

基于二阶滑移边界的 MHD 在可渗透 延伸壁面上的驻点流研究*

许晓勤^{1,2}, 陈淑梅²

(1. 福建船政交通职业学院 汽车运用工程系, 福州 350007;
2. 福州大学 机械工程及自动化学院, 福州 350116)

摘要: 研究了多孔介质中带二阶滑移边界的不可压缩 MHD 粘性流体在可渗透指数延伸壁面上的驻点流问题.通过相似变换将描述驻点流的控制方程转换为非线性常微分方程,并利用 MATLAB 的 bvp5c 函数求解非线性问题.分析并讨论了一、二阶滑移参数,抽吸/喷注参数以及渗透参数对速度分布和壁面剪切力的影响.结果显示在多孔介质中当壁面延伸速度小于外界主流速度时,随着一阶滑移参数、二阶滑移参数绝对值、抽吸/喷注参数以及渗透参数的增大,速度增大,壁面剪切力减小且均为正数;而当壁面延伸速度大于外界主流速度时形成一个反边界层,速度减小,壁面剪切力绝对值也减小且均为负数;二阶滑移参数对速度剖面和壁面剪切力的影响略大于一阶滑移参数的影响,抽吸/喷注参数对速度剖面和壁面剪切力的影响明显大于渗透参数或磁场参数的影响.

关键词: 可渗透延伸壁面; 二阶滑移; MHD; 驻点流; 边界层

中图分类号: O351.2 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370032

引言

由于连续表面运动而引起的边界层流动是一种基本的物理现象,也是流动的一种重要类型,广泛存在于许多工程领域中,如电线和纤维涂层、金属和聚合物挤出、食品加工、连续铸造、塑料片材的拉伸、换热器及化学处理设备 etc. Crane 首次研究了由于塑性板拉伸使 Newton(牛顿)流体产生稳态的二维边界层流动^[1]; Andersson 研究了在横向磁场作用下粘弹性流体通过不可渗透弹性板的流动^[2]; Ariel 提出了一种稳态、三维粘性、不可压缩流体通过延伸板的非迭代数值解法^[3]; Khan 等分析了可变粘度和热传导对水平延伸板上液膜流动与传热的影响^[4]; Ahmad 等研究了不可压缩粘性流体在双曲拉伸面上的边界层流动及其热传导^[5]等.这些学者研究的边界层流动均属于无滑移边界.无滑移边界是 Navier-Stokes 理论的核心内容,但许多场合无滑移边界并不适用,如大部分非 Newton 流体的流动、人工心脏瓣膜抛光等;许多微系统或微纳系统,如微泵、微阀、微喷管等的流动也存在滑移现象,即壁面滑移.

随着技术进步及科技发展,壁面滑移问题越来越受到科技及工程人员的重视,也成为广大

* 收稿日期: 2016-01-22; 修订日期: 2016-02-15

基金项目: 2012 年度中央财政支持地方高校发展专项资金(闽教财[2012]788 号)

作者简介: 许晓勤(1981—),女,讲师,博士生(通讯作者. E-mail: m140210004@fzu.edu.cn);

陈淑梅(1960—),女,教授,博士生导师.

学者研究的热点问题之一.如 Sparrow 等考虑了速度滑移边界^[6-7];Wang 研究了部分滑移驻点流,给出了 N-S 方程的精确解^[8-9];Ariel 研究了部分滑移延伸板引起的轴对称流^[10];Zhang 等推导了过渡区滑移 N-S 方程,提出一阶及二阶滑移模型并用同伦分析法进行分析^[11];Pereira 研究了不同滑移边界对压力驱动非 Newton 流体的影响^[12];Fang 等研究了二阶滑移粘性流体流动并讨论了各个控制参数的影响^[13];Sahoo 和 Poncet 分析了指数延伸板部分滑移边界条件下的非 Newton 流体边界层流动与传热^[14];Sahoo 研究了二阶导电的非 Newton 流体在一个可径向放射状延伸并伴有部分滑动表面上的流动及其热交换^[15];Mahmood 等研究了磁流体过可渗透收缩板的二阶滑移流动^[16].

