

# 层状陶瓷的材料力和裂纹力评估方法\*

陈昌荣

(上海工程技术大学 飞行学院, 上海 201620)

**摘要:** 用  $J$  积分理论分析了层状陶瓷受弯曲载荷作用时  $J_{far(0)}$ ,  $J_{far(a)}$ ,  $J_{far(a)} - J_{far(0)}$  和  $J_{tip}$  的特点, 这里  $J_{far(0)}$ ,  $J_{far(a)}$  分别表示无裂纹时和裂纹长度为  $a$  时的远场  $J$  积分,  $J_{tip}$  表示裂尖  $J$  积分. 裂纹是垂直于界面的表面裂纹, 基本假设是裂纹只影响局部应力应变场. 由于积分路径所包围的材料界面长度随积分路径变化, 导致  $J_{far(0)}$  和  $J_{far(a)}$  都随积分路径变化, 但当积分路径远离裂纹影响区域时  $J_{far(a)} - J_{far(0)}$  不再随路径变化.  $J_{far(a)} - J_{far(0)}$  可作为非均匀材料断裂的远场驱动力参量,  $J_{tip} - (J_{far(a)} - J_{far(0)})$  可用来评价材料非均匀性对裂纹扩展驱动力的促进或抑制作用.

**关键词:**  $J$  积分; 材料非均匀性; 层状陶瓷; 内应力; 界面

**中图分类号:** O343      **文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370088

## 符号说明

$a$	裂纹长度
$h$	层状陶瓷厚度
$\sigma_{yb}$	弯曲载荷产生的 $y$ 向应力
$\sigma_{ybmax}$	弯曲载荷在层状陶瓷表面产生的 $y$ 向应力
$\sigma_{yT}$	$y$ 向内应力
$\sigma_{yTA}$	层状陶瓷的 A 材料层的 $y$ 向内应力
$C_{inh}$	材料非均匀性引起的材料力
$E_A$	层状陶瓷的 A 材料层的弹性模量
$J_{far(0)}$	无裂纹时的远场 $J$ 积分
$J_{far(a)}$	裂纹长度为 $a$ 时的远场 $J$ 积分
$J_{tip}$	裂尖 $J$ 积分, 积分路径所包围区域内不允许存在材料非均匀性
$J_{int,i}$	第 $i$ 个界面的 $J$ 积分
$L_y$	计算远场 $J$ 积分所用路径的上半部分的 $y$ 向高度
$2N$	层状陶瓷的界面数量
$W(x,y)$	在材料坐标系中的点 $(x,y)$ 的应变能密度

## 引言

自然和人造材料的内部结构大多是非均匀的, 复合材料还特意引入非均匀结构以获得需

\* 收稿日期: 2016-03-28; 修订日期: 2016-04-21

基金项目: 国家自然科学基金(51175321)

作者简介: 陈昌荣(1964—), 男, 教授, 博士(E-mail: 13761742152@163.com).

要的力学或功能特性.弹性模量、屈服强度、热膨胀系数等材料参数的非均匀性对裂纹扩展驱动力和裂纹路径有重要影响<sup>[1-2]</sup>,为了设计强度高或断裂阻力高的复合材料,需要发展断裂理论方法来预测和评价材料非均匀性对裂纹扩展驱动力的促进或抑制作用.

裂纹  $J$  积分是断裂力学中一个广受重视的参量.在均匀弹性区域内,如果一条封闭路径所包围的区域内无缺陷(例如裂纹、孔洞、夹杂、界面),则沿该路径的  $J$  积分为 0<sup>[3]</sup>;如果一条路径从裂纹下表面出发,逆时针绕过裂尖,终止在裂纹上表面,则在裂纹表面无作用力情况下  $J$  积分具有路径无关特性<sup>[4]</sup>,而且  $J$  积分值等于裂纹扩展能量释放率.裂尖  $J$  积分不易准确计算而远场  $J$  积分容易准确计算,由于  $J$  积分具有路径无关特性,可用远场  $J$  积分计算值代替裂尖  $J$  积分.然而,对于非均匀材料,如果沿裂纹方向存在材料参数变化, $J$  积分就失去了路径无关特性,只有裂尖  $J$  积分仍表示裂纹扩展能量释放率,而远场  $J$  积分失去了物理意义<sup>[5]</sup>.

