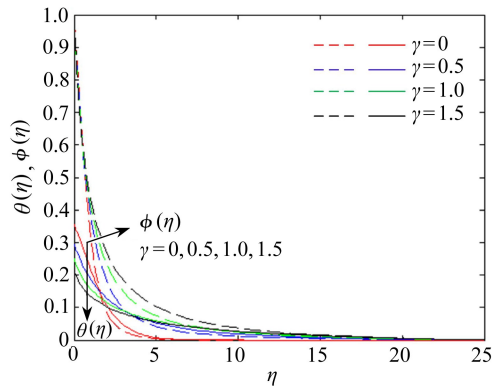


图 3 曲率参数  $\gamma$  对温度和浓度分布的影响

Fig. 3 The effect of curvature parameter  $\gamma$  on the temperature and concentration distributions

图 6 和图 7 给出速度滑移参数  $B$  对速度、温度和浓度分布的影响 ( $\beta = 1, B_i = 0.2, Le = 2, N_B = 0.5, N_T = 0.5, Pr = 0.72, \gamma = 0.5$ ). 从图 6 可以得出, 随着速度滑移参数的增大, 速度下降且边界层变薄, 这是因为速度滑移参数越大, 拉伸缸壁面对流体的“拖拽”作用减弱, 从而使流



体速度减小.从图 7 可以看出,随着速度滑移参数的增大,温度和浓度都增加且边界层均变厚.

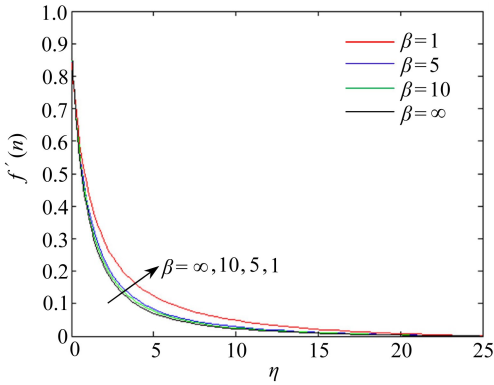


图 4 Casson 参数  $\beta$  对速度轮廓的影响  
Fig. 4 The effect of Casson parameter  $\beta$  on the velocity profile

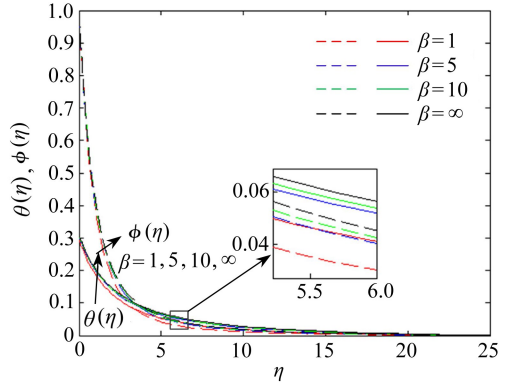


图 5 Casson 参数  $\beta$  对温度和浓度分布的影响  
Fig. 5 The effect of Casson parameter  $\beta$  on the temperature and concentration distributions

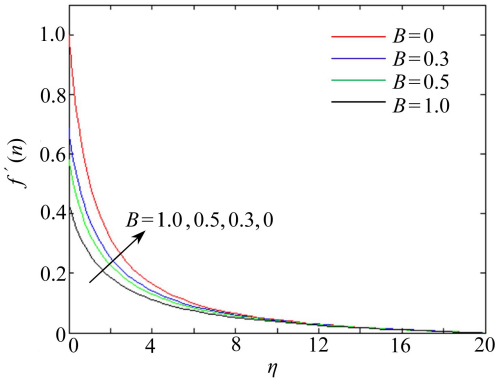


图 6 速度滑移参数  $B$  对速度轮廓的影响  
Fig. 6 The effect of velocity slip parameter  $B$  on the velocity profile

