

# 基于非结构自适应网格的二维 Euler 方程 数值求解方法研究\*

杨雨薇<sup>1</sup>, 虞佳磊<sup>2</sup>, 张亚萍<sup>1</sup>, 李幸刚<sup>1</sup>, 邱晓朴<sup>1</sup>

(1. 云南师范大学 信息学院, 昆明 650000;  
2. 南京航空航天大学 航空宇航学院, 南京 210000)

**摘要:** 提出了一种基于非结构自适应网格的二维 Euler 方程的数值解法.采用有限体积法进行空间离散, 通量计算采用 Jamson 中心格式, 使得它适用于任意多边形计算单元.为了得到定常解, 采用一种显式的四步 Runge-Kutta 迭代方法对时间进行积分.根据流场参数的变化梯度确定加密边, 由加密准则进行自适应网格剖分, 然后得到分布合理的加密过后的网格.求解二维 Euler 方程, 对 NACA0012 翼型进行了数值模拟, 通过对自适应前后的数值解的对比, 说明所建立的方法是正确的.

**关键词:** Euler 方程; 数值解法; 非结构网格; 自适应网格

**中图分类号:** O351      **文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370077

## 引言

随着计算机技术的进步和流体力学理论的日渐完善, 计算流体力学 (computational fluid dynamics) 已成为飞行器空气动力设计中的常用工具<sup>[1]</sup>.虽然许多现有方法相当准确和健全, 但仍有一定的局限性.例如基于无粘可压流动 Euler 方程的数值解法, 该分析方法可以计算在高 Reynolds (雷诺) 数下翼型的气动特性, 但常常仅限于简单的几何形状, 例如单段翼型.所以, 人们提出了两种网格生成技术来克服这些问题: 多块结构化方法与非结构化方法<sup>[2]</sup>.

非结构网格 (特别是非结构/结构混合网格) 以其具有对复杂几何外形较好的适应能力和良好的网格自动生成能力, 近年来被广泛应用.但是, 在网格生成时由于无法精确判断流场结构, 给网格布点带来难度.因此, 需要寻求一种网格, 在流场梯度较大的地方是加密网格, 而在流场梯度平缓的地方是稀疏网格, 这样就达到了提高计算精度与节省计算资源的双目标<sup>[3]</sup>.在这个背景下, 自适应网格方法应运而生.

本文以非结构自适应网格生成技术为中心开展研究, 其目的是使跨音速流场中的非结构网格技术的模拟能力得到改进.构造各类自适应探测器是网格自适应技术的核心.不同的网格

\* 收稿日期: 2016-03-16; 修订日期: 2016-07-07

基金项目: 国家自然科学基金 (61262070; 61462097)

作者简介: 杨雨薇 (1993—), 女, 硕士生 (E-mail: 18287112897@163.com);

张亚萍 (1979—), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师 (通讯作者. E-mail: zhangyp79@sina.com).

自适应方法所运用的探测器是不一样的.到目前为止,构造自适应探测器的典型方法主要有两类<sup>[4]</sup>.一类是基于流动特征的传统方法,一类是基于敏感性性能分析的新兴方法.本文致力于传统方法的研究,基于流场的流动特征进行自适应加密.

网格自适应系统对众多 CFD 问题具有较强的应用性,是网格精细化控制的体现,大大节省了时间和计算资源,缩短工作周期.但是并没有一种自适应方法可以解决大部分问题,具体的情况仍需采用不同的自适应方法来取得更大的优势,因此开展非结构网格的自适应方法研究仍具有重要的理论意义和工程应用价值<sup>[5]</sup>.

## 1 Euler 方程数值解法

### 1.1 流动控制方程

流动控制方程总表达式包括质量、动量、能量守恒方程<sup>[6]</sup>,可以表示为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v) ds = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{W}$  是守恒变量,  $\mathbf{F}_c$  为对流量,  $\mathbf{F}_v$  为粘性通量,  $\mathbf{Q}$  为源项. Euler 方程是上述方程去除粘性通量和源项的简化形式.在以  $S$  为边界的体  $\Omega$  的二维区域中, Euler 方程可以简化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega + \int_S (\mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx) = 0, \quad (2)$$

$x$  和  $y$  是以直角坐标系为标准的横、纵坐标<sup>[7]</sup>,  $\mathbf{W}$  是守恒变量,  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{G}$  为通量矢量,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + P \\ \rho UV \\ \rho UH \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho UV \\ \rho V^2 + P \\ \rho VH \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中  $\rho, P, H$  和  $E$  分别是密度、压强、单位质量总焓和单位质量的总能量,  $U$  和  $V$  是速度矢量的直角坐标分量.

### 1.2 空间有限体积离散方法

#### 1.2.1 有限体积法

计算域由有限个不重叠的单元组成,每个单元都运用积分形式的守恒方程.由于域内的任何单元都是时间连续的,所以方程可写成

$$\frac{d\mathbf{W}_m}{dt} = - \frac{\int_S (\mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx)}{\int_{\Omega} d\Omega}, \quad (4)$$

在这里,  $S$  和  $\Omega$  随具体的单元进行变化,其中  $\mathbf{W}_m$  包含单元格的平均值.运用有限体积对方程的时间依赖积分形式进行空间离散,定常解由时间上的半离散方程运算得到<sup>[8]</sup>.

