

# 飞行器尾涡对的不稳定性建模\*

陈俪芳, 王志博, 孙刚

(复旦大学 航空航天系, 上海 200433)

**摘要:** 为了确定飞行器尾流的保持距离和诱导失稳运动性质,首先在一阶近似 Biot-Savart 定律的基础上,推导了任意多个涡对的诱导运动模型,进而利用线性组合方法得到涡系诱导运动的对称以及反对称模态,并结合模态矩阵特征值的性质描述对称分布涡系的稳定性.因为尾涡结构的不稳定性依赖于相应的模态矩阵特征值的取值,所以在利用对称分布的二涡对的模态验证所推导的模态矩阵理论的正确性的基础上,进一步给出了三涡对的模态矩阵对应的失稳模态.理论推导和特征值的计算显示随着涡丝数量的不断增加,三涡系的不稳定性增强,并且涡系对扰动的放大作用增强.

**关键词:** 涡丝; 模态矩阵; 特征值; 尾涡失稳

**中图分类号:** O355      **文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370059

## 引言

随着航空运输业的发展,机场容量日趋紧张.运输机尾流的保持距离与失稳性质日益受到重视.一般将飞机的尾流划分为近场、扩展近场和中远场等主要区域,这3个区域中存在的涡流动力学特性各异,各区域的划分界限并不是严格的,对不同的机型和不同的飞行状态,这些区域的大小略有变化. Breitsamter<sup>[1]</sup>认为,近场是位于飞机后方小于飞机总长度 1/2 距离内的脱体剪切层;扩展近场是飞机总长度 10 倍以内的区域;中远场是飞机总长 10 倍以外的区域.近场是脱体涡生成与诱导下洗流场分布的区域,涡系互诱导运动显著,以涡合并与扩散为主.扩展近场发生尾流卷起的过程,各高动量的涡系合并,最终造成两个集中涡.而在中远场因扩散与粘性滞止作用,涡系的尾流强度下降,两个平行集中涡耦合诱导失稳.为描述尾涡的失稳, Crow<sup>[2]</sup>, Widnall 等<sup>[3]</sup>, Jimenez<sup>[4]</sup>首先研究了飞行器尾涡对在扩展近场至中远场范围内的运动稳定性,采用 Biot-Savart 定律的一阶模型,用一对含有扰动成分的平行延伸至无穷远的涡丝描述尾涡对的稳定性. Crouch<sup>[5]</sup>将 Crow 的模型扩展到二涡对的运动不稳定性,在建立一阶动力学模型过程中 Crow<sup>[2]</sup>和 Fabre 等<sup>[6]</sup>通过线性组合的方法寻找到一个涡对以及二涡对模态,从而利用模态方程描述涡系中扰动的发展, Saffman<sup>[7]</sup>建立了分析平行排列的一簇涡互诱导运动模型. Tenero 等<sup>[8]</sup>则对一涡对模型中自诱导函数的性质进行了细致的讨论.针对飞机尾涡的

\* 收稿日期: 2016-03-02; 修订日期: 2016-03-13

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2014CB744802)

作者简介: 陈俪芳(1990—),女,硕士生(E-mail: chenlf14@fudan.edu.cn);

王志博(1983—),男,工程师,博士(E-mail: wwzb3@163.com);

孙刚(1966—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: Gang\_sun@fudan.edu.cn).

结构, Chernyshev<sup>[9]</sup> 比较了不同尾涡剖面模型, Visscher 等<sup>[10]</sup> 考虑了大气中存在的扰动对涡系不稳定性的影响. 研究者们进一步利用更为精细的数值模拟方法和实验室观测分析远场尾涡的失稳, Wang 等<sup>[11]</sup> 对涡对在剪切流中的运动和失稳机理进行了系统比较. Ludin 等<sup>[12]</sup> 和 Rottman 等<sup>[13]</sup> 利用数值离散方法模拟了长波扰动对尾涡的干扰影响在远场的发展. Rodrigues 等<sup>[14]</sup> 着重模拟了短波长扰动在椭圆失稳中的发展, Fabre 等<sup>[15]</sup> 提出了飞机尾涡中最大化扰动发展的概念, Allen 等<sup>[16]</sup> 通过在飞机上设置涡扰动装置诱发涡系的失稳.

然而随着运输机型的大型化和机型的多样化, 飞机展长的增加造成了更多的涡对在尾流中的延长, 需要将一、二涡对的失稳模型理论扩展到更多涡对的情况. 本文在 Biot-Savart 定律的基础上, 推导了任意多个涡对的一阶动力学模型, 而后利用线性组合方法得到对应的齐次问题和模态矩阵, 通过讨论任意多个涡对的模态矩阵性质得出了扰动在涡系中的发展情况的求解, 利用 Fabre 等<sup>[6]</sup> 给出的二涡对结果验证了模态矩阵, 最后给出了 3 个涡对的失稳特性的两个算例.

