

捕食者和食饵均带有扩散的随机捕食-食饵模型动力学分析*

祖力¹, 黄冬冬¹, 柳扬²

(1. 海南师范大学 数学与统计学院, 海口 571158;
2. 大连大学 信息工程学院, 辽宁 大连 116600)

摘要: 考虑了斑块环境下捕食者种群和食饵种群分别在 n 个斑块扩散的随机捕食-食饵模型. 利用 Lyapunov 函数法证明了对任意给定的初始值, 随机系统全局正解的存在唯一性, 并对其进行了有界性分析. 此外给出了食饵种群及整个系统灭绝的充分条件. 最后通过数值模拟验证了所得理论的正确性.

关键词: 捕食-食饵模型; 随机扰动; 扩散; 随机最终有界; 灭绝性

中图分类号: O175.1

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370051

引言

捕食者与食饵的动态关系是生物数学研究的重点^[1-15]. 然而由于地理环境的差异和人类活动的影响, 许多物种的栖息地被分散成孤立的斑块. 某些斑块由于食饵的稀缺, 捕食者会迁移或扩散到食饵丰富的斑块去捕食, 而食饵种群也可以扩散到其他斑块. 如老鹰捕食兔子, 两个物种都可以在斑块间迁移. Zhang 和 Teng^[6] (2008) 研究了捕食-食饵模型, 得到系统正周期解的存在性、有界性和持久性的充分条件. Kuang 和 Takeuchi^[7] (1994) 讨论了食饵在两个斑块间扩散的捕食-食饵模型, 给出了系统正平衡点的存在性、局部及全局稳定性的条件, 用例子分析了扩散系数对系统稳定性的影响. 本文考虑文献[13]中的捕食-食饵模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i(r_i - b_i x_i - e_i y_i) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(x_j - \alpha_{ij} x_i), \\ \dot{y}_i = y_i(-\gamma_i - \delta_i y_i + \varepsilon_i x_i) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(y_j - \beta_{ij} y_i), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

这里 x_i, y_i 分别表示第 i 个斑块上食饵和捕食者的密度. 模型中所有的参数为非负常数且 e_i, ε_i 为正常数. 这里 r_i, γ_i 分别表示食饵物种 x 的增长率和捕食者物种 y 的死亡率. b_i 和 δ_i 表示物种 x 和物种 y 的密度制约系数. e_i 和 ε_i 分别表示物种 x 随捕食减少的系数及物种 y 因捕食物种 x 而增加的系数. 常数 d_{ij} 和 λ_{ij} 分别表示物种 x 和物种 y 从斑块 j 到斑块 i 的扩散率, 常数 α_{ij} 和

* 收稿日期: 2016-02-23; 修订日期: 2016-10-16

基金项目: 海南省教育厅高等学校科学研究项目(Hjkj2013-16); 海南省自然科学基金(20161006)

作者简介: 祖力(1979—), 女, 副教授, 博士(E-mail: 147362868@qq.com);

黄冬冬(1990—), 男, 硕士生(通讯作者: E-mail: 649078137@qq.com);

柳扬(1979—), 女, 讲师, 博士生.

β_{ij} 依据不同的边界条件选出.

实际上,种群系统状态会受到环境随机噪声的影响,比如天气和疾病等.许多学者研究了具有随机效应的捕食-食饵系统.Ji 等^[8](2009)利用 Itô 公式,线性随机微分方程理论以及扩散理论研究了具有随机扰动的带有修正的 Leslie-Gower 和 Holling- II 型捕食-食饵模型,得到系统正解的存在唯一性及系统灭绝性的条件.Cai 和 Lin^[9](2007)建立了食物过剩和捕食者饱和两个极端情况统一的随机捕食-食饵模型,利用随机平均法得到该模型中两物种的稳态 PDF.Zu 等^[4](2012)研究了食饵扩散的随机捕食-食饵模型,由 Lyapunov 函数法得到系统正解的存在唯一性,给出了系统灭绝的充分条件同时证明了系统存在平稳分布且具有遍历性.本文将考虑捕食者和食饵都带扩散的捕食-食饵模型加上随机扰动的影响.

考虑方程(1)中的食饵内禀增长率和捕食者死亡率受到白噪声的影响:

$$r_i \rightarrow r_i + \sigma_{1i} \dot{B}_{1i}(t), \quad -\gamma_i \rightarrow -\gamma_i + \sigma_{2i} \dot{B}_{2i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

这里 $B_{1i}(t), B_{2i}(t)$ 为相互独立的 Brown (布朗) 运动且 $\sigma_{1i}^2, \sigma_{2i}^2$ 表示白噪声的强度.于是捕食和食饵都带扩散的随机模型可表示为

$$\begin{cases} dx_i = \left[x_i(r_i - b_i x_i - e_i y_i) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(x_j - \alpha_{ij} x_i) \right] dt + \sigma_{1i} x_i dB_{1i}(t), \\ dy_i = \left[y_i(-\gamma_i - \delta_i y_i + \varepsilon_i x_i) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(y_j - \beta_{ij} y_i) \right] dt + \sigma_{2i} y_i dB_{2i}(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

假设 d_{ij} 和 λ_{ij} 为非负常数, (d_{ij}) 和 (λ_{ij}) 为不可约矩阵,且参数 $r_i, \gamma_i, e_i, \varepsilon_i, b_i, \delta_i$ 为正常数.

针对不同模型, Lyapunov 函数的构造往往是不同的,需要一定的技巧,本文根据模型的特点在证明正解存在唯一性、有界性和灭绝性时构造不同形式的 Lyapunov 函数,得到了相关结论.文章结构如下:第 1 节说明对任意正的初始值存在唯一正的全局解;第 2 节证明解的 P 阶矩有界;第 3 节给出食饵种群及整个系统灭绝的充分条件;第 4 节通过数值模拟验证理论的正确性;第 5 节为结论.

给定完备的概率空间 $(\Omega, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ (满足一般的条件 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 右连续且 F_0 包含所有的 P -零测集). 设 R_+^{2n} 表示 R^{2n} 正的核,即 $R_+^{2n} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in R^{2n} : x_i > 0, y_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$. 为了方便,令 $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t), \dots, x_n(t), y_n(t))$, $|\cdot|$ 表示 R^{2n} 的欧式范数.

