

边界层流中当地感受性过程的数值研究^{*}

沈露予, 陆昌根

(南京信息工程大学 海洋科学学院, 南京 210044)

摘要: 边界层流中当地感受性问题的研究对层流向湍流转捩过程的预测与控制起着非常关键的作用,尤其是对边界层内诱导产生三维 Tollmien-Schlichting(T-S)波成因过程的探讨具有更加重要的理论意义.采用高精度、高分辨率变间距的紧致有限差分方法,直接数值模拟了在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内的当地感受性问题.数值计算发现,在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙作用下,边界层内诱导形成的当地感受性过程是真实存在的;且被激发的一组三维 T-S 波波包沿流向发展的过程中流向涡结构将逐渐形成,其强度将越演越烈.数值结果还显示,边界层内被诱导产生当地感受性过程的波长转换机制仅使流向波数发生改变,而展向波数保持不变;以及自由来流湍流运动方向的改变将决定三维 T-S 波波包的传播方向,但其传播速度的大小都近似为无穷远来流速度的 $1/3$.另外,还建立了自由来流湍流的强度和运动方向以及二维壁面局部粗糙的长度和高度与边界层内的当地感受性问题之间的关系等.这一课题的深入研究,将在进一步理解和认识层流向湍流转捩的理论机制,以及湍流的形成机理等方面均起到十分重要的作用.

关键词: 感受性; 边界层; 自由来流湍流; Tollmien-Schlichting 波; 二维壁面局部粗糙
中图分类号: O357.5 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370076

引 言

层流向湍流转捩机制的理论问题一直是人们所关心的热点课题之一.通常层流向湍流转捩过程可分为以下 5 个阶段:感受性阶段、线性增长阶段、非线性增长阶段、二次失稳阶段直至层流破碎湍流状态的出现.感受性问题正是层流失稳的起始阶段,决定着不稳定波的成因机制以及不稳定波的频率、波数、增长率、幅值和相位等参数,这些因素将在层流向湍流转捩过程中起着极其重要的作用^[1].

自由流中的小扰动(如声扰动、涡扰动以及自由来流湍流等)与边界层内的某种局部小扰动(如壁面局部粗糙、壁面局部吹吸以及壁面局部区域的振动或振荡等)相互作用后就有可能直接在边界层内感受出不稳定的 T-S 波.早期,Goldstein^[2-3]和 Ruban^[4]采用三层结构理论研究了自由流中声扰动作用下边界层内的前缘和当地感受性机制.Duck 等^[5]采用一阶精度的渐进匹配法,研究了涡扰动作用下边界层当地感受性过程.Dietz^[6-8]通过一系列实验首次验证了在

* 收稿日期: 2016-03-16; 修订日期: 2016-09-19

基金项目: 国家自然科学基金(11472139); 江苏高校优势学科建设工程; 江苏省海洋环境探测工程技术研究中心项目

作者简介: 沈露予(1986—),男,讲师,博士(E-mail: shenluyu@nuist.edu.cn);

陆昌根(1962—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: cglu@nuist.edu.cn).

涡扰动作用下边界层内当地感受性现象的存在性,发现了在边界层内能够被激发产生不稳定 T-S 波的物理过程. Wu(吴雪松)^[9-10]基于三层结构理论的二阶精度渐进方法,理论研究了在声扰动以及涡扰动作用下边界层内当地感受性问题,获得了与 Dietz^[8]实验测量完全相同的结果.在文献[11-14]中,分别研究了自由来流湍流与二维壁面局部粗糙或与二维壁面局部吹吸相互作用下边界层内诱导产生二维不稳定 T-S 波的物理过程,证明了边界层内当地感受性现象是真实存在的以及波长转换机制也是存在的. Tempelmann 等^[15]采用伴随法求解线性不可压缩 Navier-Stokes 方程来研究边界层感受性问题. Zuccher 和 Luchini^[16]采用多尺度方法研究了平行性假设和非平行性边界层内的当地感受性问题. Johnson 和 Pinarbasi^[17]数值研究了压力梯度对边界层感受性问题的影响.但是,过去研究的许多成果都局限于边界层内被感受形成二维不稳定 T-S 波的物理过程.当然,对于在边界层流中被激发产生三维 T-S 波的感受性过程研究也有一些相关报道.例如, Tadjfar 和 Bodonyi^[18]采用三层结构理论以及 Würz 等^[19]实验和数值研究了声扰动与三维壁面局部粗糙作用下边界层的当地感受性机制,并获得了一些有意义的结果. Choudhari^[20]以及 Ricco^[21]在平行流假设条件下采用有限 Reynolds(雷诺)数方法,研究了三维涡扰动与壁面二维局部粗糙相互作用,使边界层内能够感受出三维 T-S 波的物理过程,并发现边界层内诱导出三维 T-S 波的感受性要比边界层内激发出二维 T-S 波的感受性强数倍.

综上所述,过去的感受性研究成果主要集中于外部涡扰动和声波扰动以及边界层内的壁面局部粗糙等;对于自然界中普遍存在的,具有随机性、不确定性的自由来流湍流这一物理因素考虑甚少.因此,考虑自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内激发形成三维 T-S 波的物理过程研究不仅具有重要的理论意义,而且还为层流向湍流转换机制的预测与控制以及飞行器设计等方面提供可靠的理论依据.

1 基础理论与实施方法

1.1 基本方程和数值方法

基本方程为无量纲不可压 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,速度 $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}'$, $\mathbf{V}' = \{u, v, w\}^T$ 为扰动速度,基本流 \mathbf{U} 为数值求解 Navier-Stokes 方程获得的数值解; p 为压力; Reynolds 数为 $Re = (U_\infty \delta^*)/\nu$; δ^* 为层流边界层的位移厚度; U_∞ 为无穷远流速度, ν 为流体的运动粘性系数.

对基本方程(1)的数值方法为:时间偏导数采用四阶修正的 Runge-Kutta 格式^[22]; x 和 y 方向上的空间偏导数采用变间距的紧致有限差分,即对流项采用五阶迎风紧致有限差分格式,压力梯度项采用六阶紧致有限差分,粘性项采用六阶紧致有限差分格式;在 z 方向采用 Fourier(傅里叶)级数展开;压力方程采用三阶变间距的有限差分求解^[23].