## 1 涡丝动力学模型

Crow<sup>[2]</sup> 把飞行器尾流中含有扰动的集中涡空间运动轨描述为

$$\mathbf{r}_n = i\mathbf{x}_n + \mathbf{j}(y_n + \eta_n e^{i\alpha x_n}) + \mathbf{k}(z_n + \zeta_n e^{i\alpha x_n}), \quad (1)$$

式(1)中  $x_n, y_n, z_n$  代表涡在空间中的坐标,  $\eta_n, \zeta_n$  是波长  $\lambda = 2\pi/\alpha$  带来的扰动振幅,  $\alpha$  为波数, 其中  $n = 1, 2, \dots, N$ .

涡的移动速度为

$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \left( \frac{\partial x_n}{\partial t} \mathbf{i}, \left( \frac{\partial y_n}{\partial t} + \frac{\partial \eta_n}{\partial t} e^{i\alpha x_n} \right) \mathbf{j}, \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} e^{i\alpha x_n} \right) \mathbf{k} \right). \quad (2)$$

飞行器尾涡场中的集中涡一般用对称分布的涡来表示, 根据 Biot-Savart 定律, 集中涡轨迹的参考点  $\mathbf{r}_n$  的诱导速度由 Crouch<sup>[5]</sup> 给出

$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} \int \frac{\mathbf{R}_{mn} \times d\mathbf{L}_m}{|\mathbf{R}_{mn}|^3} = \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial x_m} dx_{mn}, \quad (3)$$

式中,  $dx_{mn}$  表示涡丝  $m, n$  之间的距离. 在假设扰动小于涡间距的情况下即  $|\eta_{n,m}|/\delta \ll 1$ ,  $|\zeta_{n,m}|/\delta \ll 1$ , 略去  $\eta_n^2, \zeta_n^2, \eta_n \zeta_n$ , 利用二项式定理展开式(3), 用  $x$  代替  $x_{mn}$  来简化表达式, 从而扰动  $\eta_m, \eta_n, \zeta_m, \zeta_n$  对应的三向速度分量的一阶表达式为

$$\mathbf{i}: \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} (U_{1mn} \zeta_m + U_{2mn} \eta_m), \quad (4)$$

$$\mathbf{j}: \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} (V_{0mn} + (V_{1mn} \zeta_n + V_{2mn} \zeta_m + V_{3mn} \eta_n + V_{4mn} \eta_m) e^{i\alpha x_n}), \quad (5)$$

$$\mathbf{k}: \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} (W_{0mn} + (W_{1mn} \eta_n + W_{2mn} \eta_m + W_{3mn} \zeta_n + W_{4mn} \zeta_m) e^{i\alpha x_n}). \quad (6)$$

所含有的系数分为  $m = n$  时的自诱导和  $m \neq n$  时的互诱导两种情况. 具体推导过程和系数表达式参考本文的附录 A.

## 2 涡丝系统的对称和反对称模态

如图 1 所示, 涡的半径为  $a_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ , 涡间距为  $b_i$ , 涡的脱体位置处于  $xOy$  平面,

每个涡丝的初始坐标为  $(0, y_i, 0)$ , 尾涡沿  $x$  方向发展, 系统有对称分布的环量。

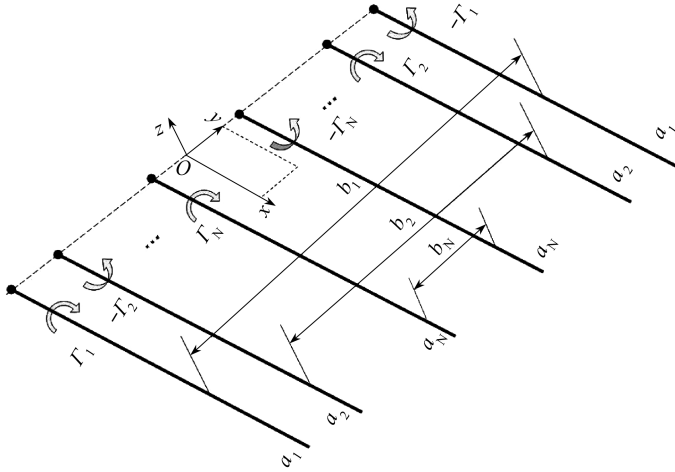


图1  $xOy$  平面内对称结构的涡丝系统

Fig. 1 The vortex filament system of symmetric configuration in the  $xOy$  plane

由于涡对称排列在  $xOy$  面内, 可简化掉与  $z$  相关的项, 受扰动的涡丝轨迹可简化为

$$\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{i} + (y_n + \eta_n e^{i\alpha x_n}) \mathbf{j} + \zeta_n e^{i\alpha x_n} \mathbf{k}, \quad (7)$$