很多关于时间的常微分方程是由空间离散方程(4)在时间离散之前(线法)生成的:

$$\frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = - \mathbf{Q}_k / \Omega_k. \quad (5)$$

求和是沿着组成第  $k$  个单元的边进行的.第  $i$  条边的通量采用中心单元有限体积方法在相邻的  $k$  和  $p$  单元( $k$  和  $p$  单元中,保守变量位于单元中心)用简单的变量平均计算,如图 1 所示.

单元  $k$  被应用到离散形式的 Euler 方程中,方程(5)变为

$$\frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = -\frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^{K_e} \begin{bmatrix} Z_i \rho \\ Z_i \rho U_i + P \Delta y_i \\ Z_i \rho V_i - P \Delta x_i \\ Z_i \rho H \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中,  $Z_i = U_i \Delta y_i - V_i \Delta x_i$ ,  $\Delta x_i = x_b - x_a$ ,  $\Delta y_i = y_b - y_a$ ,  $K_e$  表示围绕一个网格单元的所有边。

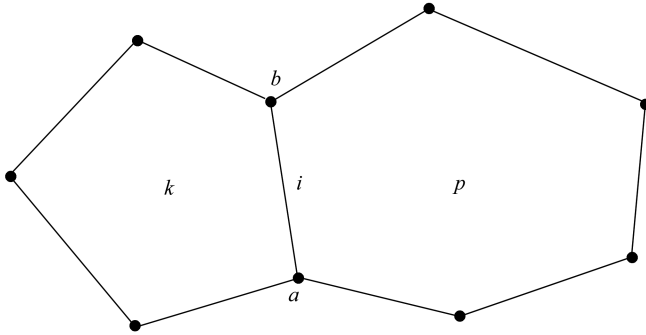


图 1 单元中心、边和网格顶点的定义

Fig. 1 The definition of the cell center, edge, and the vertices of the grid

### 1.2.2 基于非结构网格的实现方法

结构网格的方式不能代替非结构网格,这是由于在物理平面中点矩阵中的相邻单元并不是相邻的点.对于非结构网格来说,一个用于存放必要的信息(如:坐标向量、边的数量、单元数量等)的连接矩阵是不可缺少的.在目前的工作中,运用单元中心有限体积方法可以有效减少连通信息的存储。

连接矩阵是按照单元的边创设的而不是单元自身.在连接矩阵中,每条边只呈现一次,计算是沿所有边循环进行的,所以量是累积获得的.这种十分简单的循环布局可以用下面一串逻辑命令申明:

```
do i = 1, nedges
    k = connmatrix(i, 1)
    a = connmatrix(i, 2)
    b = connmatrix(i, 3)
    p = connmatrix(i, 4)
    flux = function(k, a, b, p)
    sum(k) = sum(k) + flux
    sum(p) = sum(p) - flux
end do
```

其中, nedges 是所有网格单元全部的边。

### 1.3 Jamson 中心格式

#### 1.3.1 人工耗散

中心单元方案一般是非耗散的,因此任何误差(离散误差、舍入误差等)在计算过程中都不会衰减而且定常解常会有振荡的情况出现<sup>[9]</sup>。

为了消弭这些振荡项,在方程(5)的右侧加入人工耗散项,因此,方程(5)变为

$$\frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = -(\mathbf{Q}_k - \mathbf{D}_k) / \Omega_k. \quad (7)$$

### 1.3.2 基于非结构网络的实现方法

采取有限体积方法,所有通过边的通量求和计算可以得到非结构网络的耗散函数:

$$\mathbf{D}_k = \sum_{i=1}^{K_e} d_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{K_e} d_i^{(4)}. \quad (8)$$

同样,对于非结构网络,按照保守变量第二和第四差分项,方程可以变化为

$$\begin{cases} d_i^{(2)} = \alpha_i \varepsilon_i^{(2)} (\mathbf{W}_p - \mathbf{W}_k)_i, \\ d_i^{(4)} = \alpha_i \varepsilon_i^{(4)} (\nabla^2 \mathbf{W}_p - \nabla^2 \mathbf{W}_k)_i. \end{cases} \quad (9)$$

在边的基础上构造了振动传感器和比例因子,而且只使用了来自两个相邻单元  $k$  和  $p$  的流动变量.

这样,自适应系数变为

$$\begin{cases} \varepsilon_i^{(2)} = k^{(2)} v_i, \\ \varepsilon_i^{(4)} = \max(0, k^{(4)} - \varepsilon_i^{(2)}), \end{cases} \quad (10)$$

这里,  $k^{(2)}$  和  $k^{(4)}$  是两个经验选择的常数,它们值的变化范围为

$$1/256 < k^{(4)} < 1/32 \text{ 和 } 1/2 < k^{(2)} < 1.0.$$

比例因子  $\alpha_i$  基于沿合适的单元边界的 Jacobi(雅克比)矩阵  $\partial \mathbf{F}_c / \partial \mathbf{W}$  的谱半径求得:

$$\alpha_i = |U \Delta y_i - V \Delta x_i| + c \sqrt{(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)}, \quad (11)$$

这里  $U, V$  和  $c$  是在分裂边上的平均值,  $c$  是当地音速.

## 1.4 时间离散(四步 Runge-Kutta 方法)

定常解是通过常微分方程组在时间上的积分获得的,可以写成

$$\frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = \mathbf{R}_k. \quad (12)$$

方程(12)采用一种显式的四步 Runge-Kutta 方法对时间进行积分.由于时间的准确性对定常解不是很重要,所以只要根据它们的稳定区域和阻尼来选择程序即可.