1 全局正解

定理 1 对任意给定的初值 $\mathbf{X}(0) \in R_+^{2n}$, 随机微分方程(3)存在唯一的正解 $\mathbf{X}(t)$, 并且此解以概率 1 停留在 R_+^{2n} 内.

证明 定义一个 C^2 函数 $V: R_+^{2n} \rightarrow R_+$,

$$V(\mathbf{X}(t)) = \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i(x_i - 1 - \ln x_i) + e_i(y_i - 1 - \ln y_i)], \quad (4)$$

应用 Itô 公式得到

$$\begin{aligned} L(V) = & \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \left((x_i - 1) \left[r_i - b_i x_i - e_i y_i + \sum_{j=1}^n d_{ij} \left(\frac{x_j}{x_i} - \alpha_{ij} \right) \right] + \frac{\sigma_{1i}^2}{2} \right) + \right. \\ & \left. e_i \left((y_i - 1) \left[-\gamma_i - \delta_i y_i + \varepsilon_i x_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \left(\frac{y_j}{y_i} - \beta_{ij} \right) \right] + \frac{\sigma_{2i}^2}{2} \right) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \left[-\varepsilon_i b_i x_i^2 - e_i \delta_i y_i^2 + \varepsilon_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_{ij} + b_i - e_i \right) x_i + \varepsilon_i \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j + \right. \\ \left. e_i \left(-\gamma_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \beta_{ij} + \delta_i + \varepsilon_i \right) y_i + e_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j + \right. \\ \left. \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_{ij} - r_i + \frac{\sigma_{1i}^2}{2} \right) + e_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \beta_{ij} + \gamma_i + \frac{\sigma_{2i}^2}{2} \right) \right]. \quad (5)$$

显然由于二次项的系数为负, 可以找到一个正的常数 K^* 满足

$$L(V) \leq K^*, \quad (6)$$

且 K^* 独立于 x_i, y_i 和 t . 接下来证明定理余下的部分.

因为方程(3)的漂移系数不满足线性增长条件, 一般的存在唯一性定理不能应用到这个系统, 但是它是局部 Lipschitz 连续. 因此对任意给定的初值 $\mathbf{X}(0) \in R_+^{2n}$, 在 $t \in [0, \tau_e)$ 存在唯一的局部解 $\mathbf{X}(t)$, τ_e 为爆破时间. 由方程(3)对任意 $t \in [0, \tau_e)$, 有

$$\begin{cases} x_i(t) = x_i(0) \exp \left(\int_0^t \left(r_i - b_i x_i - e_i y_i + \sum_{j=1}^n d_{ij} \left(\frac{x_j}{x_i} - \alpha_{ij} \right) \right) dt + \int_0^t \sigma_{1i} x_i dB_{1i}(s) \right), \\ y_i(t) = y_i(0) \exp \left(\int_0^t \left(-\gamma_i - \delta_i y_i + \varepsilon_i x_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \left(\frac{y_j}{y_i} - \beta_{ij} \right) \right) dt + \int_0^t \sigma_{2i} x_i dB_{2i}(s) \right), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $x_i(0) > 0, y_i(0) > 0$, 可以得到对任意 $t \in [0, \tau_e)$, $\mathbf{X}_i(t) \geq 0$. 则由比较定理(文献[16]中的定理 3.1), 对所有 $t \in [0, \tau_e)$ 有 $\mathbf{X}_i(t) \geq \mathbf{U}_i(t)$, 这里 $\mathbf{U}_i(t) = (u_i(t), v_i(t))$ 为下面 SDE 的解:

$$\begin{cases} u_i(t) = u_i(0) \exp \left(\int_0^t \left(r_i - b_i x_i - e_i y_i + \sum_{j=1}^n d_{ij} \left(\frac{x_j}{x_i} - \alpha_{ij} \right) \right) dt + \int_0^t \sigma_{1i} x_i dB_{1i}(s) \right), \\ u_i(0) = x_i(0), \\ v_i(t) = v_i(0) \exp \left(\int_0^t \left(-\gamma_i - \delta_i y_i + \varepsilon_i x_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \left(\frac{y_j}{y_i} - \beta_{ij} \right) \right) dt + \int_0^t \sigma_{2i} x_i dB_{2i}(s) \right), \\ v_i(0) = y_i(0). \end{cases}$$

类似于文献[2]中引理 4.2 的证明, 本文可以说明 $P(\mathbf{U}_i(t) > 0, t \in [0, \tau_e)) = 1$.

因此对任意 $t \in [0, \tau_e)$, $\mathbf{X}_i(t) = (x_i(t), y_i(t)) > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 为了说明这个解是全局的, 只须说明 $\tau_e = \infty$ a.s.. 设 $k_0 > 0$ 且充分大使得 $|\mathbf{X}(0)| \leq k_0$. 对每个整数 $k \geq k_0$ 定义停时

$$\tau_k := \inf \{ t \in [0, \tau_e) : |\mathbf{X}(t)| > k \},$$

规定 $\inf \emptyset = \infty$, \emptyset 为空集. 显然当 $k \rightarrow \infty$ 时 τ_k 递增. 令 $\tau_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 因此 $\tau_\infty \leq \tau_e$ a.s., 所以只要说明 $\tau_\infty = \infty$ a.s.. 设 $T > 0$ 对任意 $0 \leq t \leq \tau_k \wedge T$, 对 $V(\mathbf{X}(t))$ 由 Itô 公式和式(5)

$$dV(\mathbf{X}(t)) = L(V) dt + \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i (x_i - 1) \sigma_{1i} dB_{1i}(t) + e_i (y_i - 1) \sigma_{2i} dB_{2i}(t)) \leq \\ K^* dt + \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i (x_i - 1) \sigma_{1i} dB_{1i}(t) + e_i (y_i - 1) \sigma_{2i} dB_{2i}(t)), \quad (8)$$

对每一 $k \geq k_0$, 定义

$$\mu(k) := \inf \{ V(\mathbf{X}(t)) : |\mathbf{X}(t)| > k \}.$$

由不等式对 $\forall p > 0, u \in R^{n+}, n^{(1-p/2) \wedge 0} |u|^p \leq \sum_{i=1}^n u_i^p \leq n^{(1-p/2) \vee 0} |u|^p$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(k) = \infty. \quad (9)$$

则由式(8)可以找到一常数 $\bar{K} > 0$ 使得

$$\mu(k)P(\tau_k \leq T) \leq E[V(X(\tau_k))I_{\tau_k \leq T}] \leq E[V(X(\tau_k \wedge T))] \leq \bar{K}.$$

由式(9)并令 $k \rightarrow \infty$ 可以得到

$$P(\tau_\infty \leq T) = 0.$$

因为 $T > 0$ 为任意的, 所以必然有

$$P(\tau_\infty = \infty) = 1,$$

则系统(3) 在 $t > 0$ 上存在唯一的全局解 $X(t) \in R_+^{2n}$, 定理证毕.