1.2 自由来流湍流模型

利用文献[24]中描述的随机湍流模型,建立无量纲的自由来流湍流模型为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \varepsilon_g \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-J}^J \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \exp[i(m\kappa_1 x + j\kappa_2 y + n\kappa_3 z - m\kappa_1 t)], \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{u} &= i \frac{m\kappa_1 j\kappa_2}{\kappa\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}} A + \frac{n\kappa_3}{\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}} B, \\ \hat{v} &= -i \frac{\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}}{\kappa} A, \\ \hat{w} &= i \frac{j\kappa_2 n\kappa_3}{\kappa\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}} A - \frac{m\kappa_1}{\sqrt{m^2\kappa_1^2 + n^2\kappa_3^2}} B, \\ A &= \sqrt{\frac{2E(\kappa)\kappa_1\kappa_2\kappa_3}{4\pi\kappa^2}} \exp(i\theta_1) \cos \delta, \\ B &= \sqrt{\frac{2E(\kappa)\kappa_1\kappa_2\kappa_3}{4\pi\kappa^2}} \exp(i\theta_2) \sin \delta,\end{aligned}$$

这里, $i = \sqrt{-1}$; $u_\infty, v_\infty, w_\infty$ 分别表示无穷远来流中的自由来流湍流在流向(x)、法向(y)以及展向(z)上的扰动速度; $\hat{u}_\infty, \hat{v}_\infty, \hat{w}_\infty$ 分别表示 $u_\infty, v_\infty, w_\infty$ 的扰动速度谱; ε_g 为自由来流湍流幅值; M, J 和 N 为选定的最大模数; κ_1, κ_2 和 κ_3 分别为 x, y 以及 z 方向上的基本波数; 频率 $\omega = m\kappa_1$, 流向波数 $\alpha = m\kappa_1$ 、法向波数 $\gamma = j\kappa_2$ 及展向波数 $\beta = n\kappa_3$; $\kappa = (\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2)^{1/2}$. $\hat{u}_\infty, \hat{v}_\infty, \hat{w}_\infty$ 与一维能量谱 $E(\kappa)$ 以及随机相位角 θ_1 和 θ_2 有关。

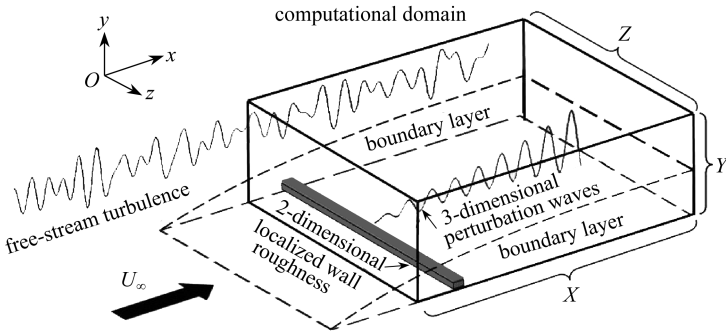


图1 计算区域示意图

Fig. 1 The computational domain

1.3 计算区域和网格数

图1中的长方体空间为本文直接数值模拟的计算空间.为了使边界层内被激发形成的三维扰动波有足够大的空间以及足够长的流向距离演化,选取流向长度为 $X = 2.0 \times (2\pi/\kappa_1)$ 、法向长度为5倍边界层厚度 $Y = 14.39$ 以及展向长度为 $Z = 2\pi/\kappa_1$.二维壁面局部粗糙的位置分布在流向方向的区域为 $[x_1, x_2]$, x_1 和 x_2 分别为二维壁面局部粗糙起始和终点的位置,则二维壁面局部粗糙的长度为 $L = x_2 - x_1$; 二维壁面局部粗糙的展向宽度和法向高度分别为 $B = Z$ 和 h .计算网格:流向选取均匀网格,法向选取非均匀网格,其目的是为了在壁面附近流场变化剧烈的区域加密以便获得更精确的流场信息.为了方便与他人数值计算结果^[20-21]比较,以 Reynolds 数 $Re_{\varepsilon_g} = 1217$ 为例,并分别选取3种计算网格: $256 \times 150 \times 16$, $512 \times 200 \times 16$ 和 $1024 \times 250 \times 32$ 来验证数值计算方法的正确性.经数值计算获得的基本流 \mathbf{U} 与 Blasius 解比较发现,其绝对误差分别为 10^{-4} , 10^{-5} 和 10^{-5} ,这说明了本文设计的计算方法是合理、可靠的.从计算结果可知,计算网格数为 $512 \times 200 \times 16$ 时数值解已趋于稳定,则计算网格数选取 $512 \times 200 \times 16$ 是可行的.

1.4 边界条件

上边界条件 $p = 0.0$; 流向和展向扰动速度为 0, 法向扰动速度为

$$v = \varepsilon_g \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-J}^J \hat{v} \cdot \exp[i(m\kappa_1 x + j\kappa_2 y + n\kappa_3 z - m\kappa_1 t)]. \quad (3)$$

下边界条件: 壁面采用无滑移条件, $u(x, 0, z) = 0$, $v(x, 0, z) = 0$, $w(x, 0, z) = 0$, $\partial p / \partial y = 0.0$. 另外, 在平板上设计一个二维壁面局部粗糙的矩形方块, 并用线性化的方法处理, 即在平板局部区域上选取恰当的流向速度等效为二维壁面局部粗糙, 其表达式为

$$u(x_w, 0, z_w) = -h \cdot U'(0). \quad (4)$$

注 在这里 h 是二维壁面局部粗糙的高度; $U'(0)$ 是基本流在壁面的法向导数值; $x_w \in [x_1, x_2]$. 在展向方向上满足周期性边界条件.

入流条件: 扰动速度由自由来流湍流模型给定; $\partial p / \partial x = 0.0$.

出流条件: $\partial p / \partial x = 0.0$; 扰动速度采用无反射条件^[23].