多孔介质广泛存在于自然界、工程材料、生物体和地下结构等,在核废料贮藏、蓄能元、电子冷却、绝热、填充床换热器、热管、石油、地热系统、催化反应堆等自然系统和工程实际中,广泛涉及多孔介质内的流动和传热^[17].由于其微结构的复杂性,所以流体在多孔介质中的边界层流动问题越来越受到人们的关注.流体在多孔介质中过伸缩板的具体应用有脉动膜片的模型、过滤、血液流动和人工透析、二元气体扩散、呼吸系统的气体和血液循环模型等.如 Rosali 等研究了多孔介质中流体过可伸缩壁面的驻点流动问题,发现了在流体过收缩壁面时存在双解,而过延伸壁面时双解不存在^[18].Fang 等研究了具有抽吸的收缩表面上的非定常粘性流动问题,结果表明在一定的质量传输参数和非稳定参数范围内存在多解^[19].北京科技大学的苏晓红、郑连存与张欣欣讨论了在可渗透收缩壁面上带滑移的非稳态磁流体流动问题,并利用 DTM-BF 解析方法求解了该问题^[20].Singh 等研究了伴随可变热传导的多孔介质指数延伸板上 Maxwell 模型 MHD 流体的流动与热传递^[21].磁场广泛应用于半导体晶格生长过程及铸造技术中,主要目的是阻碍不必要的热对流和控制熔体的质量传输波动^[22],抽吸/喷注在质量传输中作用很明显,相关研究表明,抽吸的作用有两个:第一,促进质量传输;第二,稳定层流,推迟层流向湍流的转变^[23-24].

本文主要研究了在多孔介质中带二阶滑移边界的 MHD 流体过可渗透指数延伸壁面的边界层流动问题.引入相似变换将偏微分方程组转化为非线性常微分方程,并利用 MATLAB 的 bvp5c 函数对该微分方程进行求解.讨论了一阶滑移参数、二阶滑移参数、抽吸/喷注参数以及渗透参数对速度剖面与壁面剪切力的影响.

1 控制方程

考虑在多孔介质中二维不可压缩的 MHD 粘性流体在可渗透指数延伸壁面上伴随二阶滑移的边界层流动问题.模型示意图如图 1 所示, x 轴方向平行于壁面, y 轴方向垂直于壁面.壁面为多孔介质,多孔介质的渗透率 $k = k_0 e^{-x/L}$,壁面延伸速度 $u_w = b_0 e^{x/L}$,壁面的质量传输 $v_w = -[a_0 v / (2L)]^{1/2} e^{x/(2L)} \cdot s$.磁场 B 垂直于平板, $B = B_0 e^{x/(2L)}$. u 和 v 分别为沿着 x 和 y 方向的速度分量, ν 为流体的运动粘度, L 为参考长度, a_0 和 b_0 均为正常数.

多孔介质中二维不可压缩的 MHD 粘性流体在可渗透指数延伸壁面上边界层流动模型可列写如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{k} (u - U) - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U). \quad (2)$$

相应地满足下列边界条件:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_w(x) + u_{\text{slip}}(x) = b_0 e^{x/L} + u_{\text{slip}}(x), \\ v(x, 0) = v_w(x) = -\sqrt{\frac{a_0 v}{2L}} e^{x/(2L)} \cdot s, \quad u(x, \infty) = U(x) = a_0 e^{x/L}, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$u_{\text{slip}}(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{3 - \sigma l^2}{\sigma} - \frac{3}{2} \frac{1 - l^2}{Kn} \right) \delta \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{4} \left[l^4 + \frac{2}{Kn^2} (1 - l^2) \right] \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A^* \frac{\partial u}{\partial y} + B^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