当运用于非定常 Euler 方程时,上述模型有一个最大 CFL 数  $2\sqrt{2}$ .这种显式方案的主要缺点是由于有限的稳定区域的存在,它的最大允许时间步长的量级被限制了.对于有任意形状的网络,采用如下形式:

$$\Delta t_k = \sum_{i=1}^{K_e} \frac{\Omega_k}{|U_i \Delta y_i - V_i \Delta x_i| + c_i \sqrt{(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)}}. \quad (13)$$

## 1.5 边界条件

### 1.5.1 物面边界

对于无粘流动,固体边界运用了一种流动相切条件<sup>[10]</sup>,即把通过边界的速度通量设置为 0.目前采用一个简单的方法:让物面上的压力与相邻边界单元中心的压力相等.

由于垂直于物面边界的速度通量为 0,可以得出

$$Z_i = U_i \Delta y_i - V_i \Delta x_i = 0. \quad (14)$$

之前的式(6)经推导变成

$$\frac{d\mathbf{W}_k}{dt} = -\frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^{K_e} \begin{bmatrix} Z_i \rho \\ Z_i \rho U_i + P \Delta y_i \\ Z_i \rho V_i - P \Delta x_i \\ Z_i \rho H \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^{K_e} \begin{bmatrix} 0 \\ P \Delta y_i \\ -P \Delta x_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$



### 1.5.2 远场边界

因为求解方程的计算面积是有限的,因此还需考虑地域边缘的边界条件<sup>[11]</sup>.远场边界条件的要求就是没有向外流动的波被反射到计算区域中,影响原来的计算.远场边界条件一共分为4种情况:超声速入流、超声速出流、亚音速入流、亚音速出流<sup>[12]</sup>.

## 2 自适应方法及其实现

### 2.1 自适应方法

本文采取局部加密网格的办法(又叫做 h-refinement)来进行自适应网格生成<sup>[13]</sup>.h-refinement 利用细化网格单元的办法来实现自适应网格的生成,一般分为点插入、粗网格细分和网格重构3类方法.网格自适应技术中会用到两个主要步骤.首先,确定在这一网格区域中是否需要自适应处理,如通过误差估计或流场特征等检测手段进行判别.其次,根据所用的自适应准则对需要自适应处理的网格区域进行加密处理.

本文采取粗网格细分法,即对原始生成的粗网格不断进行加密和细化处理(并不考虑网格的合并过程).主要是针对网格对流场特征(如压力,密度等)的自适应.该方法主要依赖的是自适应探测器所标记出来的边.按照边的标记情况进行划分,非结构三角形网格可以有3种细分的模式,分别为二分模式、三分模式和四分模式<sup>[14]</sup>,如图2所示.

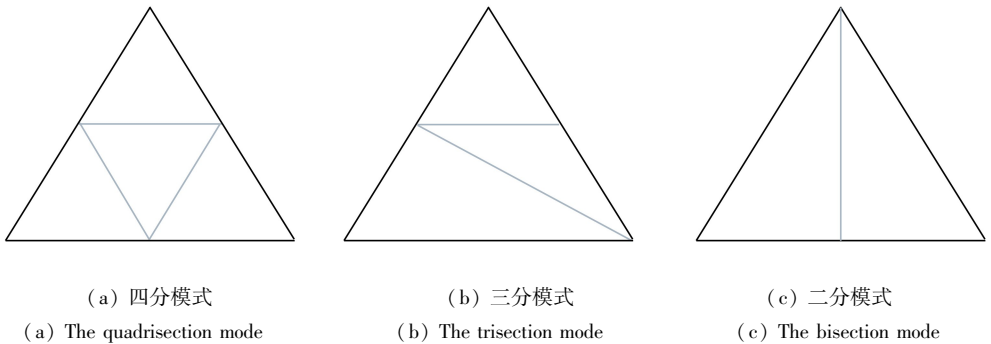


图2 网格划分模式

Fig. 2 The grid partitioning modes

自适应准则定义如下:用户给定全局加密阈值  $\varepsilon$ ,判断当地探测值与全局加密阈值的比值  $\eta$  是否大于1,如该条件成立,则对所在的单元进行标记并进行加密.标记完后,对已经加密的网格和未做加密处理的网格之间的网格单元做光滑处理.

本文选取的是激波探测器,基于流场内的压力梯度分布变化进行判断,利用如下公式:

$$v_i = \frac{|P_{pi} - P_{ki}|}{|P_{pi} + P_{ki}|}, \tag{16}$$

阈值公式

$$\varepsilon = v_{\max} \times \omega, \tag{17}$$

这里  $\varepsilon$  为全局的加密阈值,  $v_{\max}$  为流场内所有边的探测值的最大值,  $\omega$  是选取的比例系数,这里取0.03.