层状陶瓷存在材料非均匀性和内应力,内应力分布形式与材料非均匀分布形式共同影响裂纹的扩展行为<sup>[6-8]</sup>.对于层状陶瓷,如果裂纹方向沿着界面或平行于界面,那么由于沿裂纹方向不存在材料参数变化,  $J$  积分就仍保持路径无关特性,物理含义仍是裂纹扩展能量释放率<sup>[9-10]</sup>.如果裂纹垂直于界面,那么由于沿裂纹方向在各界面处存在弹性模量突变和内应力突变, $J$  积分就失去了路径无关特性,不再等于裂纹扩展能量释放率.计算  $J$  积分时,如果所用的几个封闭路径所包围的界面数量和界面长度不同,那么由这些路径所得的  $J$  积分值就不同.所以,当裂纹垂直于界面时,如何应用  $J$  积分表达裂纹扩展驱动力是一个需要考虑的问题,这需要了解哪些因素影响  $J$  积分.

Eshelby<sup>[3,11]</sup> 的能-动量向量积分与 Rice<sup>[12]</sup> 的  $J$  积分是等价的.对于单位厚度的二维弹性体,根据 Eshelby 理论,积分路径包围裂尖时,  $J$  积分代表裂尖在材料坐标系中扩展单位长度所对应的弹性能变化量;积分路径围绕缺陷(夹杂、界面、位错等)时,  $J$  积分是封闭路径所包围的缺陷在材料坐标系中沿某坐标轴方向移动单位长度所对应的弹性能变化量.所以,  $J$  积分不仅可用于表征裂纹扩展驱动力,还可用于评价材料非均匀性<sup>[13-14]</sup>.

本文研究裂纹垂直于界面的层状陶瓷在弯曲载荷下材料力和裂纹力的特点,材料力是指材料非均匀性和内应力产生的  $J$  积分,裂纹力指引入裂纹所导致的  $J$  积分改变量.本文目的是想找出一个合适的参量来评价材料非均匀性对裂纹扩展驱动力的促进或抑制作用.

## 1 层状陶瓷广义 $J$ 积分公式

### 1.1 广义 $J$ 积分定义

Rice<sup>[12]</sup> 的  $J$  积分是沿围绕裂尖的封闭路径计算的,其目的一是表征裂纹扩展单位面积所释放的弹性能,二是表征裂尖应力场强弱程度.对于弹性材料,裂纹扩展过程中的能量耗散机制只有裂纹扩展,所以整个弹性体的能量耗散等于裂尖的能量耗散.

Rice 的裂纹  $J$  积分定义为

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (1)$$

这里  $\Gamma$  表示任意一条从裂纹下表面出发、逆时针围绕裂尖、终止于裂纹上表面的路径; $t_i$  ( $t_i = t_x, t_y$ ) 是路径  $\Gamma$  上的法向力向量  $\mathbf{t}$  的分量,力向量  $\mathbf{t}$  与应力  $\boldsymbol{\sigma}$  的关系是  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ,应力  $\boldsymbol{\sigma}$  的分量是  $\sigma_x, \sigma_y$  和  $\tau_{xy}$ ;  $\mathbf{u}$  是位移向量,  $ds$  表示沿路径  $\Gamma$  的单位长度;  $W$  是应变能密度.

广义  $J$  积分就是式(1)中的积分路径是任意一条逆时针方向的封闭路径,不限定只围绕裂尖.