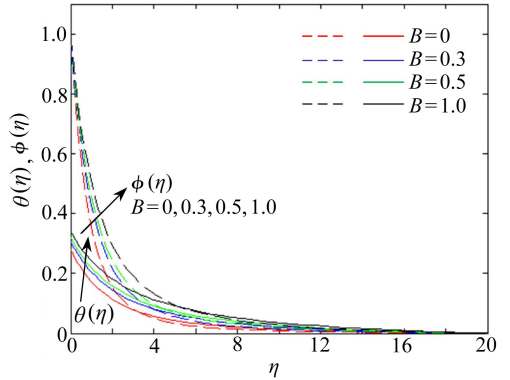


图 7 速度滑移参数  $B$  对温度和浓度分布的影响  
Fig. 7 The effect of velocity slip parameter  $B$  on the temperature and concentration distributions

图 8 给出 Biot 数对温度和浓度分布的影响 ( $\beta = 1, B = 0.1, Le = 2, N_B = 0.5, N_T = 0.5, Pr = 0.72, \gamma = 0.5$ ).随着 Biot 数的增大,温度和浓度均增大,这是因为 Biot 数增加会增大传热系数,从而使温度上升,而温度场会带动浓度场,从而使浓度也增加,且 Biot 数对温度的影响大于对浓度的影响.

图 9 给出 Prandtl 数对温度分布的影响以及 Lewis 数对浓度分布的影响 ( $\beta = 1, B = 0.1, B_i = 0.2, N_B = 0.5, N_T = 0.5, \gamma = 0.5$ ).Prandtl 数增大时,温度下降且边界层变薄.Prandtl 数是运动粘度与热扩散系数之比,  $Pr < 1$  意味着热扩散速度大于动量扩散速度;  $Pr = 1$  意味着热扩散速度等于动量扩散速度;  $Pr > 1$  意味着热扩散速度小于动量扩散速度.因此 Prandtl 数越大,热扩散速度越小,温度越小.从图 9 还可以看出,随着 Lewis 数增大,浓度会明显下降.Lewis 数是热扩散系数与质量扩散系数之比, Lewis 数增大,纳米粒子质量扩散减弱,导致溶质浓度下降.

图 10( $\beta \rightarrow \infty, B = 0.1, B_i = 0.2, Le = 2, N_T = 0.1, Pr = 0.72, \gamma = 0$ ) 和图 11( $\beta \rightarrow \infty, B = 0.1, B_i = 0.2, Le = 2, N_B = 0.1, Pr = 0.72, \gamma = 0$ ) 给出 Brown 运动参数  $N_B$  和热泳参数  $N_T$  对温度和浓度分布的影响.随着 Brown 运动参数和热泳参数的增加,温度都会上升,因此可通

过调节  $N_B$  和  $N_T$  的值来调节 Casson 纳米流体的温度场,而浓度随着 Brown 运动参数的增大而减小,随着热泳参数的增大而增大.从图 11 还可以看出,当热泳参数  $N_T$  较大(如大于 0.7)时,随着  $\eta$  的增加,浓度先增大后减小,出现了“回流”现象.

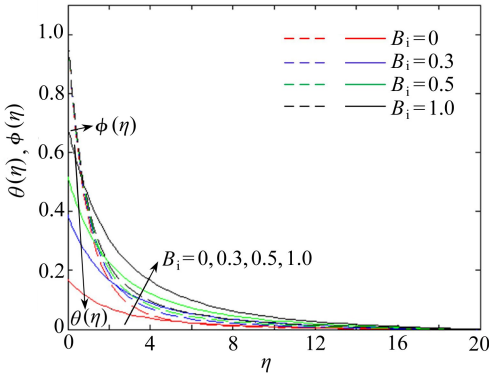


图 8 Biot 数  $B_i$  对温度和浓度分布的影响

Fig. 8 The effect of Biot number  $B_i$  on the temperature and concentration distributions

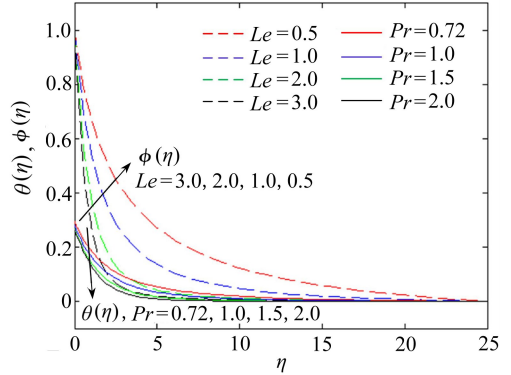


图 9 Prandtl 数 ( $Pr$ ) 对温度分布 ( $Le = 2$ ) 和 Lewis 数 ( $Le$ ) 对浓度分布的影响 ( $Pr = 0.72$ )