自适应网格加密的一般步骤为

- 1) 计算得到粗网格上的流场解;
- 2) 根据选定的激波探测器,计算出每条边上的探测值,同时计算得到阈值  $\varepsilon$ ;
- 3) 由自适应准则,对满足细分条件的网格边作细分标志,即对该边两侧的网格单元进行

加密处理;

- 4) 检查所有网格单元,对已加密和未被加密网格单元之间的网格进行光顺加密处理;
- 5) 计算细网格上的流场解;
- 6) 返回步骤 2),直到得到一个计算精度满足要求的数值解。

## 2.2 非结构网格数据结构更新

原始的网格数据结构包括点的编号及其坐标,每次自适应结束,必然会出现新的点、网格单元以及边,同时网格单元的面积也会发生一定的变化,网格数据结构的改变必须与计算过程同步,否则计算出错<sup>[15]</sup>。每次网格单元进行剖分后,原始的点( $p_1, p_2, p_3$ )保持不变,仅仅是增加了新的点(图3),这里可以建立一个新的点坐标矩阵 $xy(2, n)$ (2表示 $x$ 和 $y$ 方向, $n$ 表示一共有多少点),把原始的点坐标依次赋予新的点坐标矩阵,对于新增的点再按顺序添加到点数据矩阵内。

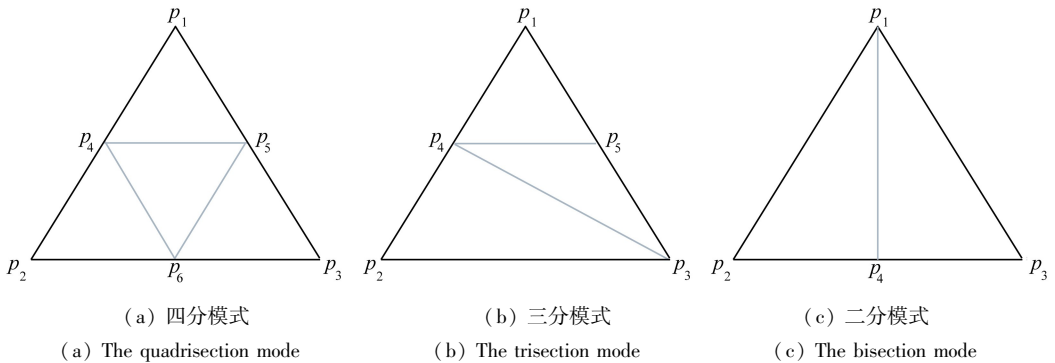


图3 新增加的点

Fig. 3 The newly added points

在求解每个网格单元的面积时,已知每个网格单元的顶点坐标,可得3条边的边长 $a, b, c$ ,利用Heron(海伦)公式:

$$\begin{cases} p = (a + b + c)/2, \\ S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \end{cases} \quad (18)$$

## 2.3 自适应的目的

本文进行网格自适应是为了精确模拟激波位置,使计算结果更加精确。实际上在同一Mach(马赫)数同一高度下,一个翼型的激波位置是可以大致确定的。本文采用局部网格加密(粗网格细分法),是对激波周围原始粗网格进行不断的细化加密,目的就是使激波位置和计算结果更加精确,并不考虑网格的合并过程。

# 3 数值实验

## 3.1 初始计算结果

为了验证所编求解器的正确性,下面对NACA0012翼型进行了跨声速下的数值模拟。Mach数为0.85,迎角是 $1.25^\circ$ ,高度为3 km, CFL数取2.8。

### 3.1.1 初始网格划分

本文中采用NACA0012翼型,选取的二维计算域如图4所示。整个计算区域为 $10 \times 10$ 的矩形(自由来流从左向右流动)。原始计算网格共有5 306个节点,15 688条边,10 382个网格单元,从图上可以看到仅在翼型周围有一定的加密网格,外围的计算网格则较为稀疏。

### 3.1.2 初始流场解

从图 5 中可以看到翼型前缘有一个高压区,前缘往后出现了激波.同时也发现初始计算结果较为粗糙,因网格分辨率不高而导致翼型后缘激波位置计算精度不达标,出现锯齿状的激波.这些位置即为需要自适应加密的地方.