## 1.2 层状陶瓷远场 $J$ 积分公式

层状陶瓷的远场  $J$  积分路径比较简单,可以推导出式(1)的简化形式.如图 1 所示,层状陶瓷由  $N+1$  层 A 材料和  $N$  层 B 材料依次叠加而成,总厚度为  $h$ ,表层为 A 材料,层状陶瓷内有  $2N$  个界面.材料坐标系的原点位于左表面, $x$  轴垂直于界面, $y$  轴平行于界面.由于对称性,只需考虑  $\Gamma$  的上半部分  $J$  积分值, $\Gamma$  的上半部分在  $y$  向的高度为  $L_y$ . $\Gamma$  的上半部分由  $\Gamma_1, \Gamma_2$  和  $\Gamma_3$  这 3 段组成:

$\Gamma_1$ :  $x = h$ ,  $y$  由 0 增大到  $L_y$ ;

$\Gamma_2$ :  $y = L_y$ ,  $x$  由  $h$  减小到 0;

$\Gamma_3$ :  $x = 0$ ,  $y$  由  $L_y$  减小到 0.

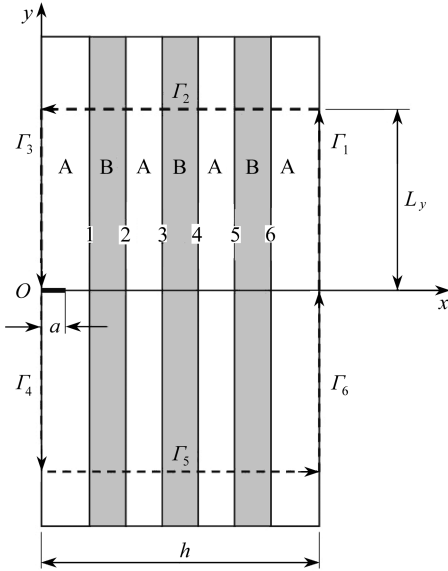


图 1 层状陶瓷远场积分路径示意图(取  $N = 3$ )

Fig. 1 The schematic for calculating the far-field  $J$ -integral of ceramic laminate ( $N = 3$ )

$u_{yb}$  是弯曲载荷产生的  $y$  向位移,  $u_{yT}$  是与内应力  $\sigma_{yT}$  对应的  $y$  向位移.

如果截面  $y = L_y$  远离裂纹,那么在弯曲载荷作用下,截面  $y = L_y$  虽然倾斜,但保持直线,所以  $u_{yb}$  对  $x$  的导数是常量;与内应力对应的  $y$  向位移  $u_{yT}$  在每层是常量,所以  $u_{yT}$  对  $x$  的导数为 0,即

$$\frac{\partial u_{yb}}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial u_{yT}}{\partial x} = 0.$$

则式(3)可进一步简化为

$$J_{\Gamma_2} = c \int_0^h (\sigma_{yb} + \sigma_{yT}) dx. \quad (4)$$

由于沿截面  $y = L_y$  的  $y$  向内应力总和为 0,  $y$  向弯曲应力总和也为 0,所以式(4)变成

$$J_{\Gamma_2} = 0. \quad (5)$$

沿  $\Gamma_3$  的积分:

$x = 0$  是自由表面,与沿  $\Gamma_1$  的积分类似,沿  $\Gamma_3$  的积分式可简化为

$$J_{\Gamma_3} = - \int_0^{L_y} W(0, y) dy. \quad (6)$$

下面推导沿  $\Gamma_1, \Gamma_2$  和  $\Gamma_3$  这 3 段的  $J$  积分简化形式.