这里

$$A^* = \frac{2}{3} \left(\frac{3 - \sigma l^2}{\sigma} - \frac{3}{2} \frac{1 - l^2}{Kn} \right) \delta, \quad B^* = -\frac{1}{4} \left[l^4 + \frac{2}{Kn^2} (1 - l^2) \right] \delta^2,$$

Kn 是 Knudsen (科努森) 数, $l = \min(1/Kn, 1)$, σ 是动量调节系数, $0 \leq \sigma \leq 1$, δ 是分子平均自由程^[25]. 由于 $l = \min(1/Kn, 1)$, 因此对于任何的 Kn , 均有 $0 \leq l \leq 1$. 另外由于分子平均自由程 δ 总是正数, 因此 B^* 是负数, 调节 σ 使得 A^* 为正数.

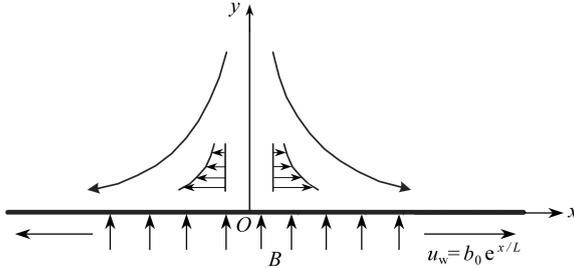


图 1 MHD 在可渗透壁面上的驻点流模型示意图

Fig. 1 Schematic of the MHD stagnation-point flow over a permeable stretching sheet system

引入下列相似变量:

$$\eta = y \sqrt{\frac{a_0}{2vL}} e^{x/(2L)}, \quad \psi = \sqrt{2a_0 v L} e^{x/(2L)} f(\eta), \quad (4)$$

其中 ψ 是流函数. 根据定义, 可知速度分量为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a_0 e^{x/L} f'(\eta), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\frac{a_0 v}{2L}} e^{x/(2L)} (f + \eta f'). \quad (5)$$

将速度分量代入方程(1)和(2), 可知方程(1)自动满足, 方程(2)简化为

$$f''' - 2[(f')^2 - 1] - (P + M)(f' - 1) + f \cdot f'' = 0, \quad (6)$$

其中渗透参数 $P = 2Lv/(a_0 k_0)$, 磁场参数 $M = 2\sigma B_0^2 L/(a_0 \rho)$.

边界条件(3)转化为

$$f(0) = s, \quad f'(0) = \varepsilon + af''(0) + bf'''(0), \quad f'(\infty) = 1, \quad (7)$$

此处, s 是抽吸/喷注参数, 当 $s > 0$ 表示壁面抽吸, $s < 0$ 对应的是壁面喷注; $\varepsilon = b_0/a_0$ 为速度比例参数; 且一阶滑移参数

$$a = A^* \sqrt{\frac{a_0}{2vL}} e^{x/(2L)} = \frac{2}{3} \left(\frac{3 - \sigma l^2}{\sigma} - \frac{3}{2} \frac{1 - l^2}{Kn} \right) \delta \sqrt{\frac{a_0 e^{x/L}}{2vL}},$$

二阶滑移参数

$$b = B^* \frac{a_0}{2\nu L} e^{x/L} = -\frac{1}{4} \left[l^4 + \frac{2}{Kn^2}(1 - l^2) \right] \delta^2 \frac{a_0}{2\nu L} e^{x/L},$$

令 $\delta = ce^{-x/(2L)}$ ($c > 0$), 则

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a_0}{2\nu L}} \left(\frac{3 - \sigma l^2}{\sigma} - \frac{3}{2} \frac{1 - l^2}{Kn} \right) c > 0, \quad b = -\frac{a_0}{8\nu L} \left[l^4 + \frac{2}{Kn^2}(1 - l^2) \right] c^2 < 0.$$

2 数值方法

本文采用 MATLAB 里的 `bvp5c` 函数求解非线性方程 (6) 和 (7). 为了验证该函数的有效性, 本文将方程 (6) 改为 $f''' - [(f')^2 - 1] - (P + M)(f' - 1) + ff'' = 0$, 不考虑抽吸、喷注和边界滑移, 即 $s = a = b = 0$, 利用 MATLAB 里的 `bvp5c` 函数求解 $f''(0)$, 求得的结果与 Wang^[26] 和 Rosali 等^[18] 的数值结果吻合较好, 如表 1 所示. 其他采用 `bvp5c` 函数求解边值问题的例子可参考相关文献 [25] 及文献 [27-29].