注 1 在确实性的模型中即 $\sigma_{1i} = \sigma_{2i} = 0$, 本文主要研究系统正平衡点的稳定性. 当确定性系统引入随机扰动后, 导致随机系统的解表现为在确定性系统正平衡点的某邻域内波动, 这可以看做是一种弱稳定性, 即平稳分布. 定理 1 说明 SDE(3) 的解会以概率 1 停留在正的核 R_+^{2n} 内, 这个性质可以用来研究解的 p 阶矩和随机最终有界.

2 有界性估计

定义 1 如果对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 都存在一个正数 $\chi(=\chi(\varepsilon))$, 使得对任意初值 $X(0) \in R_+^{2n}$, 系统(3) 的解 $X(t)$ 都有如下性质:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|X(t)| > \chi\} < \varepsilon, \quad (10)$$

则称系统(3) 的解为随机最终有界.

引理 1 对任意给定的初值 $X(0) \in R_+^{2n}$, 存在正数 $\kappa(p)$, p_i 和 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使得 SDE (3) 的解 $X(t)$ 有如下性质:

$$E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \leq \kappa(p), \quad t \geq 0, p > 1. \quad (11)$$

证明 由 Itô 公式和 Young 不等式有

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{p} x_i^p\right) &= \left[-b_i x_i^{p+1} + \left(r_i + \frac{p-1}{2} \sigma_{1i}^2 - \sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_{ij}\right) x_i^p - \right. \\ &\quad \left. e_i x_i^p y_i + \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i^{p-1} x_j \right] dt + \sigma_{1i} x_i^p dB_{1i}(t) \leq \\ &\quad \left[-b_i x_i^{p+1} + \left(r_i + \frac{p-1}{2} \sigma_{1i}^2 + \sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_{ij} + \frac{p-1}{p} \sum_{j=1}^n d_{ij}\right) x_i^p + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j^p \right] dt + \sigma_{1i} x_i^p dB_{1i}(t) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{p} y_i^p\right) &= \left[-\delta_i y_i^{p+1} + \left(-\gamma_i + \frac{p-1}{2} \sigma_{2i}^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \beta_{ij}\right) y_i^p + \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_i y_i^p x_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_i^{p-1} y_j \right] dt + \sigma_{2i} y_i^p dB_{2i}(t) \leq \end{aligned}$$

$$\left[\left(-\delta_i + \frac{p\varepsilon_i k_i}{p+1} \right) y_i^{p+1} + \left(-\gamma_i + \frac{p-1}{2} \sigma_{2i}^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \beta_{ij} \right) y_i^p + \varepsilon_i \mathcal{J}_i^p x_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_i^{p-1} y_j \right] dt + \sigma_{2i} y_i^p dB_{2i}(t),$$

这里 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为正的确定常数, 因此, 对正的常数 p_i, q_i , 有

$$\begin{aligned} d \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p + q_i y_i^p) \right] \leq & \sum_{i=1}^n \left\{ -p \left(p_i b_i - \frac{q_i \varepsilon_i k_i^{-p}}{p+1} \right) x_i^{p+1} - p q_i \left(\delta_i - \frac{p \varepsilon_i k_i}{p+1} \right) y_i^{p+1} + \right. \\ & p_i \left[p r_i + \frac{p(p-1)}{2} \sigma_{1i}^2 + \sum_{j=1}^n d_{ij} (p-1 + p \alpha_{ij}) + \sum_{j=1}^n d_{ji} \frac{p_j}{p_i} \right] x_i^p + \\ & q_i \left[-p \gamma_i + \frac{p(p-1)}{2} \sigma_{2i}^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (p-1 + p \beta_{ij}) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \frac{p_j}{p_i} \right] y_i^p \Big\} dt + \\ & p \sum_{i=1}^n p_i \sigma_{1i} x_i^p dB_{1i}(t) + p \sum_{i=1}^n q_i \sigma_{2i} y_i^p dB_{2i}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

说明存在 $p_i > 0, q_i > 0$ 和 $k_i > 0$, 使得

$$p_i b_i - \frac{q_i \varepsilon_i k_i^{-p}}{p+1} > 0, \quad \delta_i - \frac{p \varepsilon_i k_i}{p+1} > 0. \quad (13)$$

实际上只需 $0 < k_i < \frac{(p+1)\delta_i}{p\varepsilon_i}$ 且 $0 < q_i = \frac{p_i}{m}$, m 为充分大的正整数.

令

$$\begin{cases} \alpha_i = p r_i + \frac{p(p-1)}{2} \sigma_{1i}^2 + \sum_{j=1}^n d_{ij} (p-1 + p \alpha_{ij}) + \sum_{j=1}^n d_{ji} \frac{p_j}{p_i}, \\ \alpha'_i = -p \gamma_i + \frac{p(p-1)}{2} \sigma_{2i}^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (p-1 + p \beta_{ij}) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \frac{p_j}{p_i}, \\ \beta_i = p p_i^{-1/p} \left(b_i - \frac{\varepsilon_i k_i^{-p}}{m(p+1)} \right), \quad \beta'_i = p q_i^{-1/p} \left(\delta_i - \frac{p \varepsilon_i k_i}{p+1} \right). \end{cases} \quad (14)$$

设 $\check{\alpha} = \max \{ \alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \dots, \alpha_n, \alpha'_n \}$, $\hat{\beta} = \min \{ \beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2, \dots, \beta_n, \beta'_n \}$. 显然 $\check{\alpha} > 0$, $\hat{\beta} > 0$, 则有

$$\begin{aligned} d \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \leq & \left[\check{\alpha} \sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n (p_i^{(p+1)/p} x_i^{p+1}(t) + q_i^{(p+1)/p} y_i^{p+1}(t)) \right] dt + \\ & p \sum_{i=1}^n p_i \sigma_{1i} x_i^p(t) dB_{1i}(t) + p \sum_{i=1}^n q_i \sigma_{2i} y_i^p(t) dB_{2i}(t). \end{aligned} \quad (15)$$