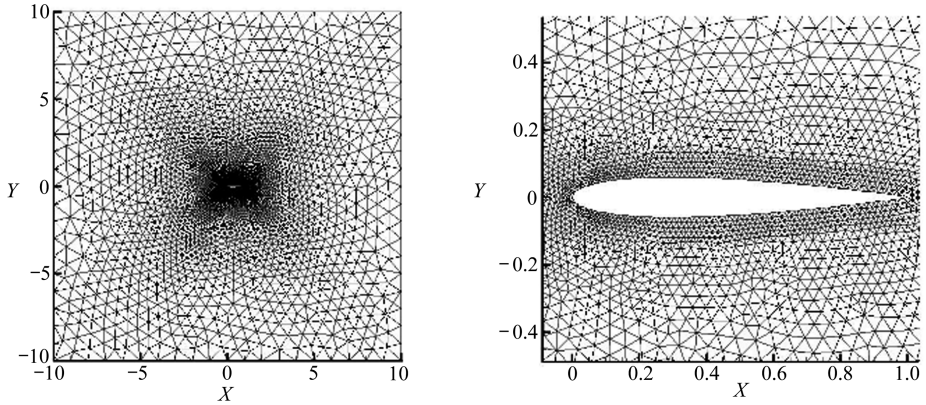


图 4 NACA0012 整体网格划分和局部网格划分

Fig. 4 The overall and local meshes for NACA0012

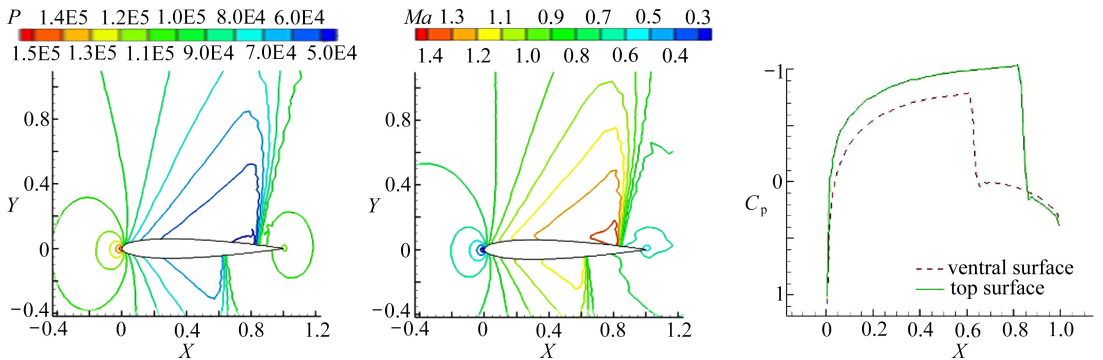


图 5 压力分布云图、Mach 数分布云图、翼型表面压力分布

Fig. 5 The pressure contours(left), Mach number contours(middle) and airfoil surface pressure distributions(right)

### 3.2 自适应计算结果

一次自适应后的网格如图 6 所示.

从图 6 可以看到,在初始计算结果中对应的激波位置处进行了网格加密.一次自适应后新的网格节点数为 10 290,新的网格边数为 30 548,新的网格单元数为 20 258.对一次加密过后的网格进行数值模拟,得到的结果如图 7 所示.

一次自适应后的计算结果中,翼型前缘激波基本不变,翼型后缘激波位置形状的精确度有一定的改善,还需进行第二次网格自适应.

二次网格自适应后新生成的网格如图 8 所示.

网格在一次自适应的基础上又进行了一次加密,第二次自适应的加密范围相对第一次要小一些,第二次自适应加密过后,新的节点数为 22 136,新的网格边数为 65 975,新的网格单元数为 43 839.

对二次加密后的网格进行数值模拟,得到的结果如图 9 所示.

与第一次加密后计算结果对比,激波位置形状的精确度有较大的提高,再进行最后一次自适应加密.