表 1 当 $s = a = b = 0$ 时, $f''(0)$ 的当前结果与数值解之比较

Table 1 The present results compared with previous numerical solutions for $s = a = b = 0$

| ε | $P + M = 0$ | | $P + M = 1.2$ | |
|---------------|----------------------|-------------|-------------------------------|-------------|
| | Wang ^[26] | present | Rosali et al. ^[18] | present |
| 0 | 1.232 588 | 1.232 588 | 1.646 964 | 1.646 964 |
| 0.1 | 1.146 56 | 1.146 561 | 1.509 998 | 1.509 998 |
| 0.2 | 1.051 13 | 1.051 130 | 1.366 397 | 1.366 397 |
| 0.5 | 0.713 30 | 0.713 295 | 0.897 720 | 0.897 720 |
| 2 | -1.887 31 | -1.887 307 | -2.178 589 | -2.178 589 |
| 5 | -10.264 75 | -10.264 749 | -11.150 137 | -11.150 137 |

3 结果分析

本文分别讨论了当壁面延伸速度小于外界主流速度 ($\varepsilon < 1$) 以及壁面延伸速度大于外界主流速度 ($\varepsilon > 1$) 时, 一阶滑移参数 a 、二阶滑移参数 b 、抽吸/喷注参数 s 以及渗透参数 P 对流体速度剖面和壁面剪切力的影响. 由于磁场参数 M 和渗透参数 P 对流体速度剖面和壁面剪切力的影响是同等的, 因此本文略去对磁场参数 M 的讨论.

图 2、图 3 讨论的是参数 ε 、一阶滑移参数 a 和二阶滑移参数 b 对指数延伸壁面引起的边界层流动的影响. 图中表明: 在 $\varepsilon = 0.5 < 1$ 和 $\varepsilon = 2 > 1$ 两种情况下, 边界层的厚度都随着一阶滑移参数 a 、二阶滑移参数绝对值 $|b|$ 的增大而减小. 当 $\varepsilon < 1$ 时, 即当壁面延伸速度小于外界主流速度时, 形成一个边界层, 并且速度随着 a 和 $|b|$ 的增大而增大. 而当壁面延伸速度大于外界主流速度时, 即 $\varepsilon > 1$ 时却形成一个反边界层, 同时 a 和 $|b|$ 的增大会引起速度的减小. 从图 2、图 3 还可以看出, 二阶滑移参数绝对值 $|b|$ 对速度剖面的影响略大于一阶滑移参数 a 对速度剖面的影响.

图 4、图 5 讨论的是参数 ε 、抽吸/喷注参数 s 和渗透参数 P 对指数延伸壁面引起的边界层流动的影响. 图中表明: 在 $\varepsilon = 0.5 < 1$ 和 $\varepsilon = 2 > 1$ 两种情况下, 边界层的厚度都随着抽吸/喷注参数 s 和渗透参数 P 的增大而减小. 当 $\varepsilon < 1$ 时, 即当壁面延伸速度小于外界主流速度时, 形成一个边界层, 并且速度随着 s 和 P 的增大而增大. 而当壁面延伸速度大于外界主流速度时, 即 $\varepsilon > 1$ 时却形成一个反边界层, 同时 s 和 P 的增大会引起速度的减小. 从图 4、图 5 还可以看出, 抽吸/喷注参数 s 对速度剖面的影响明显大于渗透参数 P 对速度剖面的影响.