2 数值结果与分析

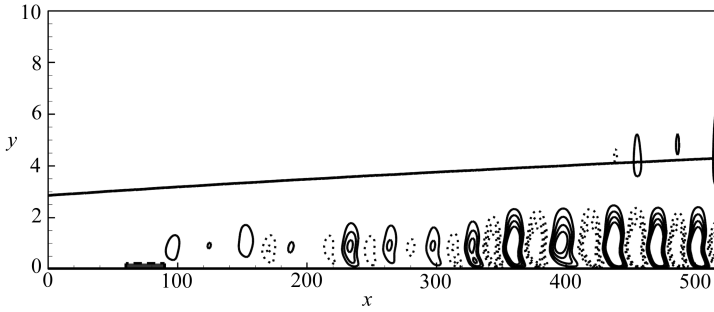
2.1 边界层内被诱导出三维 T-S 波的感受性问题

为了便于与 Choudhari^[20] 以及 Ricco^[21] 的结果比较, 选取入口 Reynolds 数为 $Re_{\delta^*} = 1\,217$, 并在计算域入口附近设计二维壁面局部粗糙. 二维壁面局部粗糙的流向起始和终点位置分别为: $x_1 = 60$ 和 $x_2 = 90$, 则流向长度为 $L = 30.0$ 以及法向高度为 $h^* / \delta_R = 0.20$, 且 $\delta_R = (v_x / U_\infty)^{1/2}$, δ_R 为边界层的参考长度; 另外, 再定义无量纲频率为 $F = (2\pi f v / U_\infty) \times 10^6$. 选取自由来流湍流的基本波数 $\kappa_1 = 0.012\,17$ 和 $\kappa_3 = 0.05$, 流向最大模数 $M = 8$, 展向最大模数取 $N = 1$; 为研究简化起见, 暂不考虑法向波数的影响取 $J = 0$. 经数值计算可知, 对于某一确定的自由来流湍流幅值 ε_g , 可获得对应的边界层外至法向高度 $y = 8$ 的计算区域范围内自由来流湍流度都将趋于某一稳定值, 并将获得稳定的自由来流湍流度和单频自由来流湍流度的表达式分别定义为 $A_{\text{FST}} = \sqrt{u_{\text{FST}}^2 + v_{\text{FST}}^2 + w_{\text{FST}}^2}$ 和 $A_{\text{FS}} = \sqrt{u_{\text{FS}}^2 + v_{\text{FS}}^2 + w_{\text{FS}}^2}$, 其中下标 FST 和 FS 分别代表自由来流湍流和单频自由来流湍流; 依次类推, 若改变自由来流湍流的幅值 ε_g 大小, 可发现自由来流湍流度 A_{FST} 与自由来流湍流的幅值 ε_g 成线性关系, 在上述条件下自由来流湍流度趋向的稳定值为 $A_{\text{FST}} = 0.5\%$.

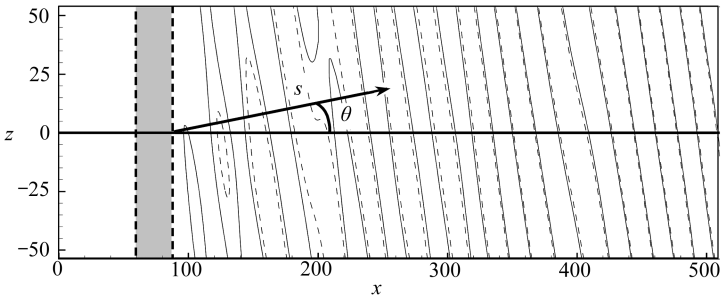
数值研究了在自由来流湍流和二维壁面局部粗糙作用下边界层内被感受出三维 T-S 波的物理过程, 将所获得二维壁面局部粗糙情况下的数值结果减去光滑壁面情况下的数值结果, 可得三维扰动波波包序列在空间演变的分布规律. 在自由来流湍流和二维壁面局部粗糙作用下, 图 2(a) 和 (b) 分别展示了边界层内被激发出三维扰动波波包的流向扰动速度 u 在 xOy 平面 ($z = 0.0$) 和 xOz 平面 (流向扰动速度最大值位置 $y = 0.66$ 处) 上的等值线分布, 并且图 2 中用虚线表示二维壁面局部粗糙所在的位置. 从图 2(a) 可以看出, 在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内二维壁面局部粗糙下游被激发出的一组正、负交错的小扰动波波包沿流向的发展趋势, 且小扰动波波包的强度在向下游演化的过程中逐渐增强, 其原因是沿流向方向的流向涡快速形成以及迅速增长的演变所导致, 详见图 3. 另外, 从图 2(b) 中也可看出, 小扰动波波包的传播方向 s 垂直于图 2(b) 中正、负相间的小扰动波波阵面, 数值计算发现小扰动波波包的传播方向 s 与流向 x 方向之间的夹角 θ 大约为 15° .

再从图 2 中提取得到边界层内被感受出三维扰动波的流向、法向和展向扰动速度 $\{u, v,$

w } 的波包沿传播方向 s 的演化,如图 4 所示.从图 4 可知,边界层内被感受到三维扰动波的流向、法向和展向扰动速度的波包幅值沿传播方向 s 的演化逐渐增强,并且三维扰动波的流向和展向扰动速度的波包幅值具有相同的量级,而法向扰动速度的波包幅值比流向和展向扰动速度的波包幅值要小一个量级左右.另外,跟踪记录不同时刻三维扰动波波包的峰、谷在传播方向上所处的位置以及对应的时刻 t , 依次反复进行跟踪记录,可数值计算获得三维扰动波波包行进的传播速度,并取算术平均,获得了三维扰动波波包的近似平均行进速度,即群速度为 $C_g = 0.339$.



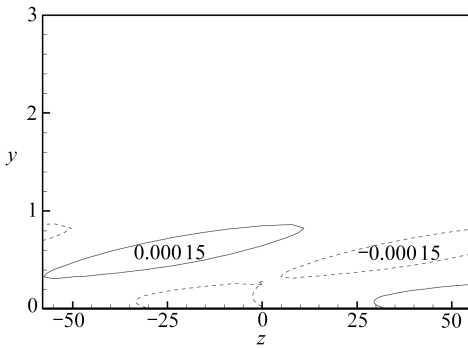
(a) xOy 平面
(a) On the xOy plane



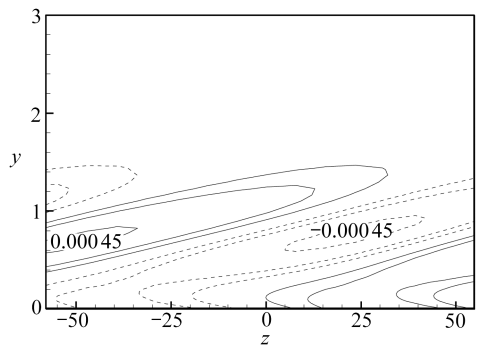
(b) xOz 平面
(b) On the xOz plane

图 2 边界层内被激发出三维小扰动波波包的流向扰动速度的等值线, $t = 2000$

Fig. 2 Streamwise perturbation velocity distributions of the excited 3D perturbation wave packets, $t = 2000$