Fig. 9 The effect of Prandtl number  $Pr$  on the temperature distribution and that of Lewis number  $Le$  on the concentration distribution

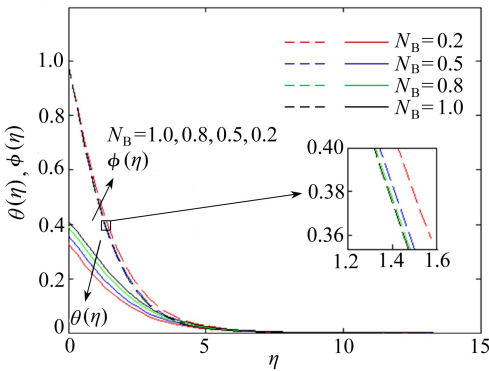


图 10 Brown 运动参数  $N_B$  对温度和浓度分布的影响

Fig. 10 The effect of Brownian motion number  $N_B$  on the temperature and concentration distributions

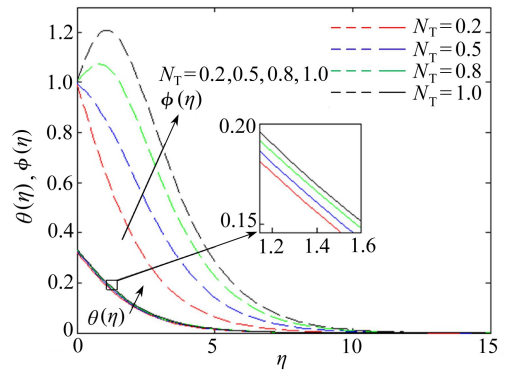


图 11 热泳参数  $N_T$  对温度和浓度分布的影响

Fig. 11 The effect of thermophoresis parameter  $N_T$  on the temperature and concentration distributions

图 12~图 14 给出曲率参数取不同值时壁面摩擦力、Nusselt 数及 Sherwood 数与 Casson 参数的关系 ( $B = 0.1, B_i = 0.2, Le = 2, N_B = N_T = 0.5, Pr = 0.72$ )。随着曲率半径的增大,表面摩擦力绝对值、Nusselt 数和 Sherwood 数均增大,但 Nusselt 数增大幅度很小.其结果与图 2 符合.这是因为曲率半径越大,缸体表面受挤压程度大,表面摩擦力变大,流体流动受阻而使流动减慢.

图 15~图 17 给出 Casson 参数取不同值时壁面摩擦力、Nusselt 数及 Sherwood 数与速度滑移参数  $B$  的关系 ( $Le = 2, B_i = 0.2, N_B = N_T = 0.5, Pr = 0.72, \gamma = 0.5$ )。随着 Casson 参数的增大,表面摩擦力绝对值减小、Nusselt 数和 Sherwood 数均增大,但 Nusselt 数增大幅度很小.Casson 参数趋于无穷大时,流体就成为 Newton 流体,可见,非 Newton 流体的表面摩擦力比 Newton 流体大.

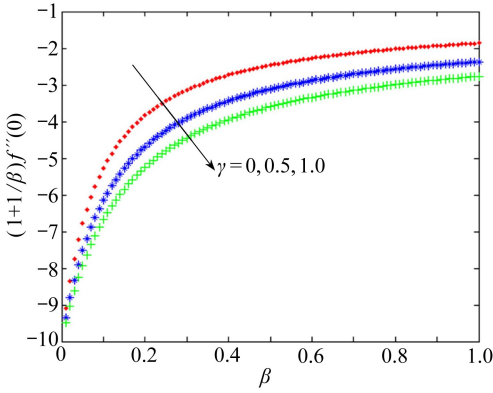


图 12  $\gamma$  取不同值时  $(1 + 1/\beta)f''(0)$  与  $\beta$  的关系  
Fig. 12 Skin friction coefficient  $(1 + 1/\beta)f''(0)$  vs. Casson parameter  $\beta$  for different  $\gamma$  values