$\mathbf{r}_n$  是涡在三维空间中的位置矢量,  $x_n, y_n, z_n$  为平均位置,  $\eta_n, \zeta_n$  为扰动。

式(7)中的系数矩阵的简化形式见附录 B。

除扰动幅的方程外, 涡丝平均位置的控制方程系数互相独立. 利用线性组合可得到如式(8)和(9)所示的对称和反对称模态:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}_s = \mathbf{M}_s \mathbf{X}_s, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}_a = \mathbf{M}_a \mathbf{X}_a, \quad (9)$$

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} \eta_1 - \eta_{2N} \\ \zeta_1 + \zeta_{2N} \\ \eta_2 - \eta_{2N-1} \\ \zeta_2 + \zeta_{2N-1} \\ \vdots \\ \eta_N - \eta_{N+1} \\ \zeta_N + \zeta_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_a = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{2N} \\ \zeta_1 - \zeta_{2N} \\ \eta_2 + \eta_{2N-1} \\ \zeta_2 - \zeta_{2N-1} \\ \vdots \\ \eta_N + \eta_{N+1} \\ \zeta_N - \zeta_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

模态矩阵是下列稀疏矩阵

$$\mathbf{M}_{s,a} = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \cdots & 0 & M_{1,2N} \\ M_{21} & 0 & \cdots & M_{2,2N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{2N-1,2} & \cdots & 0 & M_{2N-1,2N} \\ M_{2N,1} & 0 & \cdots & M_{2N,2N-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

该矩阵含有  $2N \times 2N$  个元素, 其中有  $2N \times N$  个非零元素. 式(9)与(10)是一阶微分方程, 结合

初始位置, 模态对应的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{X}, \\ \mathbf{X}|_{t=0} = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (12)$$

形式通解为

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^6 c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{R}_i, \quad (13)$$

式中  $\lambda_i$  是模态矩阵的特征值,  $\lambda_i$  并不全相等,  $\mathbf{R}_i$  是线性独立的特征向量,  $c_i$  是与涡丝初始位置无关的待定系数. 如果存在复特征值  $\lambda_i$ , 其线性无关的对应特征向量  $\mathbf{R}_i$  可构成式 (13), 即模态系统 (9) 以及 (10) 的解. 给定二涡对初始分布条件, 其模态矩阵分布的最大特征值由图 2 给出, 由于受到自诱导函数部分的应用范围的限制, 在  $\alpha b_1 > 20$  时导致虚假的失稳模态. 图 2 显示了模态特征值的分布及其与 Fabre 等<sup>[6]</sup> 的结果的比较验证.

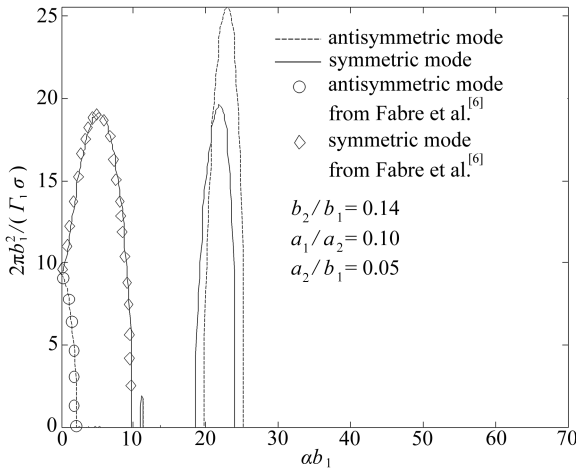


图 2 二涡对不稳定模态与 Fabre 等<sup>[6]</sup> 结果的对比

Fig. 2 The instable modes of 2 vortex pairs in comparison with those given by Fabre et al.<sup>[6]</sup>

### 3 三涡对系统的模态

将本文推导的模型拓展到三涡对系统, 这适用于描述部分运输机机型在起飞或着陆时的尾流场中对称分布的多涡的失稳特性. 如图 3 所示, 三涡对的间距为  $b_i$ , 涡的强度为  $\Gamma_i$ , 涡的半径为  $a_i$ , 涡对称分布在  $xOy$  面内. 这些尾流结构中带有反向分布环量的对称分布的涡.

由式 (10) 进行线性组合计算可得模态矩阵, 矩阵中存在 18 个非零元素, 详见附录 C. 根据图 3 环量的分布关系为  $\Gamma_4 = -\Gamma_3$ ,  $\Gamma_5 = -\Gamma_2$ ,  $\Gamma_6 = -\Gamma_1$ .

本研究的通用理论还可以扩展到四涡对与五涡对以及更多的涡对尾流系统中, 其中四涡对模型的模态矩阵有 32 个非零元素, 五涡对的模态矩阵有 50 个非零元素. 可见随着涡对数量的增多, 模态矩阵的求解规模迅速增大. 这些涡对构型缺乏实际应用背景, 本文不作展开讨论. 而对于那些空间对称分布的奇数个涡丝, 由于其环量不对称, 无法利用本研究给出的线性组合方法来找到对应的模态模型.