(a) $x = 200$



(b) $x = 300$

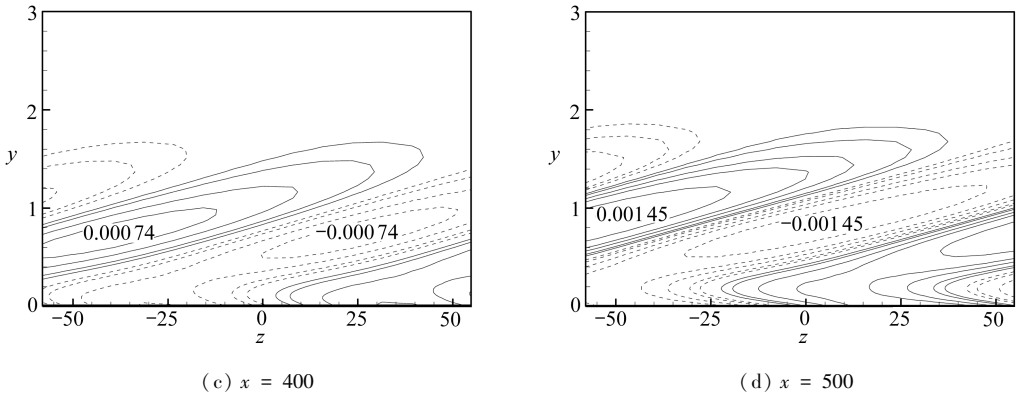


图3 边界层内被激发出三维小扰动波波包的流向涡量 ζ_x 在不同流向截面上的等值线分布, $t = 2000$

Fig. 3 Streamwise vorticity ζ_x distributions of the excited 3D perturbation wave packets at various x cross sections, $t = 2000$

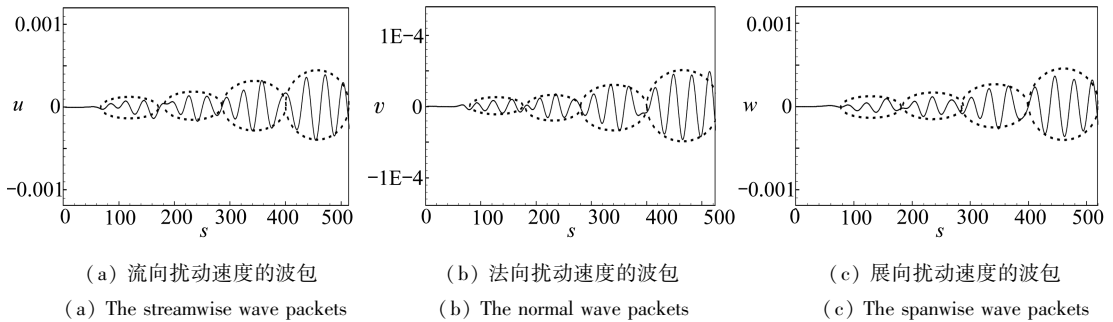


图4 边界层内被激发出的三维扰动波波包沿传播方向 s 的演化

Fig. 4 Evolutions of the excited 3D perturbation wave packets in the s -direction

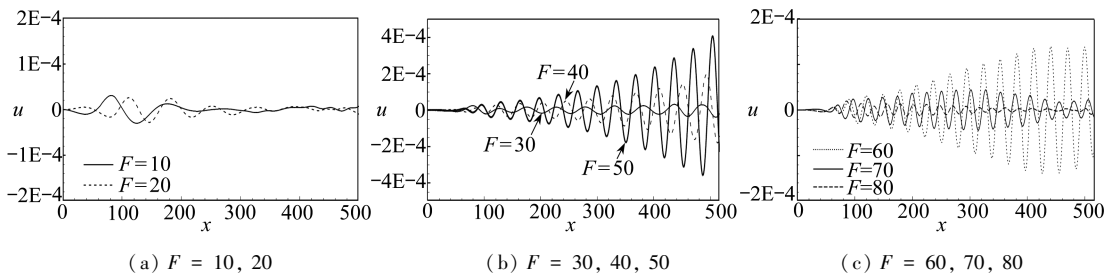


图5 边界层内被激发出三维小扰动波的流向扰动速度随空间的演化

Fig. 5 Evolutions of the streamwise perturbation velocities of the perturbation waves

其次,运用快速 Fourier(傅里叶)分析的方法,从图4中的小扰动波波包中分别提取出了不同频率的小扰动波.为简单起见,在这里仅以图4(a)为例,详见图5.从图5中可以看出,当频率为 $F = 10$ 和 20 时,小扰动波的流向扰动速度沿流向 x 方向趋于逐渐衰减的状态,即对应频率的小扰动波为稳定波;当频率为 $F = 30, 40$ 和 50 时,小扰动波的流向扰动速度沿流向 x 方向趋于快速增长的发展过程,即对应频率的小扰动波为不稳定波;当频率为 $F = 60, 70$ 和 80 时,小扰动波的流向扰动速度沿流向 x 方向保持先增长、到达某一位置时获得最大值,随后沿流向 x 方向又趋于衰减的状态.

随后,依据图5中的流向扰动速度在空间的分布规律,可近似计算获得小扰动波的流向平均波长(波数);数值计算的具体步骤是跟踪记录某一段时间间隔内小扰动波的峰、谷移动的

距离和时间,分别计算求得波长(波数)和相速度;依次反复进行,可获得若干波长(波数)和相速度,再取算术平均,可近似得到小扰动波的波长(波数)和相速度.利用流动稳定性中的线性理论,同样可求得对应小扰动波的波长(波数)和相速度,详见表 1.

表 1 激发的扰动波的流向波数 α 与自由来流湍流以及线性理论(LST)比较, $\beta = 0.05$

Table 1 Streamwise wave number α of the excited perturbation waves and the free-stream turbulence compared with those from the linear stability theory, $\beta = 0.05$

F		10	20	30	40	50	60	70	80
β	FST	0.050 00							
	DNS	0.050 00							
α	FST	0.012 17	0.024 34	0.036 51	0.048 68	0.060 85	0.073 02	0.085 19	0.097 36
	DNS	0.039 38	0.080 95	0.117 80	0.151 95	0.184 67	0.216 45	0.247 39	0.277 34
	LST	0.039 80	0.082 98	0.120 14	0.154 01	0.186 28	0.217 67	0.248 47	0.278 73
C	DNS	0.309	0.301	0.310	0.320	0.330	0.337	0.344	0.351
	LST	0.306	0.293	0.304	0.316	0.327	0.335	0.343	0.349

从表 1 中可知,边界层内被激发出三维扰动波的频率和展向波数与上边界处施加的自由来流湍流的频率和展向波数相等;但是,边界层内被激发出三维扰动波的流向波数发生了变化,这一现象与边界层内当地感受性的波长转换机制是相符的.由此可以得出这样一个结论,在自由来流湍流和二维壁面局部粗糙作用下边界层内被诱导的感受性过程的波长转换机制只改变小扰动波的流向波数 α ,不改变其展向波数 β ;并将数值结果与流动稳定性中的线性理论获得的 T-S 波的色散关系以及相速度比较发现,两者吻合相当好,这说明边界层内被激发出三维扰动波的色散关系满足三维 T-S 波的色散关系,详见表 1.