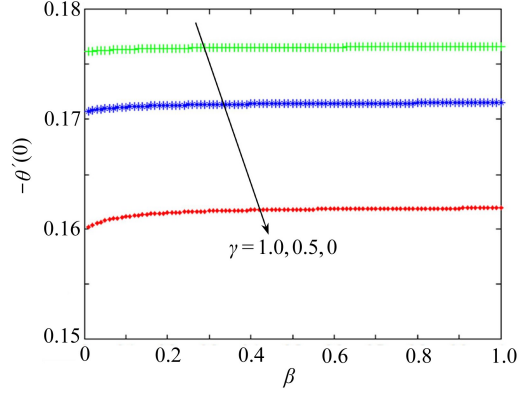


图 13  $\gamma$  取不同值时  $-\theta'(0)$  与  $\beta$  的关系  
Fig. 13 Reduced Nusselt number  $-\theta'(0)$  vs. Casson parameter  $\beta$  for different  $\gamma$  values

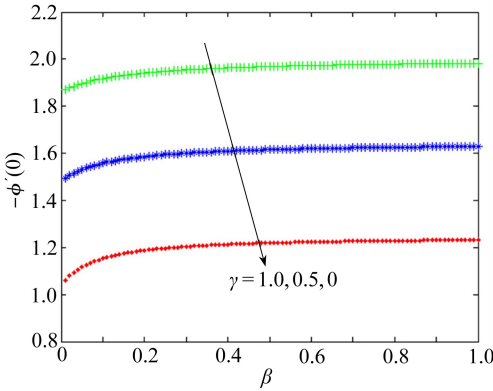


图 14  $\gamma$  取不同值时  $-\phi'(0)$  与  $\beta$  的关系  
Fig. 14 Reduced Sherwood number  $-\phi'(0)$  vs. Casson parameter  $\beta$  for different  $\gamma$  values

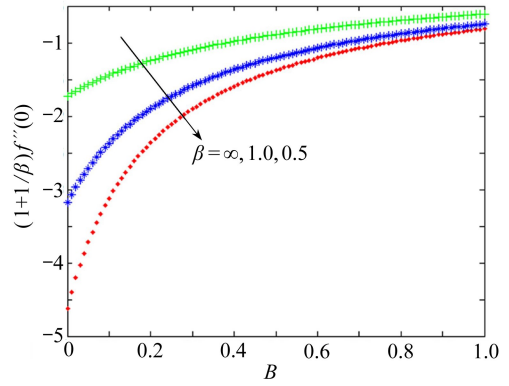


图 15  $\beta$  取不同值时  $(1 + 1/\beta)f''(0)$  与  $B$  的关系  
Fig. 15 Skin friction coefficient  $(1 + 1/\beta)f''(0)$  vs. velocity slip parameter  $B$  for different  $\beta$  values

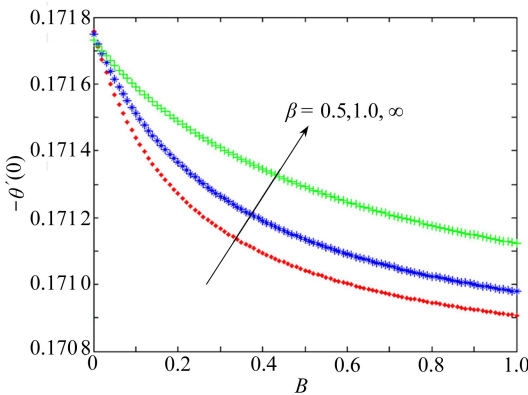


图 16  $\beta$  取不同值时  $-\theta'(0)$  与  $B$  的关系  
Fig. 16 Reduced Nusselt number  $-\theta'(0)$  vs. velocity slip parameter  $B$  for different  $\beta$  values