图 4 给出了三涡对系统沿轴向波数变化的模态特征值的变化性质, 当  $\alpha b_1 > 20$  后, 同样由于自诱导函数的限制出现了虚假的快速失稳模态, 多涡丝系统不稳定模态更明显. 随着涡丝

数量增加系统将出现涡系间作用的混沌现象.对于三涡对而言,涡的互诱导导致了涡系趋向于快速的失稳合并.由于涡系在生成和空间传播引入的扰动被涡系间的诱导运动快速放大,造成了涡系的快速失稳.从图 4 可以看出只有在较为有限的波数范围内,三涡对中存在的扰动不被放大,而且这个稳态运动的区间保持在低波数的范围内,与二涡对造成的低波数扰动被放大情况不同,扰动中波长较小的扰动不容易被三涡对诱导运动放大.

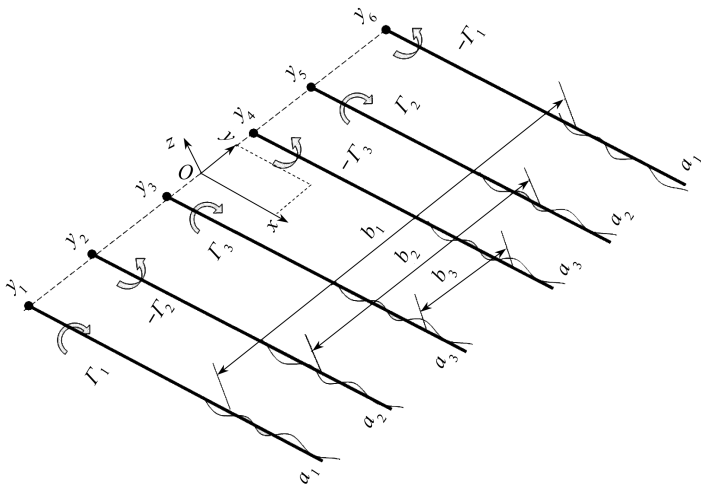
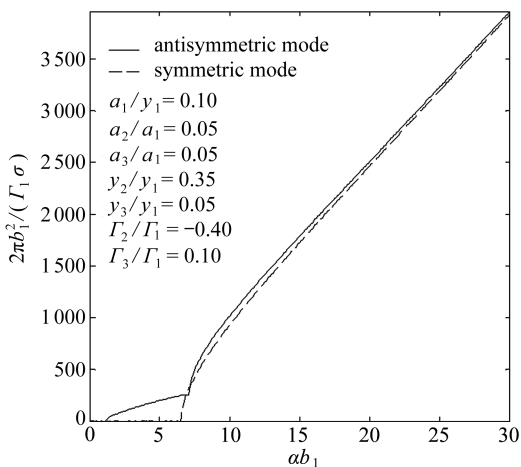
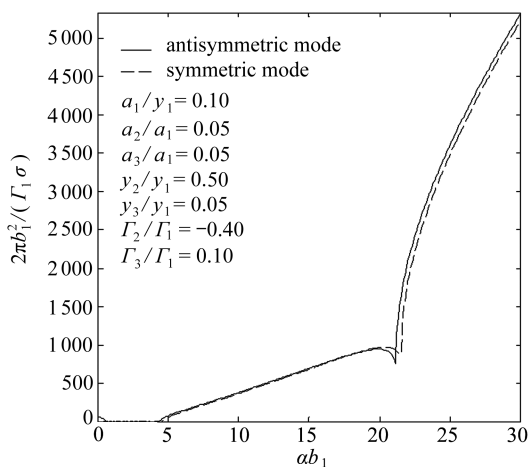


图 3 三涡对对称排布

Fig. 3 The 3 vortex pairs of symmetric configuration



(a) 无量纲涡丝间距离为 0.35, 0.05 的对称和反对称模态



(b) 无量纲涡丝间距离增到为 0.5, 0.05 的对称和反对称模态

(a) Symmetric and antisymmetric modes of nondimensional vortex filaments with spacings of 0.35 and 0.05

(b) Symmetric and antisymmetric modes of nondimensional vortex filaments with larger spacings of 0.5 and 0.05

图 4 三涡对的两个不稳定模态

Fig. 4 2 instable modes of the 3 vortex pairs

为了使飞机尾涡快速失稳,尤其是飞机降落和起飞过程中所形成的多涡对快速失稳,需要对飞机尾涡引入可制造合理波数区间的扰动,加速尾涡的失稳,降低尾流涡系的保持时间和空间长度.