然后,再从表 1 中选取频率为 $F = 40$ 情况的小扰动波来进一步验证边界层内感受性过程的存在性.图 6 给出了数值计算获得的小扰动波的幅值($|u|, |v|, |w|$)和相位(ϕ_u, ϕ_v, ϕ_w)沿法向的分布,并与流动稳定性中的线性理论解比较发现,两者是完全重合的.另外,笔者还选取了不同展向波数 β 的自由来流湍流进行研究,所得结论与上述结果相同,不同之处仅仅只是小扰动波波包的传播方向不同而已,而群速度都近似等于无穷远来流速度的 1/3,详见表 2.

表 2 激发的扰动波波包的传播方向与流向的夹角 θ 和群速度 C_g

Table 2 Angles between propagation directions of the excited perturbation waves and streamwise direction θ and phase speed C_g of the excited perturbation waves

	β			
	0.05	0.1	0.2	0.3
$\theta / (^\circ)$	15	29	40	48
C_g	0.320	0.339	0.355	0.347

最后,将数值计算获得的不同频率三维扰动波的幅值沿流向的空间演变与流动稳定性中的线性理论 e^N 法计算的结果比较发现,结果完全吻合,详见图 7(a)所示.流动稳定性理论中的 e^N 法计算小扰动波幅值的表达式为

$$A_{TS} = A_{TSR} \cdot e^N, \quad N = \int_{x_R}^x -\alpha_i dx, \quad (5)$$

其中, $A_{TS} = \sqrt{u_{TS}^2 + v_{TS}^2 + w_{TS}^2}$ 为三维扰动波的幅值, x_R 是二维壁面局部粗糙中心所在位置, A_{TSR} 为边界层内被激发产生的三维扰动波在 x_R 处的幅值.再依据式(5),可以近似求得增长率($-\alpha_i$)的数值结果.由图 7(b)可知,数值计算获得边界层内被激发的三维扰动波的增长率,与

流动稳定性中的线性理论求得的增长率随流向的演变过程比较,同样发现它们的结果也是吻合的。

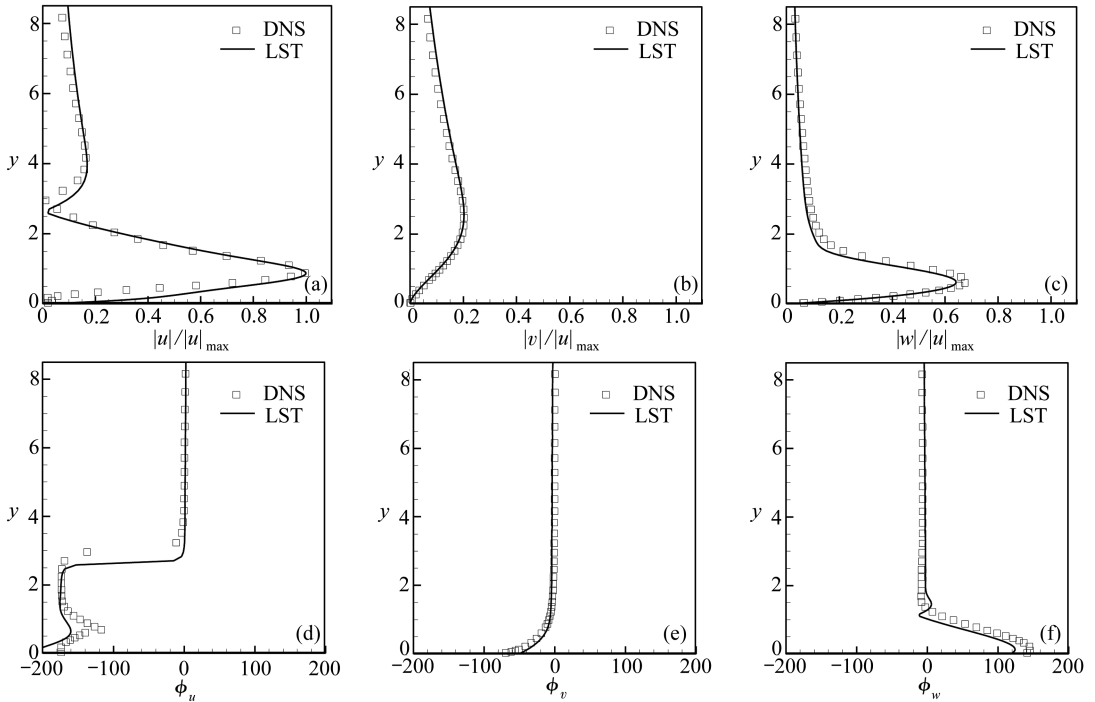
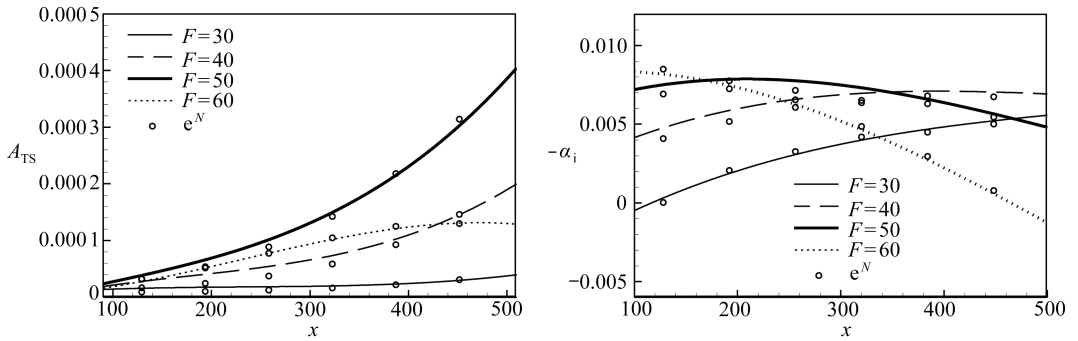