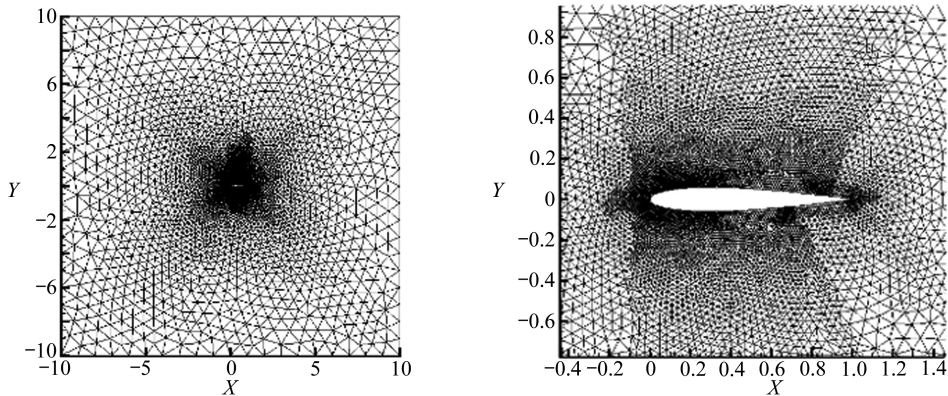


图 6 一次自适应后整体网格划分和局部网格划分

Fig. 6 The overall and local meshes after 1 time of adaptive refinement

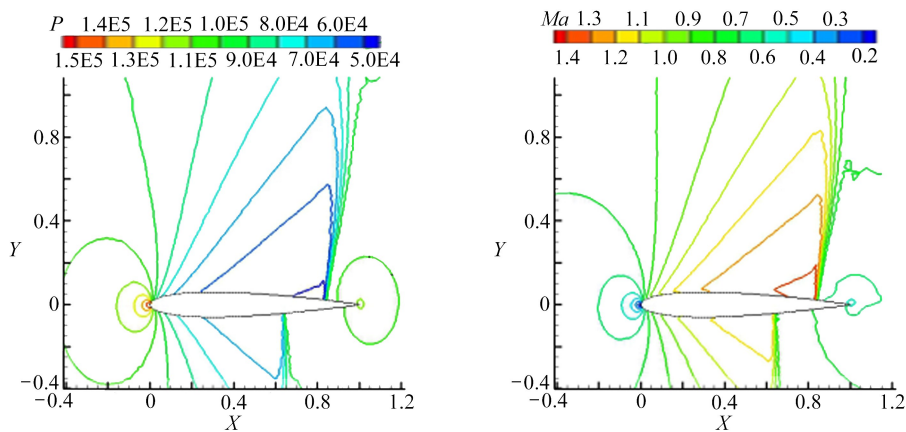


图 7 压力分布云图和 Mach 数分布云图

Fig. 7 The pressure and Mach number contours

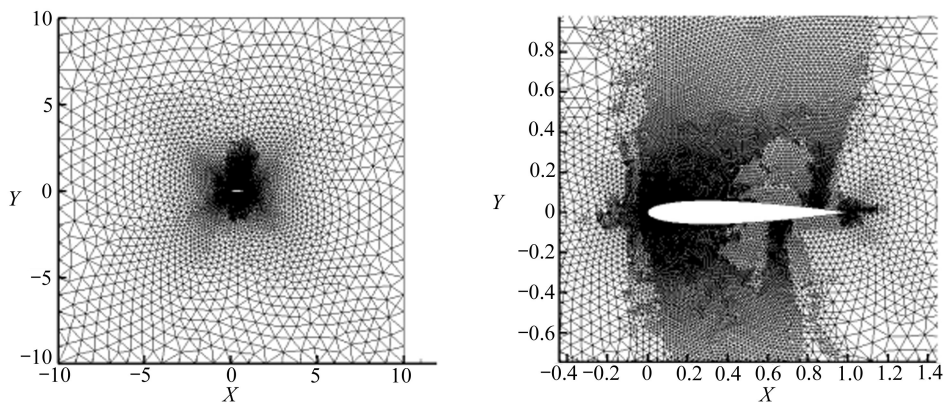


图 8 二次自适应后整体网格划分和局部网格划分

Fig. 8 The overall and local meshes after 2 time of adaptive refinement

第三次网格自适应后新生成的网格如图 10 所示。

从图 10 可以看出,与第二次自适应网格相比,第三次的加密范围相对较小,第三次自适应加密过后,新的网格节点数为 31 565,新的网格边数为 94 108,新的网格单元数为 62 543.与初始计算结果比较发现,在流场中压力梯度较大的地方网格已经发生了自适应加密,达到了前文



所说的在流场梯度较大的地方是加密网格而在流场梯度平缓的地方是稀疏网格的目的,既提高了计算精度又节省了计算资源。

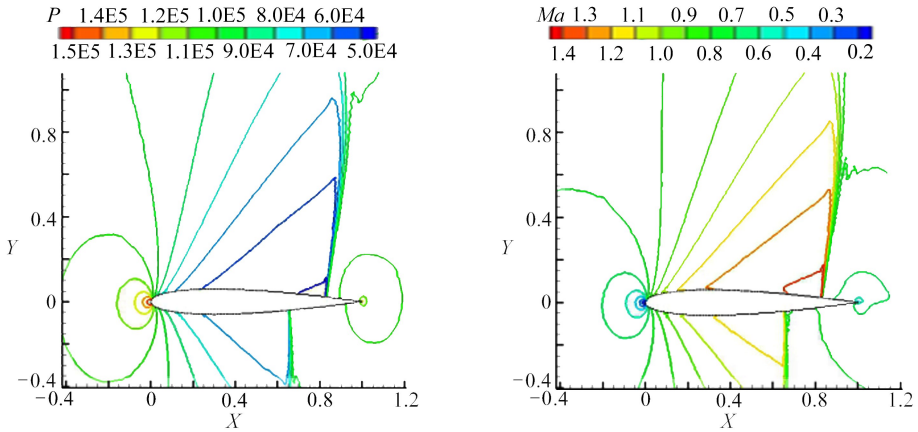


图 9 压力分布云图和 Mach 数分布云图

Fig. 9 The pressure and Mach number contours

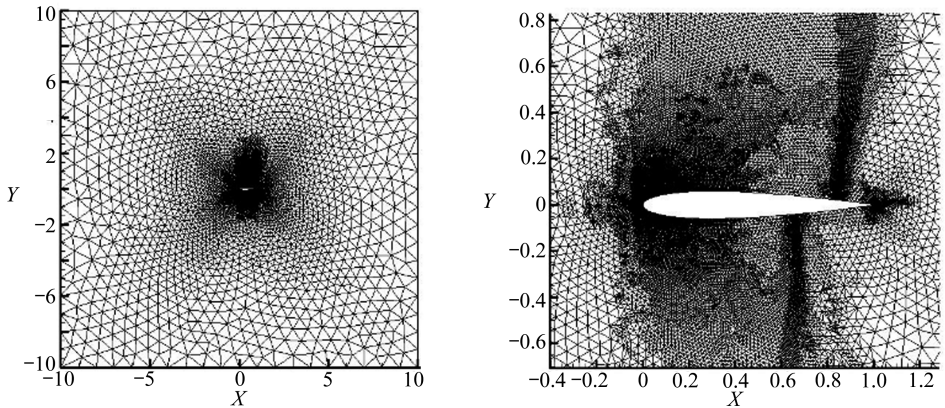


图 10 三次自适应后的整体网格和局部网格

Fig. 10 The overall and local meshes after 3 time of adaptive refinement

对三次加密过后的网格进行数值模拟,得到的结果如图 11 所示。

从图 11 可以看到,激波的位置大体不变,但是由于流场梯度较大的位置网格分辨率大大提高,使得计算结果的精度大幅提高.翼型后缘产生的激波形状已经变得光滑,下翼面激波位置有略微前移。

### 3.3 分析讨论

本文对 NACA0012 进行数值计算,对比翼型总体的压力分布云图,可以看到自适应计算结果(如图 12),其精确度远大于未做自适应的数值结果,从压力分布云图上发现自适应结果中激波的位置及其轮廓更加精确.翼型前缘部分两者压力分布基本一致,主要是翼型后缘部分,见图 13,激波形状位置的精确度大幅提高。

之前的分析只是基于压力云图上所表现出来的直观认识,图 13 将自适应前后的翼型表面压力系数绘制到一张图上,实线为网格未做自适应的计算结果,虚线则是网格自适应后的计算结果.这里就可以准确地看到翼型上下翼面的压力系数基本一致,翼型后缘激波位置有略微变化。