## 4 结 论

本文利用一阶近似 Biot-Savart 定律推导了涡诱导运动的一般理论模型,利用线性组合法得到了对称分布的涡对模态.利用已有的四涡丝系统模态对理论进行了验证,并且扩展到三涡对系统模态,展示了随着涡丝数量增多所出现的不稳定模态与对应波数下扰动的增长特性,通过理论推导分析得到如下结论:

- 1) 首次建立了描述多个涡对诱导运动和扰动发展的动力学模型,利用线性组合的方法形成分离变量后的系数矩阵得到涡运动的对称和反对称模态矩阵.
- 2) 理论推导显式模态矩阵是规则的特殊矩阵,涡对的数量增加,求解规模随之迅速增大.
- 3) 由于自诱导函数自身存在的限制,随着涡对数量增多,在较高波数上出现虚假的失稳模态.
- 4) 对比二涡对和三涡对的运动模态特征值可以看出随着涡对数量的增加,呈现出诱导失稳,说明多涡丝系统不稳定模态更明显,随着涡丝数量增加涡系对较大波数扰动的放大效应显著增强,涡系呈现出快速发散特征.对实际流动而言则由于扰动的发展导致涡系的扩散和涡的合并.

### 附录 A 正文中式(3) 涡系诱导运动的扰动速度推导

利用二项式定理将式(3)中的被积函数表达式展开,仅保留一阶项写成

$$i\alpha y_{mn} \zeta_m e^{i\alpha x_m} + i\alpha z_{mn} \eta_m e^{i\alpha x_m}, \quad (A1)$$

$$\frac{z_{mn}}{r^3} + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^5} z_{mn}^2\right) \zeta_n e^{i\alpha x_n} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{x_{mn}}{r^3} i\alpha - \frac{3}{r^5} z_{mn}^2\right) \zeta_m e^{i\alpha x_{mn}} e^{i\alpha x_n} + \frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} \eta_n e^{i\alpha x_n} - \frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} \eta_m e^{i\alpha x_{mn}} e^{i\alpha x_n}, \quad (A2)$$

$$-\frac{1}{r^3} y_{mn} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5} y_{mn}^2\right) \eta_n e^{i\alpha x_n} - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} i\alpha x_{mn} - \frac{3}{r^5} y_{mn}^2\right) \eta_m e^{i\alpha x_{mn}} e^{i\alpha x_n} - \frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} \zeta_n e^{i\alpha x_n} + \frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} \zeta_m e^{i\alpha x_{mn}} e^{i\alpha x_n}, \quad (A3)$$

上式中  $\alpha$  为波数,  $i$  记做虚数符号,  $y_{mn} = y_m - y_n$ ,  $z_{mn} = z_m - z_n$  表示涡间距离分量,  $r^2 = x_{mn}^2 + y_{mn}^2 + z_{mn}^2$  表示涡空间距离,  $\eta_m, \eta_n, \zeta_m, \zeta_n$  分别表示标记为  $m$  和  $n$  的涡受到的  $y$  向和  $z$  向的扰动分量.

结合式(2)与式(3),虚部和实部分别相等得到扰动速度三向分量的表达式:

$i$  向分量为

$$\sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} (U_{1mn} \zeta_m + U_{2mn} \eta_m),$$

式(4)中的系数均为虚数,表明扰动沿着  $i$  向发生了波数成分的变化:

$$U_{1mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^3} i\alpha y_{mn} e^{i\alpha x} dx, \quad U_{2mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^3} i\alpha z_{mn} e^{i\alpha x} dx;$$

$j$  向分量为

$$\sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{4\pi} (V_{0mn} + (V_{1mn} \zeta_n + V_{2mn} \zeta_m + V_{3mn} \eta_n + V_{4mn} \eta_m) e^{i\alpha x_n}),$$

式(5)中的系数如下:

$$V_{0mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_{mn}}{r^3} dx, \quad V_{1mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^5} z_{mn}^2\right) dx,$$

$$V_{2mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{r^3} (1 - i\alpha x) - \frac{3}{r^5} z_{mn}^2 \right) e^{i\alpha x} dx,$$

$$V_{3mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} dx, \quad V_{4mn} = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} e^{i\alpha x} dx;$$

$k$  向分量为

$$\sum_{m=1}^N \frac{\Gamma^m}{4\pi} (W_{0mn} + (W_{1mn}\eta_n + W_{2mn}\eta_m + W_{3mn}\zeta_n + W_{4mn}\zeta_m) e^{i\alpha x_n}),$$

式(6)的系数如下:

$$W_{0mn} = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{y_{mn}}{r^3} dx, \quad W_{1mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{r^3} - 3\frac{y_{mn}^2}{r^5} \right) dx,$$

$$W_{2mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{1}{r^3} (1 - i\alpha x) + 3\frac{y_{mn}^2}{r^5} \right) e^{i\alpha x} dx,$$

$$W_{3mn} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{r^3} y_{mn} z_{mn} dx, \quad W_{4mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{r^5} y_{mn} z_{mn} e^{i\alpha x} dx.$$

上式中  $m \neq n$  时表示涡丝间互诱导作用:

$$U_{1mn} = \frac{i\alpha}{r} y_{mn} K_1(\alpha r), \quad U_{2mn} = \frac{i\alpha}{r} z_{mn} K_1(\alpha r),$$

$$V_{0mn} = -\frac{z_{mn}}{2r^2}, \quad V_{1mn} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3z_{mn}^2}{4r^4},$$

$$V_{2mn} = \frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r) + \alpha^2 K_0(\alpha r) - \frac{z_{mn}^2 \alpha^2}{r^2} K_2(\alpha r) = \psi(\alpha r) - \frac{z_{mn}^2}{r^2} \phi(\alpha r),$$