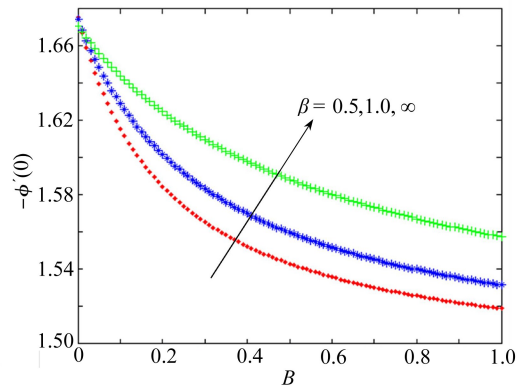


图 17  $\beta$  取不同值时  $-\phi'(0)$  与  $B$  的关系  
Fig. 17 Reduced Sherwood number  $-\phi'(0)$  vs. velocity slip parameter  $B$  for different  $\beta$  values



## 4 结 论

由于连续表面运动而引起的边界层流动是基本的物理现象,也是流动的一种重要类型。本文在速度滑移和对流表面边界条件下,研究由拉伸缸引起的稳态层流 Casson 纳米流体流动、温度和浓度分布问题。借助于相似变换将偏微分方程组转换成非线性耦合常微分方程,利用打靶法求解该非线性问题,并对数值计算结果进行分析,得到如下结论:

1) 当  $\eta$  较小时,随着曲率参数的增大,温度降低,速度也降低但变化不明显,而当  $\eta$  较大时,随着曲率参数的增大,速度增大且边界层变厚,温度上升但变化不明显;浓度会随着曲率参数的增大而增加。

2) 随着 Casson 参数或速度滑移参数的增大,速度下降且边界层变薄,温度和浓度都增加且边界层均变厚。

3) Biot 数越大,温度和浓度越大,Biot 数对温度的影响大于对浓度的影响;Prandtl 数增大时,温度下降且边界层变薄;随着 Lewis 数增大,浓度会明显下降。

4) 温度随着 Brown 运动参数或热泳参数的增加而上升;而浓度随着 Brown 运动参数的增大而减小,随着热泳参数的增大而增大,当热泳参数较大时,浓度先增大后减小,出现了“回流”现象。

5) 随着曲率半径的增大,表面摩擦力绝对值、Nusselt 数和 Sherwood 数均增大,但 Nusselt 数增大幅度很小;随着 Casson 参数的增大,表面摩擦力绝对值减小、Nusselt 数和 Sherwood 数均增大。

本文的创新点: 1) 在柱坐标系下建立拉伸缸引起的 Casson 纳米流体边界层控制方程; 2) 考虑 Casson 参数对流体流动及传热传质的影响,非 Newton 流体的表面摩擦力大于 Newton 流体; 3) 在温度和浓度方程中考虑 Brown 运动和热泳,热泳参数较大时,浓度先增大后减小,出现了“回流”现象。

### 参考文献(References):

- [1] Bég O A, Malleque K A, Islam M N. Modelling of Ostwald-de Waele non-Newtonian flow over a rotating disk in a non-Darcian porous medium[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **8**(13): 46-67.
- [2] T·哈亚特, S·A·谢赫扎德, A·阿尔舍德. Casson 流体作磁流体动力学流动时的 Soret 和 Dufour 效应[J]. *应用数学和力学*, 2012, **33**(10): 1211-1221. (Hayat T, Shehzad S A, Alsaedi A. Soret and Dufour effects in the magnetohydrodynamic (MHD) flow of Casson fluid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(10): 1211-1221. (in Chinese))
- [3] Bég O A, Makinde O D. Viscoelastic flow and species transfer in a Darcian high-permeability channel[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2011, **76**(3/4): 93-99.
- [4] Mohiddin S G, Prasad V R, Varma S V K, Bég O A. Numerical study of unsteady free convective heat and mass transfer in a Walters-B viscoelastic flow along a vertical cone[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **6**(15): 88-114.
- [5] Prasad V R, Vasu B, Bég O A, Parshad R D. Unsteady free convection heat and mass transfer in a Walters-B viscoelastic flow past a semi-infinite vertical plate: a numerical study[J]. *Thermal Sciences*, 2011, **15**(2): 291-305.
- [6] Bég O A, Takhar H S, Bharagava R, Rawat S, Prasad V R. Numerical study of heat transfer