对上式两边由 0 到 t 积分并取期望, 可得

$$\frac{dE \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right]}{dt} \leq$$

$$\begin{aligned} & \check{\alpha} E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] - \hat{\beta} E \left[\sum_{i=1}^n (p_i^{(p+1)/p} x_i^{p+1}(t) + q_i^{(p+1)/p} y_i^{p+1}(t)) \right] \leq \\ & \check{\alpha} E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] - (2n)^{-1/p} \hat{\beta} E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right]^{(p+1)/p} = \\ & E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \left(\check{\alpha} - (2n)^{-1/p} \hat{\beta} E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right]^{1/p} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

再令 $z(t) = E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right]$, 则有

$$\frac{dz(t)}{dt} \leq z(t) (\check{\alpha} - (2n)^{-1/p} \hat{\beta} z^{1/p}(t)). \quad (17)$$

注意到如下方程的解

$$\frac{d\bar{z}(t)}{dt} = \bar{z}(t) (\check{\alpha} - (2n)^{-1/p} \hat{\beta} \bar{z}^{1/p}(t)) \quad (18)$$

满足

$$\bar{z}(t) \rightarrow 2n \cdot \left(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\beta}} \right)^p, \quad t \rightarrow \infty. \quad (19)$$

由比较定理, 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} z(t) = E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \leq 2n \cdot \left(\frac{\check{\alpha}}{\hat{\beta}} \right)^p := L(p). \quad (20)$$

上式说明 $\exists T > 0$, 使得

$$E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \leq 2L(p), \quad t > T. \quad (21)$$

此外由 $E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right]$ 连续性可知 $\exists C(p) > 0$, 使得

$$E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \leq C(p), \quad t \in [0, T]. \quad (22)$$

令 $\kappa(p) = \max \{ 2L(p), C(p) \}$, 则

$$E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \leq \kappa(p), \quad t \geq 0, p > 1. \quad (23)$$

证明结束.

定理 2 对任意的初值 $\mathbf{X}(0) \in R_+^{2n}$, 系统(3)的解为随机最终有界.

证明 由定理 1 知 SDE(3)的解 $\mathbf{X}(t)$ 会以概率 1 停留在正的核 R_+^{2n} 内. 令

$$Q = \min \{ p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n \}.$$

注意到 $|\mathbf{X}(t)| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \right]^{1/2}$ 且

$$|\mathbf{X}(t)|^p \leq (2n)^{p/2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i^p + y_i^p) \right].$$

因此, 可以得到

$$E \left[\sum_{i=1}^n (p_i x_i^p(t) + q_i y_i^p(t)) \right] \geq QE \left[\sum_{i=1}^n (x_i^p(t) + y_i^p(t)) \right] \geq$$

$$(2n)^{-p/2} E |\mathbf{X}(t)|^p, \quad (24)$$

且由式(11)有

$$E |\mathbf{X}(t)|^p \leq \frac{(2n)^{p/2}}{Q} \kappa(p) = \bar{\kappa}(p) < +\infty,$$

由 Chebyshev 不等式可得结论.

3 灭绝性

这节本文将说明,如果环境噪声足够大,方程(3)的解会依概率 1 趋于 0,但在确定性中解却是持久的.

定理 3 对任意给定的初值 $\mathbf{X}(0) \in R_+^{2n}$, SDE(3)的解有如下性质:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{t} \leq \check{l}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} \quad \text{a.s.}, \quad (25)$$

这里

$$\check{l}_1 = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r_i - \sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^n d_{ji} \right\}, 0 \right\}, \quad \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n (1/\sigma_{1i}^2)}. \quad (26)$$

特别地,若 $\check{l}_1 - \hat{\sigma}_1^2/2 < 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = 0 \quad \text{a.s.}$

注 2 定理 3 的证明方法与下列定理相似,本文主要介绍下面这个定理说明整个系统的灭绝性.定理 3 说明若条件 $\check{l}_1 - \hat{\sigma}_1^2/2 < 0$ 成立,即当食饵种群受到很大的白噪声干扰,则会灭绝.

定理 4 对任意给定的初值 $\mathbf{X}(0) \in R_+^{2n}$, SDE(3)的解有如下性质:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i x_i + e_i y_i) \right]}{t} \leq \check{l} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \quad \text{a.s.}, \quad (27)$$

这里

$$\check{l} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r_i + \sum_{j=1}^n \left(d_{ji} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} - d_{ij} \alpha_{ij} \right) \right\}, \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ -\gamma_i + \sum_{j=1}^n \left(\lambda_{ji} \frac{e_j}{e_i} - \lambda_{ij} \beta_{ij} \right) \right\} \right\},$$

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n (1/\sigma_{1i}^2 + 1/\sigma_{2i}^2)}.$$

特别地,若 $\check{l} - \hat{\sigma}^2/2 < 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = 0 \quad \text{a.s.}$

证明 定义 C^2 -函数 $V(\mathbf{X}(t)) = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i x_i + e_i y_i)$, 由 Itô 公式计算

$$dV = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left[r_i x_i - b_i x_i^2 - e_i x_i y_i + \sum_{j=1}^n d_{ij} (x_j - \alpha_{ij} x_i) \right] dt + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sigma_{1i} x_i dB_{1i}(t) +$$

$$\sum_{i=1}^n e_i \left[-\gamma_i y_i - \delta_i y_i^2 + \varepsilon_i x_i y_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} (y_j - \beta_{ij} y_i) \right] dt + \sum_{i=1}^n e_i \sigma_{2i} y_i dB_{2i}(t),$$

$$d \ln V = \frac{1}{V} dV - \frac{1}{V^2} (dV)^2 =$$

$$\frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left[-b_i x_i^2 - e_i x_i y_i + \left(r_i + \sum_{j=1}^n d_{ji} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} - d_{ij} \alpha_{ij} \right) x_i \right] dt +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sigma_{1i} x_i dB_{1i}(t) - \frac{1}{2V^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \sigma_{1i}^2 x_i^2 dt + \\
& \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n e_i \left[-\delta_i y_i^2 + \varepsilon_i x_i y_i + \left(-\gamma_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \frac{e_j}{e_i} - \lambda_{ij} \beta_{ij} \right) y_i \right] dt + \\
& \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n e_i \sigma_{2i} y_i dB_{2i}(t) - \frac{1}{2V^2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \sigma_{2i}^2 y_i^2 dt. \tag{28}
\end{aligned}$$