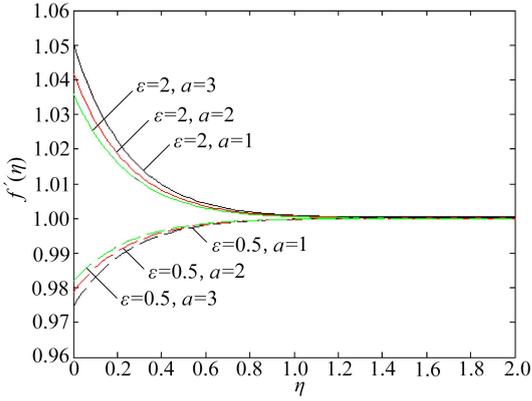


图2 一阶滑移参数 a 取不同值时的速度分布图
($P = 3, s = 2, b = -1$)

Fig. 2 Velocity profiles at various values of 1st-order slip parameter a for $P = 3, s = 2, b = -1$

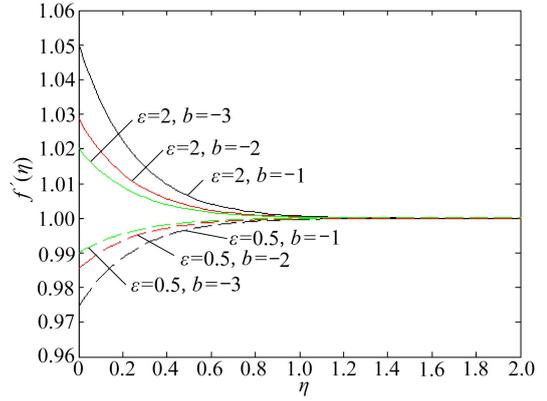


图3 二阶滑移参数 b 取不同值时的速度分布图
($P = 3, s = 2, a = 1$)

Fig. 3 Velocity profiles at various values of 2nd-order slip parameter b for $P = 3, s = 2, a = 1$

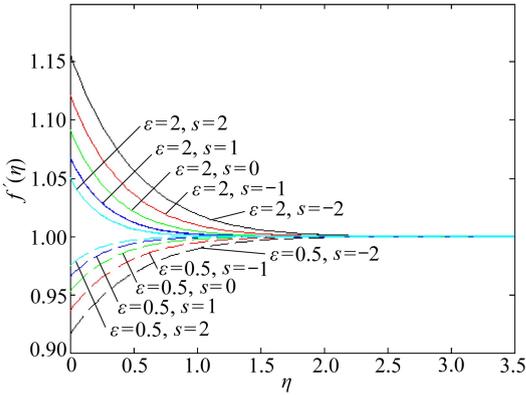


图4 抽吸/喷注参数 s 取不同值时的速度分布图
($P = 3, a = 1, b = -1$)

Fig. 4 Velocity profiles at various values of suction/injection parameter s for $P = 3, a = 1, b = -1$

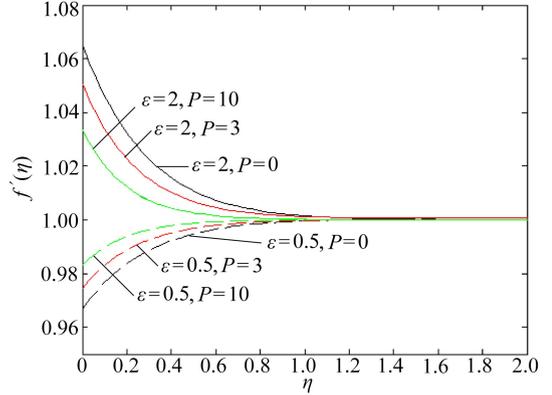


图5 渗透参数 P 取不同值时对应的速度分布图
($s = 2, a = 1, b = -1$)

Fig. 5 Velocity profiles at various values of permeability parameter P for $s = 2, a = 1, b = -1$