- of a third grade viscoelastic fluid in non-Darcian porous media with thermophysical effects [J]. *Physica Scripta*, 2008, **77**(6) : 065402.
- [7] Rashidi M M, Rastegari M T, Asadi M, Bég O A. A study of non-Newtonian flow and heat transfer over a non-isothermal wedge using the homotopy analysis method[J]. *Chemical Engineering Communications*, 2012, **199**(2) : 231-256.
- [8] Huilgol R R, You Z. Application of the augmented Lagrangian method to steady pipe flows of Bingham, Casson and Herschel-Bulkley fluids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, **128**(2/3) : 126-143.
- [9] Bird R B, Dai G C, Yarusso B J. The rheology and flow of viscoplastic materials[J]. *Reviews in Chemical Engineering*, 1983, **1**(1) : 36-69.
- [10] Nagarani P, Sarojamma G, Jayaraman G. Effect of boundary absorption on dispersion in Casson fluid flow in an annulus; application to catheterized artery[J]. *Acta Mechanica*, 2009, **202**(1/4) : 47-63.
- [11] Mustafa M, Hayat T, Loan P, Hendi A. Stagnation-point flow and heat transfer of a Casson fluid towards a stretching sheet[J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2012, **67**(1/2) : 70-76.
- [12] Choi S U S, Eastman J A. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles[J]. *Materials Science*, 1995, **231** : 99-105.
- [13] Malvandi A, Ganji D D. Effects of nanoparticle migration on force convection of alumina/water nanofluid in a cooled parallel-plate channel[J]. *Advanced Powder Technology*, 2014, **25**(4) : 1369-1375.
- [14] Makinde O D, Khan W A, Khan Z H. Buoyancy effects on MHD stagnation point flow and heat transfer of a nanofluid past a convectively heated stretching/shrinking sheet [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, **62**(1) : 526-533.
- [15] Hatami M, Ganji D D. Heat transfer and flow analysis for SA-TiO<sub>2</sub> non-Newtonian nanofluid passing through the porous media between two coaxial cylinders[J]. *Journal of Molecular Liquids*, 2013, **188** : 155-161.
- [16] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik Zamp*, 1970, **21**(4) : 645-647.
- [17] Bachok N, Ishak A, Pop I. Boundary-layer flow of nanofluids over a moving surface in a flowing fluid[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2010, **49**(9) : 1663-1668.
- [18] Rashidi M M, Freidoonimehr N, Hosseini A, Bég O A, Hung T K. Homotopy simulation of nanofluid dynamics from a non-linearly stretching isothermal permeable sheet with transpiration[J]. *European Journal of Nuclear Medicine*, 2014, **26**(4) : 410-415.
- [19] Wang C Y. Fluid flow due to a stretching cylinder[J]. *Physics of Fluids*, 1988, **31**(3) : 466-468.
- [20] Ishak A, Nazar R, Pop I. Uniform suction/blowing effect on flow and heat transfer due to a stretching cylinder[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2008, **32**(10) : 2059-2066.
- [21] Ishak A, Nazar R, Pop I. Magnetohydrodynamic (MHD) flow and heat transfer due to a stretching cylinder[J]. *Energy Conversion and Management*, 2008, **49**(11) : 3265-3269.
- [22] Abbas Z, Majeed A, Javed T. Thermal radiation effects on MHD flow over a stretching cylinder in a porous medium[J]. *Heat Transfer Research*, 2013, **44**(8) : 703-718.
- [23] Hayat T, Asad S, Alsaedi A. Flow of variable thermal conductivity fluid due to inclined stretching cylinder with viscous dissipation and thermal radiation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2014, **35**(6) : 717-728.