沿  $\Gamma_1$  的积分:

$x = h$  是自由面,无表面力,所以式(1)中的第二项对  $J$  积分无贡献,式(1)可简化为

$$J_{\Gamma_1} = \int_0^{L_y} W(h, y) dy. \quad (2)$$

沿  $\Gamma_2$  的积分:

由于  $dy = 0$ ,所以式(1)的应变能密度  $W$  对  $J$  积分无贡献.当  $L_y$  足够大时,  $\Gamma_2$  处的应力与无裂纹时相同,  $\sigma_x = 0$ ,式(1)变成

$$J_{\Gamma_2} = - \int_h^0 \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} dx = \int_0^h \left( (\sigma_{yb} + \sigma_{yT}) \left( \frac{\partial u_{yb}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yT}}{\partial x} \right) \right) dx, \quad (3)$$

$\sigma_{yb}$  是弯曲载荷产生的  $y$  向应力,  $\sigma_{yT}$  是由材料 A, B 热胀系数差异及固体相变产生的  $y$  向内应力;

所以,沿完整路径  $\Gamma$  的  $J$  积分公式可简化为

$$J_{\Gamma} = 2(J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{\Gamma_3}) = 2 \int_0^{h_y} (W(h, y) - W(0, y)) dy. \quad (7)$$

### 1.3 层状陶瓷的界面 $J$ 积分公式

在层状陶瓷积分路径  $\Gamma$  所包围的区域内有  $2N$  个界面,第  $i$  个界面的  $J$  积分为

$$J_{\text{int},i} = 2 \int_0^{h_y} (W(x_{i,r}, y) - W(x_{i,l}, y)) dy, \quad (8)$$

这里  $x_{i,r}$  和  $x_{i,l}$  分布表示第  $i$  个界面右侧和左侧的  $x$  坐标值。

在层状陶瓷中,不仅裂尖产生  $J$  积分,界面也产生  $J$  积分.由于在材料坐标系中,界面没有移动,界面也就没有耗散能量,所以层状陶瓷总的能量耗散应等于裂尖的能量耗散.弹性界面没有耗散能量,却对  $J$  积分有贡献,所以如果  $J$  积分路径  $\Gamma$  包围的区域内存在界面, $J$  积分就不等于裂尖的能量释放率。

## 2 远场 $J$ 积分与裂尖 $J$ 积分的关系式

### 2.1 非均匀材料远场 $J$ 积分与裂尖 $J$ 积分的关系式

在非均匀材料中,裂尖  $J$  积分  $J_{\text{tip}}$  与远场  $J$  积分  $J_{\text{far}}$  的关系是<sup>[15-17]</sup>

$$J_{\text{tip}} - J_{\text{far}} = C_{\text{inh}}. \quad (9)$$

这里材料非均匀性参量  $C_{\text{inh}}$  用来衡量材料参数变化所产生的抑制或促进裂纹扩展的作用,材料参数的变化可以是连续的(例如梯度材料),或在界面处突变的(例如层状陶瓷); $J_{\text{tip}}$  是控制裂纹扩展的参量,即  $J_{\text{tip}}$  具有表示裂纹扩展驱动力的物理含义<sup>[2]</sup>.计算  $J_{\text{tip}}$  时用的积分路径所包围的区域内不允许存在材料非均匀性,对于层状陶瓷就是限定  $J_{\text{tip}}$  的积分路径不允许穿越界面或接触界面。

### 2.2 层状陶瓷远场 $J$ 积分与裂尖 $J$ 积分的关系式

对于层状陶瓷,由于  $J_{\text{far}}$  和  $C_{\text{inh}}$  在积分路径远离裂纹时仍是路径相关的,所以式(9)对于层状陶瓷没有应用价值.为了使式(9)具有物理意义,应把  $J_{\text{far}}$  和  $C_{\text{inh}}$  用路径无关参量取代.本文提出用  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  取代  $J_{\text{far}}$ ,用  $C_{\text{inh}(a)} - C_{\text{inh}(0)}$  取代  $C_{\text{inh}}$ ,这是因为  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  和  $C_{\text{inh}(a)} - C_{\text{inh}(0)}$  只在裂纹影响区内是路径相关的,在积分路径远离裂纹时与积分路径无关.推导如下:

裂纹长度为  $a$  时,根据式(9),

$$J_{\text{tip}(a)} - J_{\text{far}(a)} = C_{\text{inh}(a)}; \quad (10a)$$

无裂纹时,

$$-J_{\text{far}(0)} = C_{\text{inh}(0)}. \quad (10b)$$

式(10a)减式(10b),得

$$J_{\text{tip}(a)} - (J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}) = C_{\text{inh}(a)} - C_{\text{inh}(0)}. \quad (11)$$

远场积分路径  $\Gamma$  所包围区域的非均匀材料力等于各界面的材料力之和,而界面的材料力等于界面  $J$  积分的负值,所以

$$C_{\text{inh}(a)} - C_{\text{inh}(0)} = \sum_{i=1}^{2N} (C_{\text{int},i(a)} - C_{\text{int},i(0)}) = - \sum_{i=1}^{2N} (J_{\text{int},i(a)} - J_{\text{int},i(0)}). \quad (12)$$

把式(12)代入式(11),得

$$J_{\text{tip}(a)} - (J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}) = - \sum_{i=1}^{2N} (J_{\text{int},i(a)} - J_{\text{int},i(0)}). \quad (13)$$

令  $\Delta J_{\text{far}} = J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$ ,  $\Delta J_{\text{int},i} = J_{\text{int},i(a)} - J_{\text{int},i(0)}$ , 则式(13)可写为

$$J_{\text{tip}} - \Delta J_{\text{far}} = - \sum_{i=1}^{2N} \Delta J_{\text{int},i}. \quad (14)$$

式(14)中的  $\Delta J_{\text{far}}$  表示引进裂纹所导致的远场  $J$  积分的改变量,  $\Delta J_{\text{int},i}$  表示引进裂纹所导致的第  $i$  个界面的  $J$  积分的改变量。

### 3 层状陶瓷 $J$ 积分的特点分析

#### 3.1 层状陶瓷无裂纹时 $J$ 积分的特点

利用式(7)可分析无裂纹时  $J$  积分的特点。无裂纹时,左表面  $x=0$  和右表面  $x=h$  的  $y$  向应力分别是

$$\begin{aligned} \sigma_y \Big|_{x=0} &= \sigma_{yb\max} + \sigma_{y\text{TA}}, \\ \sigma_y \Big|_{x=h} &= -\sigma_{yb\max} + \sigma_{y\text{TA}}, \end{aligned}$$

这里,  $\sigma_{yb\max}$  表示弯曲载荷在表面  $x=0$  产生的  $y$  向拉应力,  $\sigma_{y\text{TA}}$  表示 A 材料层的  $y$  向内应力。应变能密度  $W = \sigma_y^2 / (2E'_A)$ ,  $E'_A$  表示 A 材料层在平面应变条件下的弹性模量,  $E'_A = E_A / (1 - \nu^2)$ 。

因为

$$\begin{aligned} W(0,y) &= \frac{(\sigma_{yb\max} + \sigma_{y\text{TA}})^2}{2E'_A}, \\ W(h,y) &= \frac{(-\sigma_{yb\max} + \sigma_{y\text{TA}})^2}{2E'_A}, \end{aligned}$$

所以

$$W(h,y) - W(0,y) = - \frac{2\sigma_{yb\max}\sigma_{y\text{TA}}}{E'_A}. \quad (15)$$

将式(15)代入式(7)得

$$J_{\text{far}(0)} = -4L_y \frac{\sigma_{yb\max}\sigma_{y\text{TA}}}{E'_A}. \quad (16)$$

由式(16)可以得出结论:当弯曲应力和内应力都存在时,  $J_{\text{far}(0)}$  不为 0; 无内应力或无弯曲应力时  $J_{\text{far}(0)}$  为 0, 这是因为只存在内应力突变时各界面的  $J$  积分相互抵消, 而只存在弯曲应力突变时各界面的  $J$  积分也相互抵消; 表层的内应力为压时  $J_{\text{far}(0)}$  为正, 表层的内应力为拉时  $J_{\text{far}(0)}$  为负;  $J_{\text{far}(0)}$  与  $L_y$  长度成正比, 因而是与路径相关的。