图6、图7分别给出了当壁面延伸速度小于外界主流速度 ($\varepsilon < 1$, 以 $\varepsilon = 0.5$ 为例) 以及壁面延伸速度大于外界主流速度 ($\varepsilon > 1$, 以 $\varepsilon = 2$ 为例) 时, 一阶滑移参数 a 、二阶滑移参数 b 对壁面剪切力的影响。结果显示当壁面延伸速度小于外界主流速度 ($\varepsilon = 0.5$) 时, 随着一阶滑移参数 a 、二阶滑移参数绝对值 $|b|$ 的增大, 壁面剪切力减小且均为正数; 当壁面延伸速度大于外界主流速度 ($\varepsilon = 2$) 时, 随着一阶滑移参数 a 、二阶滑移参数绝对值 $|b|$ 的增大, 壁面剪切力绝对值减小且均为负数; 二阶滑移参数绝对值 $|b|$ 对壁面剪切力的影响略大于一阶滑移参数 a 对壁面剪切力的影响。

图8、图9分别给出了当壁面延伸速度小于外界主流速度 ($\varepsilon < 1$, 以 $\varepsilon = 0.5$ 为例) 以及壁面延伸速度大于外界主流速度 ($\varepsilon > 1$, 以 $\varepsilon = 2$ 为例) 时, 抽吸/喷注参数 s 、渗透参数 P 对壁面剪切力的影响。结果显示当壁面延伸速度小于外界主流速度 ($\varepsilon = 0.5$) 时, 随着抽吸/喷注参数 s 、渗透参数 P 的增大, 壁面剪切力减小且均为正数; 当壁面延伸速度大于外界主流速度 ($\varepsilon = 2$) 时, 随着抽吸/喷注参数 s 、渗透参数 P 的增大, 壁面剪切力绝对值减小且均为负数; 抽吸/喷注参数 s 对壁面剪切力的影响明显大于渗透参数 P 对壁面剪切力的影响。

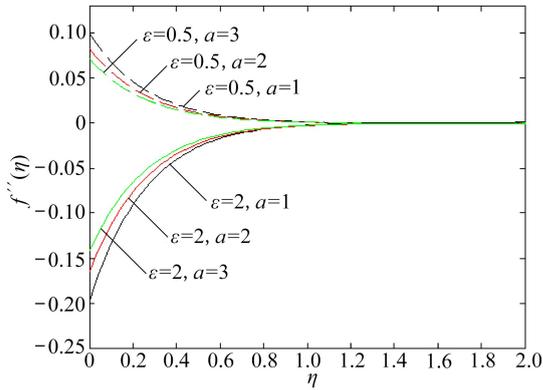


图 6 一阶滑移参数 a 取不同值时的壁面剪切力分布图 ($P = 3, s = 2, b = -1$)

Fig. 6 Skin friction profiles at various values of 1st-order slip parameter a for $P = 3, s = 2, b = -1$

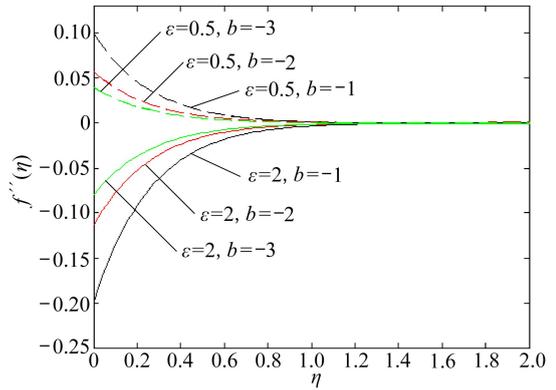


图 7 二阶滑移参数 b 取不同值时的壁面剪切力分布图 ($P = 3, s = 2, a = 1$)

Fig. 7 Skin friction profiles at various values of 2nd-order slip parameter b for $P = 3, s = 2, a = 1$