令

$$\check{l} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r_i + \sum_{j=1}^n \left(d_{ji} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} - d_{ij} \alpha_{ij} \right) \right\}, \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ -\gamma_i + \sum_{j=1}^n \left(\lambda_{ji} \frac{e_j}{e_i} - \lambda_{ij} \beta_{ij} \right) \right\} \right\},$$

则

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \left(\varepsilon_i \left[-b_i x_i^2 - e_i x_i y_i + \left(r_i + \sum_{j=1}^n \left(d_{ji} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} - d_{ij} \alpha_{ij} \right) \right) x_i \right] + \right. \\
& \left. e_i \left[-\delta_i y_i^2 + \varepsilon_i x_i y_i + \left(-\gamma_i + \sum_{j=1}^n \left(\lambda_{ji} \frac{e_j}{e_i} - \lambda_{ij} \beta_{ij} \right) \right) y_i \right] \right) \leq \\
& \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \left[\varepsilon_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n \left(d_{ji} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} - d_{ij} \alpha_{ij} \right) \right) x_i + \right. \\
& \left. e_i \left(-\gamma_i + \sum_{j=1}^n \left(\lambda_{ji} \frac{e_j}{e_i} - \lambda_{ij} \beta_{ij} \right) \right) y_i \right] \leq \\
& \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i \check{l} x_i + e_i \check{l} y_i) = \check{l}. \tag{29}
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可以得到

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2V^2} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^2 \sigma_{1i}^2 x_i^2 + e_i^2 \sigma_{2i}^2 y_i^2) = -\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^2 \sigma_{1i}^2 x_i^2 + e_i^2 \sigma_{2i}^2 y_i^2)}{2 \left[\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i x_i + e_i y_i) \right]^2} \leq \\
& -\frac{\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right)^2}{2 \sum_{i=1}^n (1/\sigma_{1i}^2) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right)^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n e_i y_i \right)^2}{2 \sum_{i=1}^n (1/\sigma_{2i}^2) \left(\sum_{i=1}^n e_i y_i \right)^2} \leq \\
& -\frac{1}{2 \sum_{i=1}^n (1/\sigma_{1i}^2 + 1/\sigma_{2i}^2)} = -\frac{\hat{\sigma}^2}{2}. \tag{30}
\end{aligned}$$

将式(29)、(30)代入式(28)得到

$$d \ln V \leq \left(\check{l} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) dt + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i \sigma_{1i} x_i dB_{1i}(t) + e_i \sigma_{2i} y_i dB_{2i}(t)], \tag{31}$$

即

$$\ln V(\mathbf{X}(t)) \leq \ln V(\mathbf{X}(0)) + \int_0^t \left(\check{l} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) dt + M(t), \tag{32}$$

这里 $M(t)$ 为鞅定义为

$$M(t) = \int_0^t \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i \sigma_{1i} x_i(s) dB_{1i}(s) + e_i \sigma_{2i} y_i(s) dB_{2i}(s)] =$$

$$\int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i \sigma_{1i} x_i(s) dB_{1i}(s) + e_i \sigma_{2i} y_i(s) dB_{2i}(s)]}{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i x_i(s) + e_i y_i(s)]}, \quad (33)$$

其中 $M(0) = 0$. 由鞅的二次变差公式得

$$\begin{aligned} \langle M, M \rangle_t &= \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i^2 \sigma_{1i}^2 x_i^2(s) + e_i^2 \sigma_{2i}^2 y_i^2(s)]}{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i x_i(s) + e_i y_i(s)]^2} ds \leq \\ &\check{\sigma}^2 \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i^2 x_i^2(s) + e_i^2 y_i^2(s)]}{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_i^2 x_i^2(s) + e_i^2 y_i^2(s)]} ds = \check{\sigma}^2 t, \end{aligned} \quad (34)$$

这里 $\check{\sigma}^2 = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_{1i}^2, \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_{2i}^2 \right\}$. 由鞅的强大数定律^[12]有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0 \quad \text{a.s.} \quad (35)$$

最后由式(32)两边除以 t 并令 $t \rightarrow \infty$ 得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln V}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\check{\lambda} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) dt = \check{\lambda} - \hat{\sigma}^2/2 \quad \text{a.s.} \quad (36)$$

定理证毕.

注3 定理4说明了当捕食者和食饵种群都受到较大的白噪声干扰且条件 $\check{\lambda} - \hat{\sigma}^2/2 < 0$ 成立时, 则两个物种都将会灭绝. 在研究种群生态系统的动力学行为时, 证明系统存在唯一的全局非负解是研究其他动力学行为如灭绝性的基础. 灭绝是指无穷远处的状态, 正解的存在性与种群会灭绝没有关系.

4 数值模拟

为了验证前面证明的结论, 对系统(3)的解进行数值模拟. 由 Milstein 方法^[11]考虑系统(3)当 $n = 2$ 时的离散化系统:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + [x_{1,k}(r_1 - b_1 x_{1,k} - e_1 y_{1,k}) + d_{12}(x_{2,k} - x_{1,k})]h + \\ &\quad \sigma_{11} x_{1,k} \sqrt{h} \xi_{1,k} + \frac{1}{2} \sigma_{11}^2 x_{1,k} (h \xi_{1,k}^2 - h), \\ y_{1,k+1} &= y_{1,k} + [y_{1,k}(-\gamma_1 - \delta_1 y_{1,k} + \varepsilon_1 x_{1,k}) + \lambda_{12}(y_{2,k} - y_{1,k})]h + \\ &\quad \sigma_{21} y_{1,k} \sqrt{h} \eta_{1,k} + \frac{1}{2} \sigma_{21}^2 y_{1,k} (h \eta_{1,k}^2 - h), \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + [x_{2,k}(r_2 - b_2 x_{2,k} - e_2 y_{2,k}) + d_{21}(x_{1,k} - x_{2,k})]h + \\ &\quad \sigma_{12} x_{2,k} \sqrt{h} \xi_{2,k} + \frac{1}{2} \sigma_{12}^2 x_{2,k} (h \xi_{2,k}^2 - h), \\ y_{2,k+1} &= y_{2,k} + [y_{2,k}(-\gamma_2 - \delta_2 y_{2,k} + \varepsilon_2 x_{2,k}) + \lambda_{21}(y_{1,k} - y_{2,k})]h + \\ &\quad \sigma_{22} y_{2,k} \sqrt{h} \eta_{2,k} + \frac{1}{2} \sigma_{22}^2 y_{2,k} (h \eta_{2,k}^2 - h), \end{aligned}$$