#### 3.2 无内应力的层状陶瓷引入表面小裂纹后远场 $J$ 积分的特点

由于不存在内应力, 根据式(16), 无裂纹的层状陶瓷在弯曲载荷作用下的远场  $J$  积分为 0, 即  $J_{\text{far}(0)} = 0$ 。如果引入一个长度为  $a$  的垂直于界面的表面裂纹, 假设在左表面  $x=0$  的  $-fa \leq y \leq fa$  区间之外的应力应变场与引入裂纹前相同, 这里  $f$  为系数, 那么  $-fa \leq y \leq fa$  区域之外的应力应变场对  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  无贡献。

由于裂纹截断了  $y$  向应力传递, 在表面  $x=0$  的  $-fa \leq y \leq fa$  区间可取  $y$  向应力为 0。假设在表面  $x=h$  的  $-fa \leq y \leq fa$  区间内  $y$  向应力不受裂纹影响, 仍为  $-\sigma_{yb\max}$ , 则由式(7)可得远场  $J$  积分为

$$J_{\text{far}(a)} = 2 \int_0^{fa} (W(h,y) - W(0,y)) dy \approx 2 \int_0^{fa} \frac{(-\sigma_{yb\max})^2}{2E'_A} dy \approx \frac{fa\sigma_{yb\max}^2}{E'_A}. \quad (17)$$

裂尖  $J$  积分与应力强度因子之间的关系是

$$J_{\text{tip}} = K_I^2 / E'_A. \quad (18)$$

如果裂纹长度相对于层状陶瓷厚度很小, 只有第一层陶瓷的厚度的几分之一, 这时裂尖与

界面的相互影响小,而界面  $J$  积分相互抵消,所以  $J_{\text{far}(a)}$  近似等于  $J_{\text{tip}}$ ,可用下面的方法粗略估算层状陶瓷左表面受裂纹影响的区间大小.已知表面小裂纹的应力强度因子公式为

$$K_I = 1.12\sigma_{yb\max}\sqrt{\pi a}, \quad (19)$$

由式(18)可得

$$J_{\text{far}(a)} \approx J_{\text{tip}} = 1.12^2\pi a\sigma_{yb\max}^2/E'_A, \quad (20)$$

比较式(17)和式(20)可得

$$f = 1.12^2\pi \approx 4.$$

根据式(20)可得出有表面小裂纹、无内应力的层状陶瓷在弯曲载荷作用下远场  $J$  积分的特点:如果积分路径远离裂纹,则  $J_{\text{far}(a)}$  与  $L_y$  无关;表面小裂纹在表面的影响区间约为  $-4a \leq y \leq 4a$ .

### 3.3 有内应力的层状陶瓷引入表面小裂纹后 $J$ 积分改变量的特点

有内应力的层状陶瓷承受弯曲载荷作用,根据式(16),无裂纹时的远场  $J$  积分为  $J_{\text{far}(0)} = -4L_y\sigma_{yb\max}\sigma_{yTA}/E'_A$ .如果引入一个长度为  $a$  的垂直于界面的表面小裂纹,则远场  $J$  积分的改变量为

$$J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)} \approx 2\int_0^{fa} (\Delta W(h,y) - \Delta W(0,y)) dy. \quad (21)$$

在  $-fa \leq y \leq fa$  区间,

$$\Delta W(h,y) = 0, \Delta W(0,y) = -\frac{(\sigma_{yb\max} + \sigma_{yTA})^2}{2E'_A}. \quad (22)$$

将式(22)代入式(21),得

$$J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)} \approx \frac{fa(\sigma_{yb\max} + \sigma_{yTA})^2}{E'_A}, \quad (23)$$

式中,  $f \approx 4$ .