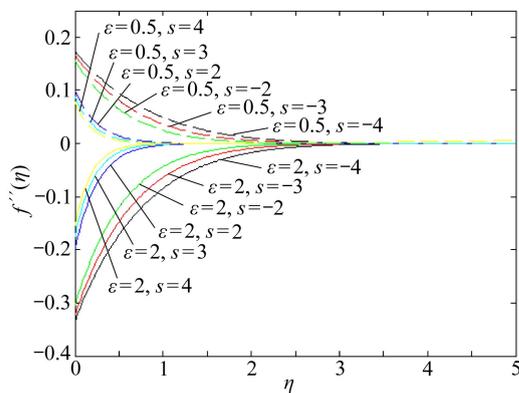


图 8 抽吸/喷注参数 s 取不同值时的壁面剪切力分布图 ($P = 3, a = 1, b = -1$)

Fig. 8 Skin friction profiles at various values of suction/injection parameter s for $P = 3, a = 1, b = -1$

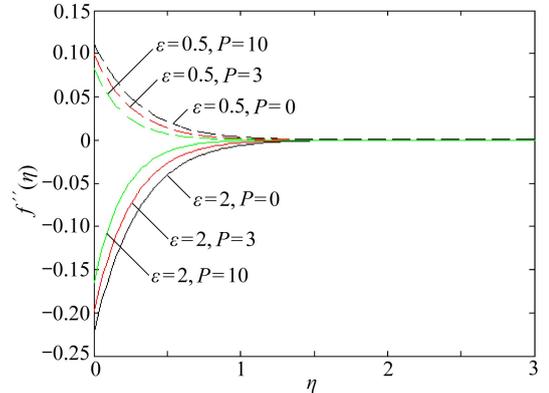


图 9 渗透参数 P 取不同值时对应的壁面剪切力分布图 ($s = 2, a = 1, b = -1$)

Fig. 9 Skin friction profiles at various values of permeability parameter P for $s = 2, a = 1, b = -1$

4 结 论

粘性流体在可渗透延伸壁面上的驻点流问题是一种基本的物理现象,随着技术进步及科技发展这一问题越来越受到科技及工程人员的重视.本文从理论上研究了带二阶滑移边界的不可压缩 MHD 粘性流体在可渗透指数延伸壁面上的二维驻点流问题.借助于相似变换将偏微分方程组转换成非线性的常微分方程,通过 MATLAB 的 bvp5c 函数进行数值求解,并对数值计算结果进行分析,更加深刻地理解了这一基本物理现象,得到了如下结论:

- 1) 在多孔介质中当壁面延伸速度小于外界主流速度时,随着一阶滑移参数、二阶滑移参数绝对值、抽吸/喷注参数以及渗透参数的增大,速度增大,壁面剪切力减小且均为正数.
- 2) 当壁面延伸速度大于外界主流速度时形成一个反边界层,随着一阶滑移参数、二阶滑移参数绝对值、抽吸/喷注参数以及渗透参数的增大,速度变化情况正好相反,壁面剪切力绝对值减小且均为负数.

3) 磁场参数 M 和渗透参数 P 对流体速度剖面和壁面剪切力的影响相当,二阶滑移参数对速度剖面和壁面剪切力的影响略大于一阶滑移参数的影响,抽吸/喷注参数对速度剖面和壁面剪切力的影响明显大于渗透参数或磁场参数的影响。

本文的创新点:

1) 引入二阶滑移边界并用图像详细讨论一阶滑移参数及二阶滑移参数对延伸壁面驻点流速度剖面和壁面剪切力的影响;

2) 延伸板延伸速度呈指数规律;

3) 考虑磁场、渗透参数对延伸壁面驻点流速度剖面和壁面剪切力的影响;

4) 利用 MATLAB 的 `bvp5c` 函数进行数值求解。

总之,带有延伸表面的边界层流动问题具有广阔的应用前景.本文研究基于二阶滑移边界的 MHD 在可渗透壁面上的驻点流问题具有一定的代表性,对于工程上探讨延伸板上带二阶滑移边界 MHD 在可渗透壁面上的驻点流问题及各参数对速度和壁面剪切力的特殊影响具有重要意义。