其中 $\xi_{i,k}, \eta_{i,k}, i = 1, 2$ 是服从 $N(0, 1)$ 分布的 Gauss 随机变量. 使用上面所述的数值方法和 MATLAB 软件, 选取参数 $r_1 = 0.4, r_2 = 0.3, b_1 = 0.5, b_2 = 0.4, e_1 = e_2 = 0.2, d_{11} = d_{22} = 1, d_{12} = 1.2, d_{21} = 1.2, \lambda_{11} = \lambda_{22} = 1, \lambda_{12} = 0.3, \lambda_{21} = 0.4, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.2, \delta_1 = \delta_2 = 0.1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.3$, 初值 $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (0.8, 0.2, 0.4, 0.18)$, 时间步长 $h = 0.01$.

图 1 中取 $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$ 即为相应的确定性系统, 图 1 左侧是食饵 x_1 和 x_2 的序列图, 右侧是捕食者 y_1 和 y_2 的序列图. 而图 2 中 $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0.01$, 与图 1 比较发现当噪声很小时随机系统仿效确定性系统且走势几乎一致. 图 3 中 $\sigma_{11} = 1.4, \sigma_{12} = 1.5, \sigma_{21} = 0.01, \sigma_{22} = 0.01$, 即当食饵种群受到很大的白噪声干扰, 满足定理 3 的条件 $\check{l}_1 - \hat{\sigma}_1^2/2 < 0$, 则会导致食饵种群的灭绝同时也会导致捕食者种群的灭绝, 所以系统(3)的解趋于 0. 图 4 中 $\sigma_{11} = 0.01, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.8, \sigma_{22} = 0.7$, 不满足定理 4 两物种灭绝的条件, 捕食者种群由于受到很大的白噪声干扰则会灭绝, 但是食饵种群会存活下来. 图 5 中 $\sigma_{11} = 1.4, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.01, \sigma_{22} = 0.01, d_{12} = d_{21} = 0, \lambda_{12} = 0, \lambda_{21} = 0$, 即仅当斑块 1 的食饵种群受到很大的白噪声干扰, 且捕食者和食饵种群在斑块间都没有扩散, 每个斑块成为孤立的系统, 捕食者只能捕食所在斑块的食饵. 由图像可以看出食饵种群 x_1 因为受到很大的白噪声干扰所以会灭绝同时也会导致捕食者种群 y_1 的灭绝. 而食饵种群 x_2 和捕食者种群 y_2 受到的白噪声干扰较小, 所以都会存活下来.

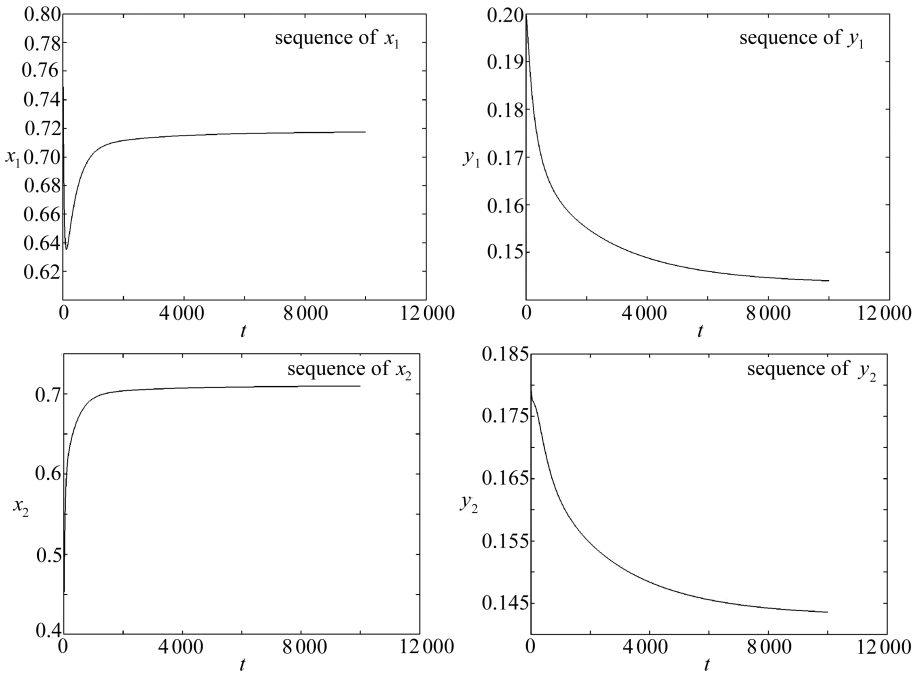
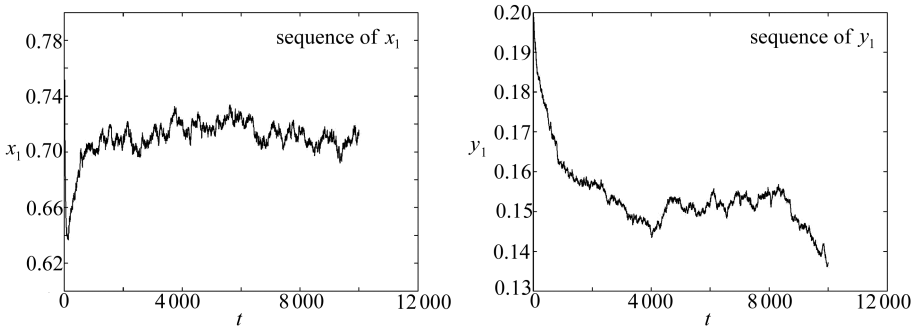


图 1 当噪声强度 $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$ 时系统的序列图

Fig. 1 The solutions of the stochastic system: $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$