根据式(23),弯曲载荷作用下有内应力的层状陶瓷若引入表面小裂纹,则远场  $J$  积分的改变量  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  具有如下特点:如果积分路径远离裂纹,  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  与  $L_y$  无关;  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  与裂纹长度  $a$  成正比;  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  正比于表面弯曲应力与表面内应力之和的平方.

当表面裂纹长度接近、等于、超过第1层材料厚度时,就不能按上述方法估算裂纹影响区间的大小了,此时用公式方法分析裂纹影响区间大小过于麻烦,应改用离散方法<sup>[18]</sup>,即用有限元方法来分析.有限元方法与内聚力模型相结合不仅非常适合用于分析界面裂纹扩展<sup>[19]</sup>,也可用于分析垂直穿越界面的裂纹扩展<sup>[20]</sup>.

## 4 结 论

本文分析了层状陶瓷在弯曲载荷作用下  $J$  积分的特点,裂纹方向垂直于界面,结论如下:

1) 无裂纹时,远场  $J$  积分  $J_{\text{far}(0)}$  正比于表面内应力与表面弯曲应力的乘积,内应力与弯曲应力都存在时  $J_{\text{far}(0)}$  不为0,无内应力或无弯曲应力时  $J_{\text{far}(0)}$  为0;表面内应力状态为压时  $J_{\text{far}(0)} > 0$ ,表面内应力状态为拉时  $J_{\text{far}(0)} < 0$ .

2) 无裂纹时的远场  $J$  积分  $J_{\text{far}(0)}$  和裂纹长度为  $a$  时的远场  $J$  积分  $J_{\text{far}(a)}$  都是路径相关的,但  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  在积分路径远离裂纹时与路径无关.  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  的物理含义是:引入裂纹所产生的远场  $J$  积分改变量.

3) 如果表面裂纹长度相对于层状陶瓷厚度很小,则  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  与裂纹长度成正比,与表面内应力、表面弯曲应力之和的平方成正比;表面受裂纹影响的区间约为  $-4a \leq y \leq 4a$ .

4) 裂尖  $J$  积分  $J_{\text{tip}}$  表示裂纹扩展能量释放率,  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  表示断裂的远场驱动力,  $J_{\text{tip}} - (J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)})$  表示材料非均匀性对裂尖驱动力的促进或抑制作用。

#### 参考文献(References):

- [1] Kolednik O, Predan J, Gubelj N, Fischer F D. Modeling fatigue crack growth in biomaterial specimen with the configurational force concept[J]. *Materials Science and Engineering; A*, 2009, **519**(1/2): 172-183.
- [2] Fischer F D, Predan J, Müller R, Kolednik O. On problems with the determination of the fracture resistance for materials with spatial variations of the Young's modulus[J]. *International Journal of Fracture*, 2014, **190**(1): 23-38.
- [3] Eshelby J D. The elastic energy-momentum tensor[J]. *Journal of Elasticity*, 1975, **5**(3): 321-335.
- [4] CHEN Wen-hua, WU Chei-wei. On the  $J$ -integral for a pressurized crack in bonded materials [J]. *International Journal of Fracture*, 1980, **16**(2): R47-R51.
- [5] Riemelmoser O, Pippan R. The  $J$ -integral at Dugdale cracks perpendicular to interfaces of materials with dissimilar yield stresses[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, **103**(4): 397-418.
- [6] Chen C R, Pascual J, Fischer F D, Kolednik O, Danzer R. Prediction of the fracture toughness of a ceramic multilayer composite: modeling and experiments[J]. *Acta Materialia*, 2007, **55**(2): 409-421.
- [7] Chen C R, Bermejo R, Kolednik O. Numerical analysis on special cracking phenomena of residual compressive inter-layer in ceramic laminates[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, **77**(13): 2567-2576.
- [8] Bermejo R, Torres Y, Sánchez-Herencia A J, Baudín C, Anglada M, Llanes L. Residual stresses, strength and toughness of laminates with different layer thickness ratios[J]. *Acta Materialia*, 2006, **54**(18): 4745-4757.
- [9] Sun C T, Wu X X. On the  $J$ -integral in periodically layered composites[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, **78**(1): 89-100.
- [10] Rask M, Sorensen B F. Determination of the  $J$  integral for laminated double cantilever beam specimens: the curvature approach[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, **96**: 37-48.
- [11] Eshelby J D. The force on an elastic singularity[J]. *Phil Trans R So Lond A*, 1951, **244**(871): 87-112.
- [12] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, **35**(2): 379-386.
- [13] Nguyen T D, Govindjee S, Klein P A, Gao H. A material force method for inelastic fracture mechanics[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2005, **53**(1): 91-121.
- [14] Markenscoff X. Driving forces on phase boundaries: the Eshelby principle for an interface[J]. *International Journal of Fracture*, 2010, **165**(2): 223-227.
- [15] Simha N K, Fischer F D, Shan G X, Chen C R, Kolednik O.  $J$ -integral and crack driving force in elastic-plastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, **56**(9): 2876-2895.
- [16] Simha N K, Fischer F D, Kolednik O, Chen C R. Inhomogeneity effects on the crack driving force in elastic and elastic-plastic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(1): 219-240.
- [17] Fischer F D, Predan J, Kolednik O, Simha N K. Application of material forces to fracture of