图 6 数值计算三维扰动波的幅值与相位在法向上的分布与线性理论比较, $x = 200, z = 0.0$

Fig. 6 Numerical results of normal amplitude and phase distributions of the excited 3D perturbation waves compared with those from the linear stability theory, $x = 200, z = 0.0$



(a) 幅值 A_{TS} 随流向的演变

(a) Variations of amplitude A_{TS}

(b) 增长率 ($-\alpha_i$) 随流向的演变

(b) Variations of growth rate ($-\alpha_i$)

图 7 边界层内激发的三维扰动波的幅值和增长率随流向的演变

Fig. 7 Variations of amplitudes and growth rates of the excited 3D perturbation waves

综上所述,在自由来流湍流和二维壁面局部粗糙作用下边界层内被感受到三维扰动波的色散关系、幅值、相位和增长率数值结果都与流动稳定性中的线性理论求得三维 T-S 波的线性理论吻合,从而证明了在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内激发的小扰动波波包就是由一组三维 T-S 波组成的波包结构.这充分说明了在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内当地感受性机制的真实存在性.另外,在自由来流湍流和二

维壁面局部粗糙作用下激发边界层内感受性过程的波长转换机制只改变自由来流湍流的流向波数 α , 并不改变自由来流湍流的展向波数 β , 这一机制可能是二维壁面局部粗糙所致。

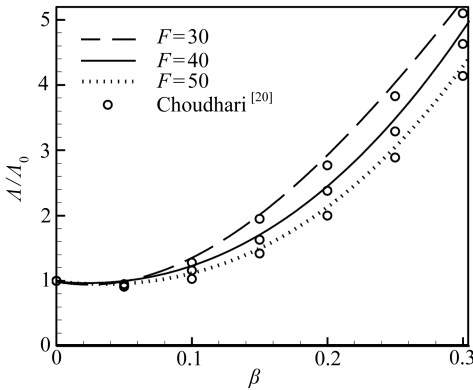
2.2 感受性与自由来流湍流的展向波数、水平夹角以及强度之间的关系

首先, 引入一个与壁面几何形状无关的感受性系数 Λ 来研究边界层内感受性问题与自由来流湍流的展向波数 β 和扰动频率 F 之间的关系. 定义感受性系数 Λ 的表达式为

$$\Lambda = \frac{A_{TS}}{A_{FS} F(\alpha_{TS} - \alpha_{FS})}, \quad (6)$$

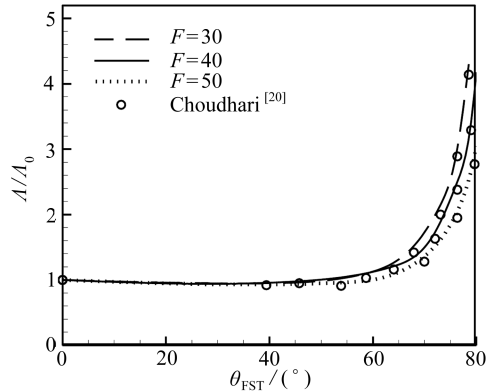
其中 $F(\alpha_{TS} - \alpha_{FS})$ 为壁面几何形状的 Fourier 展开, α_{TS} 是 T-S 波的流向波数, α_{FS} 是单频自由来流湍流的流向波数.

为方便比较和分析, 图 8 给出了边界层内被激发出的归一化后的感受性系数 Λ/A_0 随自由来流湍流的展向波数 β 和水平夹角 θ_{FST} 的演变, 并与 Choudhari^[20] 理论计算值进行比较, 其中水平夹角 θ_{FST} 表示在 xOz 平面内自由来流湍流的运动方向与流向 x 方向之间的夹角. 由图 8 (a) 可知, 当自由来流湍流的展向波数 $\beta \leq 0.10$ 以及 $\beta > 0.10$ 时, 边界层内被激发的感受性系数 Λ/A_0 演变过程分别为平缓增长以及快速增长的趋势; 图 8 (b) 同样展示了当水平夹角 θ_{FST} 分别满足 $\theta_{FST} \leq 65^\circ$ 和 $\theta_{FST} > 65^\circ$ 条件时, 边界层内被激发产生的感受性系数 Λ/A_0 演变过程分别表现为缓慢增长和几何级数增长的规律; 这些结果说明随着水平夹角 θ_{FST} 的不断增大, 其自由来流湍流运动的三维特征越显著, 即外部扰动的三维特征越强, 所激发边界层内的感受性系数就越强; 低频扰动比高频扰动所激发出的边界层内的感受性系数更强. 这些结论与 Choudhari^[20] 理论计算的结果是完全吻合的.



(a) 感受性系数 Λ 与自由来流湍流的展向波数 β 的关系

(a) Receptivity coefficient Λ varying with spanwise wave number β of the free-stream turbulence



(b) 感受性系数 Λ 与水平夹角 θ_{FST} 的关系

(b) Receptivity coefficient Λ varying with incident angle θ_{FST}

图 8 感受性系数随自由来流湍流的展向波数和水平夹角的演变, 并与 Choudhari^[20] 理论解比较

Fig. 8 The receptivity coefficients varying with the spanwise wave number of the free-stream turbulence and the incident angle, in comparison with Choudhari's^[20] results

图 9 给出了在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙作用下激发边界层内产生的 T-S 波的幅值与自由来流湍流度 A_{FST} 之间的关系, 其中 T-S 波的幅值 A_{TS} 均被 $A_{FST} = 0.5\%$ 情况下边界层内被诱导出 T-S 波的幅值 A_0 归一化. 由图 9 可知, 当自由来流湍流度 $A_{FST} \leq 1\%$ 时, 与边界层内被感受产生的不同频率 T-S 波的幅值 A_{TS} 几乎成线性增长的关系; 当自由来流湍流度 $A_{FST} > 1\%$ 时, 与边界层内被感受产生的不同频率 T-S 波的幅值 A_{TS} 的增长关系略有变化, 其数值稍偏离

线性增长关系。

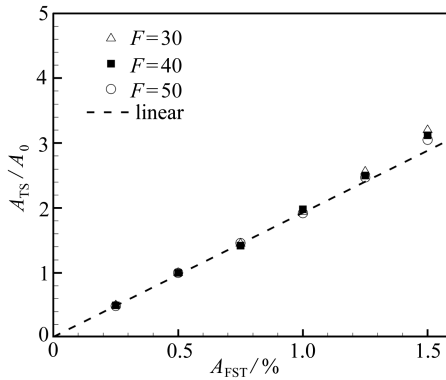


图9 边界层内感受出的 T-S 波幅值随自由来流湍流度的变化, $\beta = 0.05$

Fig. 9 T-S wave amplitude varying with free-stream turbulence amplitude, $\beta = 0.05$