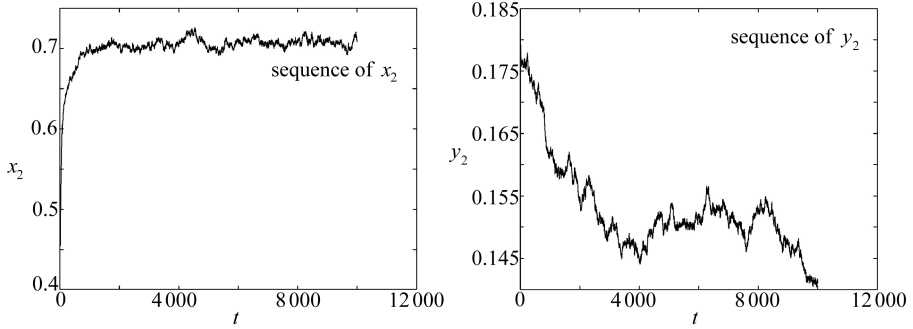


图2 当噪声强度 $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0.01$ 时系统的序列图

Fig. 2 The solutions of the stochastic system; $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0.01$

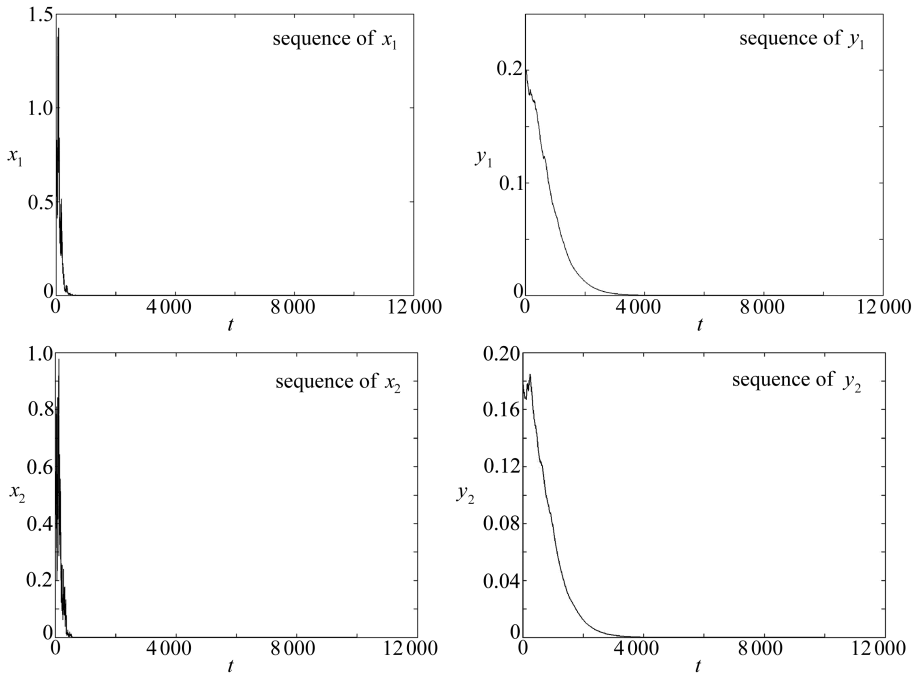
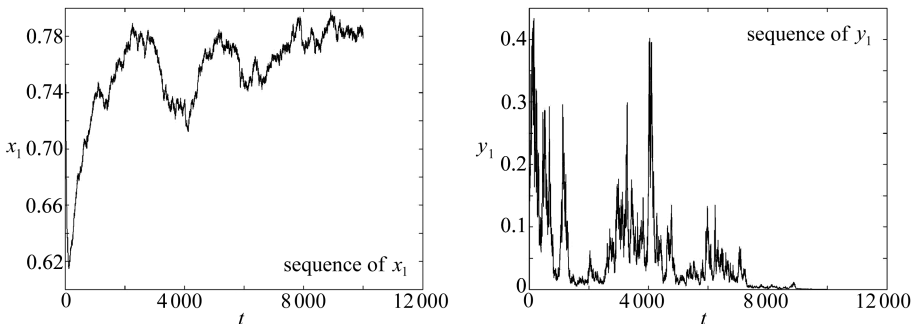


图3 当噪声强度 $\sigma_{11} = 1.4$, $\sigma_{12} = 1.5$, $\sigma_{21} = 0.01$, $\sigma_{22} = 0.01$ 时系统的序列图

Fig. 3 The solutions of the stochastic system; $\sigma_{11} = 1.4$, $\sigma_{12} = 1.5$, $\sigma_{21} = 0.01$, $\sigma_{22} = 0.01$



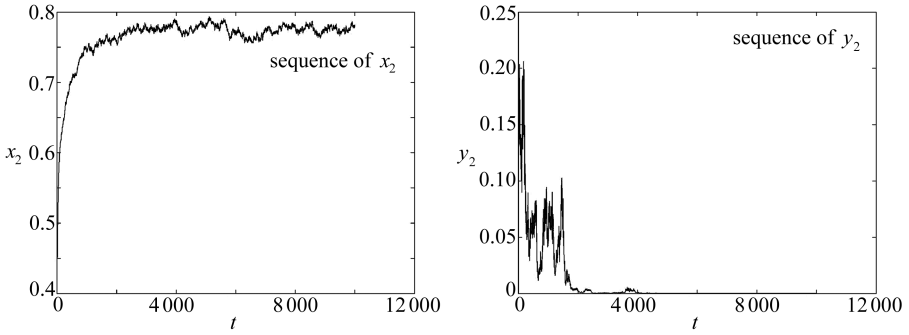


图 4 当噪声强度 $\sigma_{11} = 0.01, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.8, \sigma_{22} = 0.7$ 时系统的序列图

Fig. 4 The solutions of the stochastic system: $\sigma_{11} = 0.01, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.8, \sigma_{22} = 0.7$

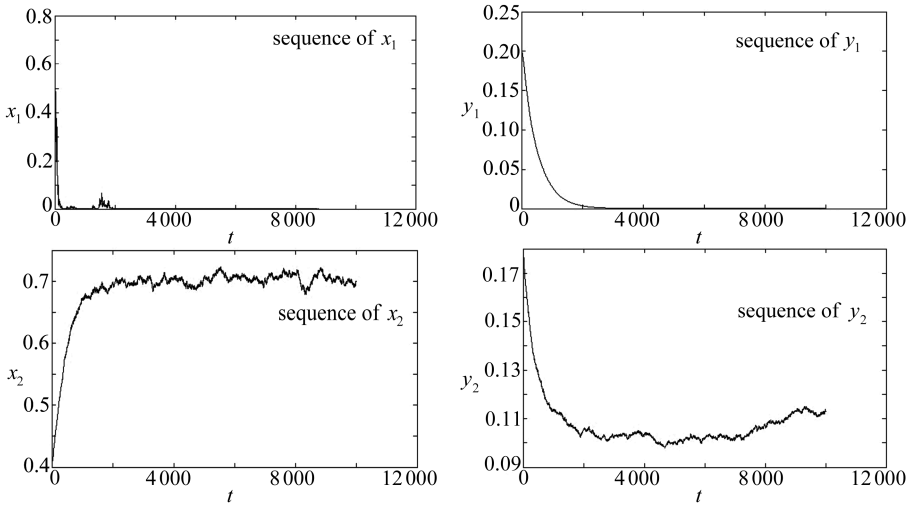


图 5 当噪声强度 $\sigma_{11} = 1.4, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.01, \sigma_{22} = 0.01,$