- [24] Bachok N, Ishak A. Flow and heat transfer over a stretching cylinder with prescribed surface heat flux[J]. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2010, **4**(2): 159-169.
- [25] Mahdy A. Heattransfer and flow of a Casson fluid due to a stretching cylinder with the Soret and Dufour effects[J]. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, **88**(4): 1-9.
- [26] Rao A S, Prasad V R, Reddy N B, Bég O A. Heat transfer in a Casson rheological fluid from a semi-infinite vertical plate with partial slip [J]. *Heat Transfer—Asian Research*, 2013, **44**(3): 272-291.
- [27] Abolbashari M H, Freidoonimehr N, Nazari F, Rashidi M M. Analytical modeling of entropy generation for Casson nano-fluid flow induced by a stretching surface[J]. *Advanced Powder Technology*, 2015, **26**(2): 542-552.
- [28] Sparrow E M, Lin S H. Laminar heat transfer in tubes under slip-flow conditions[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1962, **84**(4): 363-639.
- [29] Inman R M. Heat transfer for laminar slip flow of a rarefied gas in a parallel plate channel or acircular tube with uniform wall temperature[J]. *Solar Energy*, 1965, **9**(3): 109-168.
- [30] Mukhopadhyay S, Golra R S R. Slip effects on boundary layer flow and heat transfer along a stretching cylinder[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2013, **18**(2): 447-459.
- [31] Mukhopadhyay S. MHD boundary layer slip flow along a stretching cylinder[J]. *Ain Shams Engineering Journal*, 2013, **4**(2): 317-324.
- [32] Mukhopadhyay S. Chemically reactive solute transfer in a boundary layer slip flow along a stretching cylinder[J]. *Frontiers of Chemical Science and Engineering*, 2011, **5**(3): 385-391.
- [33] Hayat T, Qayyum A, Alsaedi A. Effects of heat and mass transfer in flow along a vertical stretching cylinder with slip conditions[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2014, **129**(4): 524-531.
- [34] Majeed A, Javed T, Ghaffari A, Rashidi M M. Analysis of heat transfer due to stretching cylinder with partial slip and prescribed heat flux: a Chebyshev spectral Newton iterative scheme [J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2016, **54**(4): 1029-1036.
- [35] Megahed A M. Effect of slip velocity on Casson thin film flow and heat transfer due to unsteady stretching sheet in presence of variable heat flux and viscous dissipation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2015, **36**(10): 1273-1284.
- [36] Prasad V R, Rao A S, Reddy N B, Vasu B, Bég O A. Modelling laminar transport phenomena in a Casson rheological fluid from a horizontal circular cylinder with partial slip[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 2012, **227**(4): 309-326.
- [37] Makinde O D, Aziz A. Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, **50**(7): 1326-1332.

# Heat and Mass Transfer in the Casson Nanofluid Flow Over a Stretching Cylinder in Cylindrical Coordinates

XU Xiao-qin<sup>1,2</sup>, CHEN Shu-mei<sup>2</sup>

1. *Automobile Application Engineering Dep., Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, P.R.China;*
2. *School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350116, P.R.China)*

**Abstract:** For the first time the cylindrical coordinates were employed to study the heat and mass transfer in the steady laminar Casson nanofluid flow over a stretching cylinder in view of velocity slip and convective surface boundary conditions. The governing partial differential equations (PDEs) were transformed into highly nonlinear coupled ordinary differential equations (ODEs) via appropriate similarity transformations and then solved numerically with the shooting method. The effects of different physical parameters on velocity profiles, temperature and concentration distributions were presented graphically and analyzed in detail. The results show that the velocity is strongly influenced by the slip parameter, while the temperature and the concentration are sensitive to the Biot number and the Lewis number respectively. An increase in the Casson parameter will decelerate the flow but elevate the temperature and the concentration. Increasing the Brownian motion parameter or the thermophoresis parameter will raise the temperature. A larger concentration will come with a lower Brownian motion parameter or a higher thermophoresis parameter. The back flow exists in the concentration profile for relatively large values of the thermophoresis parameter.

**Key words:** cylindrical coordinate; Casson nanofluid; stretching cylinder; boundary layer flow; velocity slip; convective boundary condition

---

引用本文/Cite this paper:

许晓勤, 陈淑梅. 在柱坐标系下研究由拉伸缸引起的 Casson 纳米流体流动与传热传质现象[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(9): 969-980.

XU Xiao-qin, CHEN Shu-mei. Heat and mass transfer in the Casson nanofluid flow over a stretching cylinder in cylindrical coordinates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(9): 969-980.