2.3 边界层感受性与二维壁面局部粗糙高度以及长度之间的关系

图 10 给出了边界层内激发产生的 T-S 波幅值随二维壁面局部凸起长度 L 的变化, 图中二维壁面局部凸起长度 L 已被共鸣波长 $2\pi/(\alpha_{TS} - \alpha_{FS})$ 归一化(详见表 1); 且图中 T-S 波的幅值 A_{TS} 已被最大幅值 A_{max} 归一化, 即 A_{TS}/A_{max} . 由此可见, 当 T-S 波的幅值与二维壁面局部凸起的 Fourier 展开项 $\sin(L(\alpha_{TS} - \alpha_{FS})/2)$ 重合时, 即被激发产生的 T-S 波幅值与归一化凸起长度 $L(\alpha_{TS} - \alpha_{FS})/(2\pi)$ 成正弦曲线关系; 当二维壁面局部凸起长度 L 等于 $\pi/(\alpha_{TS} - \alpha_{FS})$ 时, 能激发出 T-S 波的最大幅值 A_{max} .

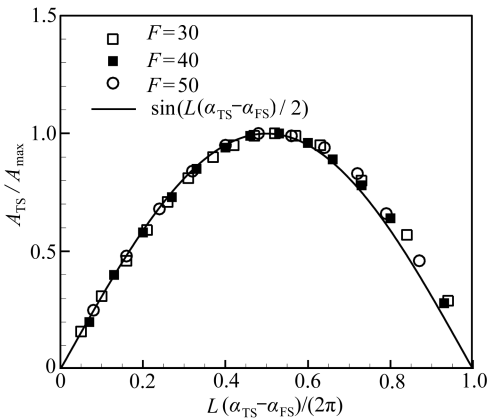


图 10 边界层内感受出的 T-S 波幅值随壁面局部凸起长度的变化, $\beta = 0.05$

Fig. 10 The T-S wave amplitude varying with the wall roughness length, $\beta = 0.05$

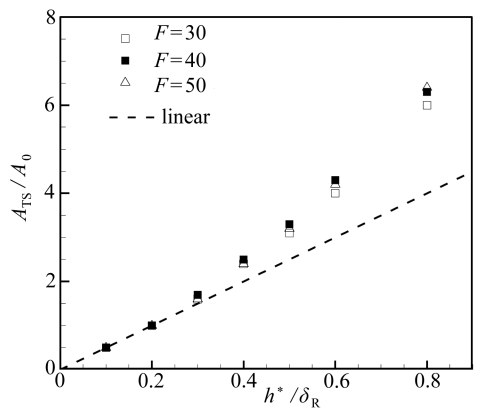


图 11 边界层内感受出的 T-S 波幅值随壁面局部凸起高度 h^*/δ_R 的变化, $\beta = 0.05$

Fig. 11 The T-S wave amplitude varying with the wall roughness height h^*/δ_R , $\beta = 0.05$

图 11 给出了自由来流湍流与二维壁面局部凸起相互作用下激发边界层内 T-S 波的幅值随二维壁面局部凸起高度 h^*/δ_R 的演变规律, 图中 T-S 波的幅值 A_{TS} 已被 $h^*/\delta_R = 0.2$ 激发的 T-S 波幅值 A_0 归一化. 图 11 可知, 当二维壁面局部凸起高度 $h^*/\delta_R \leq 0.2$ 时, 边界层内被感受产生的波数 T-S 波的幅值 A_{TS} 与二维壁面局部凸起高度 h^*/δ_R 成线性增长关系; 当二维壁面局部凸起高度 $h^*/\delta_R > 0.2$ 时, 边界层内被感受产生的 T-S 波的幅值 A_{TS} 与二维壁面局部凸起高度 h^*/δ_R 几乎成非线性增长关系。

3 结 论

本文采用高精度、高分辨率变间距的紧致有限差分方法,直接数值模拟了在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内当地感受性问题,获得了一些有意义的结论。

1) 在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内被感受出的一组不同频率、不同展向波数的小扰动波的色散关系、增长率、相速度、幅值和相位等数值结果与通过流动稳定性中的线性理论求得 T-S 波的理论解是完全吻合的.这证明了在自由来流湍流与二维壁面局部粗糙相互作用下激发边界层内感受性过程是真实存在的。

2) 在自由来流湍流和二维壁面局部粗糙相互作用下,激发边界层内感受性过程的波长转换机制也是存在的.但是,激发边界层内感受性过程的波长转换机制仅仅只改变自由来流湍流的流向波数 α , 并不改变自由来流湍流的展向波数 β , 这一机制是二维壁面局部粗糙的因素所致。

3) 自由来流湍流的三维特征越强,所激发边界层内的感受性系数就越强;自由来流湍流中的低频小扰动比高频小扰动更容易激发边界层内的感受性过程,这一结论与 Choudhari^[20] 理论计算的结果是相吻合的;在不同展向波数的自由来流湍流和二维壁面局部粗糙相互作用下边界层内被诱导出的三维 T-S 波波包的传播方向将发生改变,但传播速度都近似等于无穷远来流速度的 1/3;并且自由来流湍流运动的三维特征越强,即外部扰动的三维特征越显著,所激发边界层内的感受性系数就越强。

4) 当自由来流湍流度 $A_{\text{FST}} \leq 1\%$ 时,与边界层内被感受产生的不同频率 T-S 波的幅值 A_{TS} 几乎成线性增长的关系;当自由来流湍流度 $A_{\text{FST}} > 1\%$ 时,与边界层内被感受产生的 T-S 波的幅值 A_{TS} 的增长关系略有变化,其数值稍偏离线性增长关系。

5) 数值研究发现,边界层内被激发出的 T-S 波的幅值与归一化的二维壁面局部粗糙凸起长度呈现正弦曲线的关系,并且当二维壁面局部凸起长度等于 $\pi/(\alpha_{\text{TS}} - \alpha_{\text{FS}})$ 时边界层内能诱导出最大幅值的 T-S 波;当无量纲壁面局部凸起高度小于等于或大于 0.20 时,边界层内被激发的不同频率 T-S 波的幅值分别与凸起高度呈现线性或非线性增长的关系。