$d_{12} = d_{21} = 0, \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ 时系统的序列图

Fig. 5 The solutions of the stochastic system: $\sigma_{11} = 1.4, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.01, \sigma_{22} = 0.01,$

$d_{12} = d_{21} = 0, \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$

5 结 论

本文通过对捕食者和食饵均带有扩散的随机捕食-食饵模型的研究,得到了系统在较小的白噪声干扰下具有与确定性系统相似的性质.而当白噪声强度较大时,随机系统则会表现出灭绝性,这是确定性系统所不具有的性质.从生物的角度来看,当部分种群受到较大的白噪声扰动时如恶劣天气、环境剧变等,种群的扩散通过将某些斑块中较大的白噪声平均分配到其他斑块来降低种群灭绝的风险.而当所有种群都受到较大白噪声干扰时,扩散的作用变得不明显,也无法改变种群最终灭绝的结果.本文研究的模型比较接近于自然界的实际情况,有利于我们把模型应用到现实中.得到的定理可以判断种群在什么条件下可以一直持续生存下去,什么情况下会趋于灭亡,这些结论在控制生态平衡方面有一定的应用价值.

参考文献 (References):

[1] 王刚,唐三一. 非线性脉冲状态依赖捕食-被捕食模型的定性分析[J]. 应用数学和力学, 2013,

- 34**(5): 496-505.(WANG Gang, TANG San-yi. Qualitative analysis of prey-predator model with nonlinear impulsive effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(5): 496-505. (in Chinese))
- [2] Bao J, Mao X, Yin G, et al. Competitive Lotka-Volterra population dynamics with jumps[J]. *Nonlinear Analysis; Theory, Methods & Applications*, 2011, **74**(17): 6601-6616.
- [3] Zu L, Jiang D, O' Regan D. Asymptotic properties and simulations of a stochastic single-species dispersal model under regime switching[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2013, **43**(1/2): 387-407.
- [4] ZU Li, JIANG Da-qing, JIANG Fu-quan. Existence, stationary distribution, and extinction of predator-prey system of prey dispersal with stochastic perturbation[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012(**2012**): 547152.
- [5] Cui J, Takeuchi Y, Lin Z. Permanence and extinction for dispersal population systems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, **298**(1): 73-93.
- [6] Zhang L, Teng Z. Boundedness and permanence in a class of periodic time-dependent predator-prey system with prey dispersal and predator density-independence[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, **36**(3): 729-739.
- [7] Kuang Y, Takeuchi Y. Predator-prey dynamics in models of prey dispersal in two-patch environments[J]. *Mathematical Biosciences*, 1994, **120**(1): 77-98.
- [8] Ji C, Jiang D, Shi N. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, **359**(2): 482-498.
- [9] Cai G Q, Lin Y K. Stochastic analysis of predator-prey type ecosystems[J]. *Ecological Complexity*, 2007, **4**(4): 242-249.
- [10] Li M Y, Shuai Z. Global-stability problem for coupled systems of differential equations on networks[J]. *Journal of Differential Equations*, 2010, **248**(1): 1-20.
- [11] Higham D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Review*, 2001, **43**(3): 525-546.
- [12] Mao X. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Elsevier, 2007.
- [13] 高扬, 赵微, 白旭亚. 斑块环境下一类捕食者和食饵均带有扩散的捕食食饵模型稳定性分析[J]. 高师理科学刊, 2015, **35**(4): 14-17.(GAO Yang, ZHAO Wei, BAI Xu-ya. Stability analysis for one class of predator-prey model with the dispersal in predators and preys among patches[J]. *Journal of Science of Teachers' College and University*, 2015, **35**(4): 14-17. (in Chinese))
- [14] 张树文. 具有时滞和扩散的随机捕食-食饵系统[J]. 数学物理学报, 2015, **35**(3): 592-603. (ZHANG Shu-wen. A stochastic predator-prey with time delays and prey dispersal [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2015, **35**(3): 592-603. (in Chinese))
- [15] 徐伟, 戚鲁媛, 高维廷. 噪声和生存环境对捕食生态系统的影响[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(2): 162-171.(XU Wei, QI Lu-yuan, GAO Wei-ting. Effects of noises and habitat complexity in the prey-predator ecosystem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(2): 162-171. (in Chinese))
- [16] Peng S, Zhu X. Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1-dimensional stochastic differential equations[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2006, **116**(3): 370-380.

Dynamics of Dual-Dispersal Predator-Prey Systems Under Stochastic Perturbations

ZU Li¹, HUANG Dong-dong¹, LIU Yang²

(1. *School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University,*

Haikou 571158, P.R.China

2. *College of Information Engineering, Dalian University,*

Dalian, Liaoning 116600, P.R.China)

Abstract: A predator-prey model was considered, in which both the predators and the preys dispersed among n patches under stochastic perturbations. Based on the method of Lyapunov functions, it was proved that a unique global positive solution existed for any given positive initial value; in turn, the property of ultimate boundedness was obtained. In addition, the sufficient conditions for the extinctions of the preys and even the whole system were given. Finally, the theoretic conclusions were validated by numerical simulations.

Key words: predator-prey model; stochastic perturbation; dispersal; stochastically ultimate boundedness; extinction

引用本文/Cite this paper:

祖力, 黄冬冬, 柳扬. 捕食者和食饵均带有扩散的随机捕食-食饵模型动力学分析[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(3): 355-368.

ZU Li, HUANG Dong-dong, LIU Yang. Dynamics of dual-dispersal predator-prey systems under stochastic perturbations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(3): 355-368.