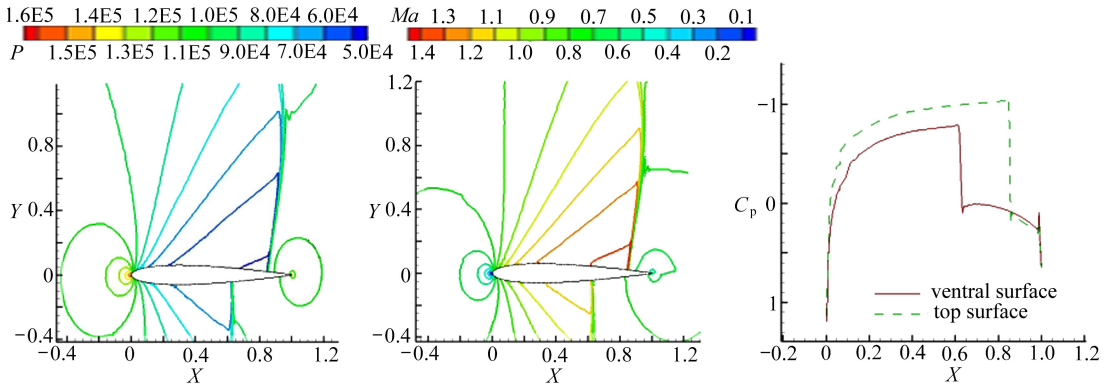


图 11 压力分布云图、Mach 数分布云图、翼型表面压力分布

Fig. 11 The pressure contours(left), Mach number contours(middle) and airfoil surface pressure distributions(right)

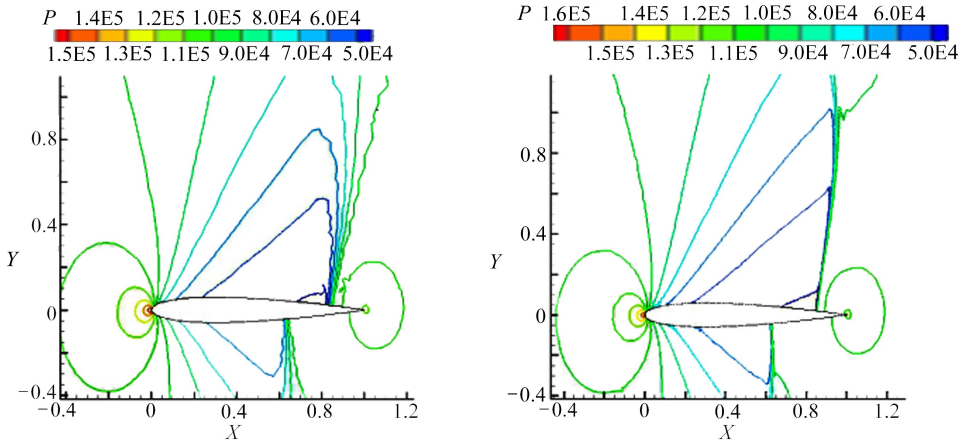


图 12 未做自适应压力分布云图和自适应压力分布云图

Fig. 12 The pressure contours before(left) and after(right) adaptive refinement

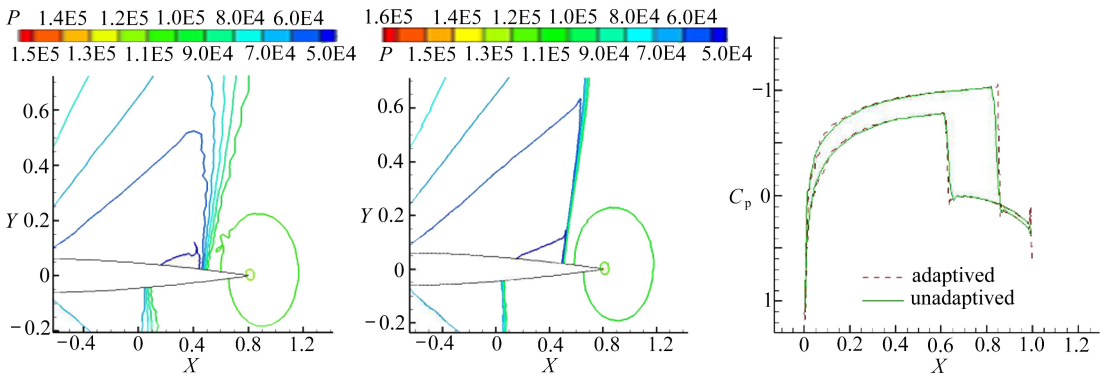


图 13 未做自适应压力后缘分布云图、自适应后缘压力分布云图、自适应前后翼型表面压力系数

Fig. 13 Do not pressure after the fate of cloud adaptive and adaptive trailing edge contours of pressure, pressure coefficient adaptive airfoil surface

## 4 总结与展望

本文发展了一种基于非结构自适应网格的二维 Euler 方程的数值解法.通过求解二维 Euler 方程,对 NACA0012 翼型进行了跨声速下的数值模拟.由最后结果证明该方法的有效性与可靠性.

为提高计算网格的分辨率且不增加太多的工作量,以压力梯度为加密探测器,确定激波区域后在局部加密网格.在 Euler 方程的计算过程中,采用了 Jamson 有限体积法和四步 Runge-Kutta 显式时间推进格式:在多步推进过程中,采用冻结耗散项的方式来提高计算效率;另外,算法选择以边为基础,避免频繁的网格查找,大大节省了时间.