其中,  $K_0, K_1, K_2$  是 0 阶、1 阶、2 阶第二类修正 Bessel(贝塞尔)函数,且

$$\psi(\alpha r) = \frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r) + \alpha^2 K_0(\alpha r), \quad \phi(\alpha r) = \alpha^2 K_2(\alpha r),$$

$\psi$  与  $\phi$  表示涡间互诱导项.

$$V_{3mn} = -\frac{3y_{mn}z_{mn}}{4r^4}, \quad V_{4mn} = -\frac{y_{mn}z_{mn}\alpha^2}{r^4} K_2(\alpha r) = -\frac{y_{mn}z_{mn}}{r^4} \phi(\alpha r),$$

$$W_{0mn} = \frac{y_{mn}}{2r^2}, \quad W_{1mn} = -\frac{1}{2r^2} + \frac{3y_{mn}^2}{4r^4},$$

$$W_{2mn} = -\left( \frac{\alpha}{r} K_1(\alpha r) + \alpha^2 K_0(\alpha r) - \frac{y_{mn}^2 \alpha^2}{r^2} K_2(\alpha r) \right) = -\psi(\alpha r) + \frac{y_{mn}^2}{r^2} \phi(\alpha r),$$

$$W_{3mn} = -V_{3mn}, \quad W_{4mn} = -V_{4mn}.$$

当  $m = n$  时表示涡丝的自诱导运动,此时互诱导系数为 0,即

$$U_{1nn} = U_{2nn} = V_{0nn} = W_{0nn} = V_{3nn} = W_{3nn} = V_{4nn} = W_{4nn} = 0,$$

$$V_{1nn} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x_0^2}, \quad W_{1nn} = \frac{1}{2} \frac{1}{x_0^2},$$

$$V_{2nn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos(\alpha x_0)}{x_0^2} + \frac{\alpha \sin(\alpha x_0)}{x_0} - \alpha^2 C(\alpha x_0) \right) = \omega(\alpha x_0),$$

$$W_{2nn} = -V_{2nn} = -\omega(\alpha x_0).$$

上式中的  $\omega(\alpha x_0)$  称为自诱导函数,其中  $x_0$  为截断距离可看作涡的速度剖面和涡半径的函数,  $C(x)$  为余弦积分函数,具体展开式为

$$C(x) = \sin x \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1 \cdot 2}{x^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} - \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6}{x^7} + \dots \right) -$$

$$\cos x \cdot \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} - \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7}{x^8} + \dots \right).$$



自诱导函数  $\omega(\alpha x_0)$  的表达式由 Crow<sup>[2]</sup> 首先给出, Crow 的自诱导函数模型对较大的截断距离和波数的选取没有限制, 但是随着波数增加和截断距离趋向于 0, Crow 自诱导模型也将出现奇异性, 目前还没有较好的理论模型解决此涡自诱导模型的奇异性.

对于大于 0 的  $x_0$  值和  $\alpha > 1$  的长波数的轴对称涡, Fabre 等<sup>[6]</sup> 给出了另一种自诱导表达式, 写成如下形式:

$$\omega(\alpha a) = \frac{(\alpha a)^2}{2} \left( \ln \frac{2}{(\alpha a_e)} - \gamma + \frac{1}{4} \right), \quad (\text{A4})$$

其中, Euler(欧拉)常数  $\gamma = 0.577$ ,  $a_e$  是有效涡核半径  $a_e = ae^{1/4-A+C}$ .

式(A4)中的系数  $A$  和  $C$  的表达式为

$$A = \int_0^r V_\theta^2 r' dr' - \ln(r/a), \quad C = 2 \left( \frac{2\pi}{\Gamma} \right) \int_0^\infty U^2 r dr,$$

其中  $r$  为涡上一点与当前计算点的间距,  $V_\theta$  是涡的速度剖面,  $a$  为涡半径,  $U$  为涡传播速度.

但是 Fabre 的自诱导模型只有当  $\alpha a \ll 1$  时才成立; 若  $\alpha a \rightarrow 1$ , Fabre 等<sup>[6]</sup> 采用 Saffman<sup>[7]</sup> 给出的 Lamb(兰姆)涡的弯曲模态的自诱导:

$$\frac{J_1'(\beta a)}{\beta a J_1(\beta a)} = -\frac{K_1'(\alpha a)}{ka K_1(\alpha a)} - \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\alpha \beta^2 a^2}, \quad (\text{A5})$$

其中  $\beta^2 = \alpha^2 \frac{4 - (\omega + 1)^2}{(\omega + 1)^2}$ ,

$J_1$  为一阶 Bessel 函数,  $K_1$  为 1 阶第二类修正 Bessel 函数,  $J_1'$  和  $K_1'$  表示对波数  $\alpha$  的导数,  $\omega$  为要求解的自诱导函数值.