致谢 本文作者衷心感谢南京信息工程大学人才启动基金(2016r046)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] Saric W S, Reed H L, Kerschen E J. Boundary-layer receptivity to freestream disturbances [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2002, **34**(1): 291-319.
- [2] Goldstein M E. The evolution of Tollmien-Schlichting waves near a leading edge[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **127**: 59-81.
- [3] Goldstein M E. Scattering of acoustic waves into Tollmien-Schlichting waves by small stream-wise variations in surface geometry[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1985, **154**: 509-529.
- [4] Ruban A I. On the generation of Tollmien-Schlichting waves by sound[J]. *Fluid Dynamics*, 1984, **19**(5): 709-717.
- [5] Duck P W, Ruban A I, Zhikharev C N. The generation of Tollmien-Schlichting waves by free-stream turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, **312**: 341-371.
- [6] Dietz A J. Distributed boundary layer receptivity to convected vorticity[C]//*AIAA Fluid Dynamics Conference*. New Orleans, LA, USA, 1996. doi: 10.2514/6.1996-2083.
- [7] Dietz A J. Boundary-layer receptivity to transient convected disturbances[J]. *AIAA Journal*,

- 1998, **36**(7): 1171-1177.
- [8] Dietz A J. Local boundary-layer receptivity to a convected free-stream disturbance[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, **378**: 291-317.
- [9] WU Xue-song. On local boundary-layer receptivity to vortical disturbances in the free stream [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **449**: 373-393.
- [10] WU Xue-song. Receptivity of boundary layers with distributed roughness to vortical and acoustic disturbances: a second-order asymptotic theory and comparison with experiments [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **431**: 91-133.
- [11] 陆昌根, 沈露予. 壁面局部吹吸边界层感受性的数值研究[J]. 物理学报, 2015, **64**(22): 224702-1-224702-9. (LU Chang-gen, SHEN Lu-yu. Numerical study on boundary-layer receptivity with localized wall blowing/suction[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, **64**(22): 224702-1-224702-9. (in Chinese))
- [12] SHEN Lu-yu, LU Chang-gen. Boundary-layer receptivity under interaction of free-stream turbulence and localized wall roughness[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2016, **37**(3): 349-360.
- [13] SHEN Lu-yu, LU Chang-gen. Local receptivity in non-parallel boundary layer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2016, **37**(7): 929-940.
- [14] 陆昌根, 沈露予. 无限薄平板边界层前缘感受性过程的数值研究[J]. 物理学报, 2016, **65**(19): 194701. (LU Chang-gen, SHEN Lu-yu. Numerical study of leading-edge receptivity on the infinite-thin flat-plate boundary layer[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, **65**(19): 194701. (in Chinese))
- [15] Tempelmann D, Hanifi A, Henningson D S. Swept-wing boundary-layer receptivity[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, **700**: 490-501.
- [16] Zuccher S, Luchini P. Boundary-layer receptivity to external disturbances using multiple scales [J]. *Meccanica*, 2014, **49**(2): 441-467.
- [17] Johnson M W, Pinarbasi A. The effect of pressure gradient on boundary layer receptivity[J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2014, **93**(1): 1-24.
- [18] Tadjfar M, Bodonyi R J. Receptivity of a laminar boundary layer to the interaction of a three-dimensional roughness element with time-harmonic free-stream disturbances[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, **242**: 701-720.
- [19] Würz W, Herr S, Wörner A, Rist U, Wagner S, Kachanov Y S. Three-dimensional acoustic-roughness receptivity of a boundary layer on an airfoil: experiment and direct numerical simulations[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, **478**: 135-163.
- [20] Choudhari M. Boundary-layer receptivity to three-dimensional unsteady vortical disturbances in free stream[C]//*AIAA 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings*. Reno, NV, 1996. doi: 10.2514/6.1996-181.
- [21] Ricco P. The pre-transitional Klebanoff modes and other boundary-layer disturbances induced by small-wavelength free-stream vorticity[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, **638**: 267-303.
- [22] SHEN Lu-yu, LU Chang-gen, WU Wei-guo, XUE Shi-feng. A high-order numerical method to study three-dimensional hydrodynamics in a natural river[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **7**(2): 180-195.
- [23] LU Chang-gen, CAO Wei-dong, ZHANG Yan-mei, PENG Jin-tao. Large eddies induced by local impulse at wall of boundary layer with pressure gradients[J]. *Progress in Natural Sci-*

ence, 2008, **18**(7): 873-878.

- [24] ZHANG Yong-ming, Zaki T, Sherwin S, WU Xue-song. Nonlinear response of a laminar boundary layer to isotropic and spanwise localized free-stream turbulence[C]//*6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference, Fluid Dynamics and Co-Located Conferences*. Honolulu, Hawaii, 2011.

Numerical Study of Local Receptivity in the Boundary Layer

SHEN Lu-yu, LU Chang-gen

(*School of Marine Sciences, Nanjing University of Information
Science & Technology, Nanjing 210044, P.R.China*)

Abstract: The research on local receptivity in the boundary layer is very important for the prediction and control of the laminar-turbulent transition, and especially the study on the formation mechanism of 3D Tollmien-Schlichting (T-S) waves is meaningful in theory. The high-order high-resolution non-uniform compact finite difference schemes were utilized to study the local receptivity under the interaction of free-stream turbulence and 2D localized wall roughness. The numerical results verify the existence of the local receptivity under the interaction of free-stream turbulence and 2D localized wall roughness, and the streamwise vorticity forms and gets stronger downstream as the excited 3D T-S wave packets evolve in the streamwise direction. The numerical results also show that the propagation direction of the excited 3D T-S wave packets is influenced by the propagation direction of the free-stream turbulence, and the propagation speed is close to 1/3 of the free-stream velocity; the wave-length conversion mechanism only changes streamwise wave number α , whereas spanwise wave number β keeps unchanged. In addition, the relation between the free-stream amplitude and incident angle, the localized wall roughness height and length, and the local receptivity, is confirmed. The in-depth research on this subject is helpful for further understanding of the laminar-turbulent transition and turbulence formation.

Key words: receptivity; boundary layer; free-stream turbulence; Tollmien-Schlichting wave; 2D localized wall roughness

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472139)

引用本文/Cite this paper:

沈露予, 陆昌根. 边界层流中当地感受性过程的数值研究[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1156-1168.

SHEN Lu-yu, LU Chang-gen. Numerical study of local receptivity in the boundary layer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(11): 1156-1168.