- inhomogeneous materials: illustrative examples[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, **77**(2): 95-112.
- [18] 钟万勰. 力学与对称-离散: 祖冲之方法论[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(1): i-ii. (ZHONG Wan-xie. Mechanics and symmetry-discretization: Zu-type methodology[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): i-ii. (in Chinese))
- [19] Tang S, Guo T F, Cheng L. Mode mixity and nonlinear viscous effects on toughness of interfaces[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(9): 2493-2511.
- [20] 陈昌荣. 适合裂尖穿越界面行为分析的断裂模拟方法研究[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(9): 979-985. (CHEN Chang-rong. On the fracture modeling method for crack tips penetrating elastic interfaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 979-985. (in Chinese))

## A Method for Evaluating Material Forces and Crack Forces in Ceramic Laminates

CHEN Chang-rong

(School of Flight Technology, Shanghai University of Engineering Science,  
Shanghai 201620, P.R.China)

**Abstract:** Characteristics of  $J_{\text{far}(0)}$ ,  $J_{\text{far}(a)}$ ,  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  and  $J_{\text{tip}}$  were analyzed for ceramic laminates under bending loads based on the  $J$ -integral theory. Here  $J_{\text{far}(0)}$  and  $J_{\text{far}(a)}$  were the far-field  $J$ -integrals corresponding to crack lengths 0 and  $a$  respectively. The crack was perpendicular to the interfaces. A basic assumption was that the crack length was small compared with the laminate thickness, and the stress and strain fields in the region far from the crack were little influenced by the crack. Both  $J_{\text{far}(0)}$  and  $J_{\text{far}(a)}$  were path-dependent, because the lengths of the interfaces enclosed by the path of integration varied with the path. However,  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  became path-independent when the path was far from the crack.  $J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)}$  was seen as a parameter to represent the global driving force for fracture. The purpose is to make the present method available to evaluate the inhibiting or boosting effects of material inhomogeneities on the crack tip driving force by  $J_{\text{tip}} - (J_{\text{far}(a)} - J_{\text{far}(0)})$ .

**Key words:**  $J$ -integral; material inhomogeneity; ceramic laminate; internal stress; interface

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51175321)

引用本文/Cite this paper:

陈昌荣. 层状陶瓷的材料力和裂纹力评估方法[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(7): 748-755.

CHEN Chang-rong. A method for evaluating material forces and crack forces in ceramic laminates [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 748-755.