式(A5)仅在  $\alpha a \sim O(1)$  时, 自诱导函数成立, 可利用 Newton(牛顿)切线法求解方程.

## 附录 B 对诱导运动方程中系数的简化

采用文中式(7)时, 式(4)、(5)、(6)对应系数可进一步简化, 当  $m \neq n$  时,

$$V_{1mn} = \frac{1}{2r^2} = \frac{1}{2|y_m - y_n|^2}, \quad V_{2mn} = \psi_{mn},$$

$$W_{1mn} = -\frac{1}{2r^2} + \frac{3y_{mn}^2}{4r^4} = \frac{1}{4|y_m - y_n|^2}, \quad W_{2mn} = -\psi_{mn} + \phi_{mn},$$

此处  $\psi_{mn}$  表示  $\psi(\alpha|y_m - y_n|)$ ,  $\phi_{mn}$  表示  $\phi(\alpha|y_m - y_n|)$ .

以上 3 式中  $r = |r_m - r_n| = |y_m - y_n|$ ,  $y_{mn} = y_m - y_n$ .

根据图 1 可知, 涡丝间距的排布满足

$$|y_{m,n}| = |y_{N+1-n, N+1-m}|,$$

$$\psi_{mn} = \frac{\alpha}{|y_m - y_n|} K_1(\alpha|y_m - y_n|) + \alpha^2 K_0(\alpha|y_m - y_n|),$$

$$\phi_{mn} = \alpha^2 K_2(\alpha|y_m - y_n|).$$

当  $m = n$  时,

$$V_{1nn} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x_0^2}, \quad W_{1nn} = \frac{1}{2} \frac{1}{x_0^2}, \quad V_{2nn} = \omega(\alpha x_0), \quad W_{2nn} = -V_{2nn} = -\omega(\alpha x_0).$$

## 附录 C 三涡对模态矩阵的非零元素

对应于正文式(12), 三涡对模态矩阵  $M_{s,a}$  的非零元素如下, 其中自诱导项采用附录 A 中式(A5)的表达式求解.

$$M_{12} = \underbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 6}}^6 \frac{\Gamma_m}{2\pi y_{m6}^2}}_{S_1} + \frac{\Gamma_1}{2\pi a_1^2} \omega(\alpha a_1) \mp \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{16}^2} \psi_{16}, \quad M_{14} = \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{21}^2} \psi_{21} \mp \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{51}^2} \psi_{51},$$



$$\begin{aligned}
M_{16} &= \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{31}^2} \psi_{31} \mp \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{36}^2} \psi_{36}, M_{21} = \underbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 6}}^6 \frac{\Gamma_m}{2\pi y_{m6}^2}}_{S_2} + \frac{\Gamma_1}{2\pi a_1^2} \omega(\alpha a_1) \pm \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{16}^2} \chi_{16}, \\
M_{23} &= \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{21}^2} \chi_{21} \pm \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{26}^2} \chi_{26}, M_{25} = \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{31}^2} \chi_{31} \pm \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{36}^2} \chi_{36}, \\
M_{32} &= \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{12}^2} \psi_{12} \mp \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{15}^2} \psi_{15}, M_{34} = \underbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 5}}^6 \frac{\Gamma_m}{2\pi y_{m5}^2}}_{S_3} + \frac{\Gamma_2}{2\pi a_2^2} \omega(\alpha a_2) \mp \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{25}^2} \psi_{25}, \\
M_{36} &= \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{32}^2} \psi_{32} \mp \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{42}^2} \psi_{42}, M_{41} = \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{12}^2} \chi_{12} \pm \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{15}^2} \chi_{15}, \\
M_{43} &= \underbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 5}}^6 \frac{\Gamma_m}{2\pi y_{m5}^2}}_{S_4} + \frac{\Gamma_2}{2\pi a_2^2} \omega(\alpha a_2) \pm \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{25}^2} \chi_{25}, M_{45} = \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{35}^2} \chi_{35} \pm \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{32}^2} \chi_{32}, \\
M_{52} &= \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{13}^2} \psi_{13} \mp \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{14}^2} \psi_{14}, M_{54} = \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{23}^2} \psi_{23} \mp \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{24}^2} \psi_{24}, \\
M_{56} &= \underbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 4}}^6 \frac{\Gamma_m}{2\pi y_{m4}^2}}_{S_5} + \frac{\Gamma_3}{2\pi a_3^2} \omega(\alpha a_3) \mp \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{34}^2} \psi_{34}, M_{61} = \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{13}^2} \chi_{13} \pm \frac{\Gamma_1}{2\pi y_{14}^2} \chi_{14}, \\
M_{63} &= \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{23}^2} \chi_{23} \pm \frac{\Gamma_2}{2\pi y_{24}^2} \chi_{24}, M_{65} = \underbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 4}}^6 \frac{\Gamma_m}{2\pi y_{m4}^2}}_{S_6} + \frac{\Gamma_3}{2\pi a_3^2} \omega(\alpha a_3) \pm \frac{\Gamma_3}{2\pi y_{34}^2} \chi_{34},
\end{aligned}$$