综上所述,本文的主要工作是发展了适合于复杂流场计算的非结构网格自适应技术,并且对无粘可压缩绕流进行了数值模拟.

### 参考文献(References):

- [1] 范绪箕,董葳. 计算流体力学在飞行器研制中的应用[J]. 民用飞机设计与研究, 2004(4): 2-11. (FAN Xu-ji, DONG Wei. Application of computational fluid dynamics in aircraft development [J]. *Civil Aircraft Design And Research*, 2004(4): 2-11.(in Chinese))
- [2] 孙少鹏,杨岙生. 非结构网格生成技术的研究[J]. 空气动力学学报, 1996, 14(1): 19-25.(SUN Shao-peng, YANG Zuo-sheng. Research on unstructured grid generation technology[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1996, 14(1): 19-25.(in Chinese))
- [3] Connell S D, Holmes D. A 3D unstructured adaptive multigrid scheme for the Euler equations [C]//11th Computational Fluid Dynamics Conference. Orlando, FL, USA, 1993: AIAA-93-3339.
- [4] 王平,朱自强. 二维非结构网格的生成及其 Euler 方程解[J]. 北京航空航天大学学报, 2000, 26(2): 190-193.(WANG Ping, ZHU Zi-qiang. Generation of 2D unstructured grid and the Euler solution on it[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2000, 26(2): 190-193.(in Chinese))
- [5] Shang H M, Chen Y S. Unstructured adaptive grid method for reacting flow computation [C]//33rd Joint Propulsion Conference and Exhibit. Seattle, WA, USA, 1997: AIAA 97-3183.
- [6] Blazek J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*[M]. UK: Elsevier, 2001.
- [7] Northrup S A, Groth C P T. Parallel implicit adaptive mesh refinement for unsteady fully-compressible reactive flows[C]//21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. San Diego, CA, 2013: AIAA- 2013-2433.
- [8] Löhner R, Baum J D. Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, 14(12): 1407-1419.
- [9] Godunov S K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. Mat. Sb.47[J]. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1959: 271-306.
- [10] 尹河. 在非结构自适应网格上对二维 Euler 方程进行数值模拟[D]. 博士学位论文. 西安: 西北工业大学, 2001.(YIN He. Numerical simulation of two dimensional Euler equations on unstructured adaptive meshes[D]. PhD Thesis. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2001.(in Chinese))
- [11] 董程栋. Euler 方程的自适应叉树结构直角网格算法的研究[J]. 博士学位论文. 南京: 南京航空



- 航天大学, 1999. (DONG Cheng-dong. Euler equation of the adaptive cross tree structure of the right angle grid algorithm[D]. PhD Thesis. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 1999. (in Chinese))
- [12] 黄明恪. Jameson 有限体积法对非结构网格推广的改进[J]. 空气动力学报, 1999, **17**(1): 15-20. (HUANG Ming-ke. Improvement of the extension of Jameson's finite volume method to unstructured meshes[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1999, **17**(1): 15-20. (in Chinese))
- [13] Rodriguez I, Lehmkuhl O, Borrell R, Oliva A. Direct numerical simulation of a NACA0012 in full stall[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2013, **43**: 194-203.
- [14] Forestieri G, Guardone A, Isola D, Marulli F, Quaranta G. Numerical simulation of compressible vertical flows using a conservative unstructured-grid adaptive scheme[J]. *Communications in Computational Physics*, 2012, **12**(3): 866-884.
- [15] Collaboration E, Bryan G L, Norman M L, et al. Enzo: an adaptive mesh refinement code for astrophysics[J]. *Astrophysical Journal Supplement*, 2013. doi: 10.1088/0067-0049/211/2/19.

## Numerical Solution of the 2D Compressible Euler Equations Based on the Unstructured Adaptive Grids

YANG Yu-wei<sup>1</sup>, YU Jia-lei<sup>2</sup>, ZHANG Ya-ping<sup>1</sup>, LI Xing-gang<sup>1</sup>, QIU Xiao-pu<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University, Kunming 650000, P.R.China;

2. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210000, P.R.China)

**Abstract:** A numerical method for the solution of the 2D Euler equations based on the unstructured adaptive grids was proposed. The finite-volume method was used to carry out the space discretization, and the flux was calculated with Jameson's central scheme, which was suitable for the calculation of arbitrary polygons. In order to get the stationary solution, an explicit 4-step Runge-Kutta iterative method was adopted to do the time-domain integral. According to the gradients of the flow field parameters, the refining edges were determined. Under this refining criterion, the mesh distribution was reasonably improved. With the proposed method the 2D Euler equations were solved for the simulation of the NACA0012 airfoil. The numerical results show the correctness and validity of the present method.

**Key words:** Euler equation; numerical solution; unstructured grid; adaptive mesh refinement

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(61262070;61462097)

引用本文/Cite this paper:

杨雨薇, 虞佳磊, 张亚萍, 李幸刚, 邱晓朴. 基于非结构自适应网格的二维 Euler 方程数值求解方法研究[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(9): 981-992.

YANG Yu-wei, YU Jia-lei, ZHANG Ya-ping, LI Xing-gang, QIU Xiao-pu. Numerical solution of the 2D compressible Euler equations based on the unstructured adaptive grids[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(9): 981-992.