以上各式中,  $a_1, a_2, a_3$  表示涡半径, 此处采用 Fabre 等的自诱导运动模型式 (A4) 中的  $\omega(\alpha a_i)$  表达第  $i$  个涡的自诱导运动函数,  $\psi_{ij}$  与  $\chi_{ij}$  表示互诱导函数, 下标  $S_i$  表示剪切运动函数项, 符号  $\pm$  与  $\mp$  中位于上方的属于  $M_s$ , 位于下方的属于  $M_a$ .

#### 参考文献 (References):

- [1] Breitsamter C. Wake vortex characteristics of transport aircraft[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2011, **47**(2): 89-134.
- [2] Crow S C. Stability theory for a pair of trailing vortices[J]. *AIAA Journal*, 1970, **8**(12): 2172-2179.
- [3] Widnall S E, Bliss D, Zalay A. Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair[C]//*Aircraft Wake Turbulence and Its Detection*. Springer US, 1971: 305-338.
- [4] Jimenez J. Stability of a pair of co-rotating vortices[J]. *Physics of Fluids*, 1975, **18**: 1580-1581.
- [5] Crouch J D. Instability and transient growth for two trailing-vortex pairs[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, **350**: 311-330.
- [6] Fabre D, Jacquin L. Stability of a four-vortex aircraft wake model[J]. *Physics of Fluids*, 2000, **12**(10): 2438-2443.
- [7] Saffman P G. *Vortex Dynamics*[M]. England: Cambridge University Press, 1992: 216-218.
- [8] Tendero J A, Theofilis V, Roura M, Govindarajan R. On vortex filament methods for linear instability analysis of aircraft wakes[J]. *Aerospace Science & Technology*, 2015, **44**: 51-68.
- [9] Chernyshev S L, Gaifullin A M, Sviridenko Y N. Civil aircraft vortex wake. TsAGI's research activities[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2014, **71**: 150-166.
- [10] Visscher I D, Bricteux L, Winckelmans G. Aircraft vortices in stably stratified and weakly tur-

- bulent atmospheres: simulation and modeling[J]. *AIAA Journal*, 2013, **51**(3): 551-566.
- [11] WANG Jin-jun, PAN Chong, CHOI Kwing-so, GAO Lei, LIAN Qi-xiang. Formation, growth and instability of vortex pairs in an axisymmetric stagnation flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, **725**: 681-708.
- [12] Ludin H B, Omar A A, Asrar W. Numerical study of the effect of spoiler configuration on wake vortex alleviation[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2013, **28**(3): 1-12.
- [13] Rottman J W, Dommermuth D G, Innis G E, O'Shea T T, Novikov E. Numerical simulation of wakes in a weakly stratified fluid[C]//*24th Symposium on Naval Hydrodynamics*. Fukuoka, Japan, 2002: 17-23.
- [14] Rodrigues B, Luca D. Weakly nonlinear analysis of short-wave elliptical instability[J]. *Physics of Fluids*, 2009, **21**(1): 199-206.
- [15] Fabre D, Jacquin L, Loof A. Optimal perturbations in a four-vortex aircraft wake in counter rotating configuration[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, **451**(1): 319-328.
- [16] Allen A, Breitsamter C. Transport aircraft wake influenced by a large winglet and winglet flaps[J]. *Journal of Aircraft*, 2012, **45**(2): 686-699.

## Instability of Aircraft Multiple Trailing Vortex Pairs

CHEN Li-fang, WANG Zhi-bo, SUN Gang

(*Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University,  
Shanghai 200433, P.R.China*)

**Abstract:** For aircrafts the wake vortex separation and the disturbance-induced vortex instability draw more and more concerns. A 1st-order approximation of the Biot-Savart law was used to build the induced motion model for arbitrarily multiple vortex pairs. Symmetric and antisymmetric modes of the induced motion of vortex pairs were deduced with the linear combination method. The properties of the modal matrix eigenvalues were obtained to describe instability of the multiple vortex pairs. The modes of 2 vortex pairs were used for validation of the proposed model, which was thereafter extended to 3 vortex pairs to give the instable modes corresponding to the modal matrices. The theoretical analysis and eigenvalue calculation show that, with the increase of the number of vortex filaments, the instability of the 3 vortex pairs will rise, and the amplification effects of the vortex system on the disturbance will heighten.

**Key words:** vortex filament; modal matrix; eigenvalue; wake instability

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB744802)

引用本文/Cite this paper:

陈俐芳, 王志博, 孙刚. 飞行器尾涡对的不稳定性建模[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(8): 863-872.  
CHEN Li-fang, WANG Zhi-bo, SUN Gang. Instability of aircraft multiple trailing vortex pairs[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 863-872.