参考文献 (References):

- [1] Crane L J. Flow past a stretching plate [J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1970, **21**(4): 645-647.
- [2] Andersson H I. MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface [J]. *Acta Mechanica*, 1992, **95**(1): 227-230.
- [3] Ariel P D. On computation of the three-dimensional flow past a stretching sheet [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **188**(2): 1244-1250.
- [4] Khan Y, Wu Q B, Faraz N, Yildirim A. The effects of variable viscosity and thermal conductivity on a thin film flow over a shrinking/stretching sheet [J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2011, **61**(11): 3391-3399.
- [5] A·艾哈迈德, S·阿司哈. 双曲拉伸面上的流动及其热交换 [J]. *应用数学和力学*, 2012, **33**(4): 425-433. (Ahmad A, Asghar S. Flow and heat transfer over a hyperbolic stretching sheet [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(4): 425-433. (in Chinese))
- [6] Sparrow E M, Beavers G S, Hung L Y. Flow about a porous-surfaced rotating disk [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1971, **14**(7): 993-996.
- [7] Sparrow E M, Beavers G S, Hung L Y. Channel and tube flows with surface mass transfer and velocity slip [J]. *Physics of Fluids*, 1971, **14**(7): 1312-1319.
- [8] Wang C Y. Stagnation flows with slip: exact solution of the Navier-Stokes equations [J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 2003, **54**(1): 184-189.
- [9] Wang C Y. Flow due to a stretching boundary with partial slip—an exact solution of the Navier-Stokes equations [J]. *Chemical Engineering Science*, 2002, **57**(17): 3745-3747.
- [10] Ariel P D. Axisymmetric flow due to stretching sheet with partial slip [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2007, **54**(7/8): 1169-1183.
- [11] ZHANG Tian-tian, JIA Li, WANG Zhi-cheng. Validation of Navier-Stokes equation for the slip flow analysis within transition region [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, **51**(25/26): 6323-6327.
- [12] Pereira G G. Effect of variable slip boundary conditions on the flows of pressure driven non-Newtonian fluids [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2009, **157**(3): 197-206.
- [13] FANG Tie-gang, YAO Shan-shan, ZHANG Ji, Aziz A. Viscous flow over a shrinking sheet with a second order slip flow model [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical*

- Simulation*, 2010, **15**(7): 1831-1842.
- [14] Sahoo B, Poncet S. Flow and heat transfer of a third grade fluid past an exponentially stretching sheet with partial slip boundary condition[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, **54**(23/24): 5010-5019.
- [15] B·萨胡. 二阶流体通过径向延伸平面时滑移、黏性耗散、焦耳热对 MHD 流动的影响[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(2): 150-162. (Sahoo B. Effects of slip, viscous dissipation and Joule heating on the MHD flow and heat transfer of a second grade fluid past a radially stretching sheet[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(2): 150-162. (in Chinese))
- [16] Mahmood T, Shah S M, Abbas G. Magnetohydrodynamic viscous flow over a shrinking sheet with second order slip flow model[J]. *Heat Transfer Research*, 2014, **46**(8): 725-734. doi: 10.1615/HeatTransRes.2015007512.
- [17] 王克用, 王大中, 李培超. 多孔介质平板通道传热模型的两解求解方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 494-504. (WANG Ke-yong, WANG Da-zhong, LI Pei-chao. Two decoupling methods for the heat transfer model of a plate channel filled with a porous medium[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 494-504. (in Chinese))
- [18] Rosali H, Ishak A. Stagnation-point flow over a stretching/shrinking sheet in a porous medium [C]//*The 2013 UKM FST Postgraduate Colloquium*. Selangor, Malaysia, 2013: 949-955. doi: 10.1063/1.4858776.
- [19] FANG Tie-guang, ZHANG Ji, YAO Shan-shan. Viscous flow over an unsteady shrinking sheet with mass transfer[J]. *Chinese Physics Letters*, 2009, **26**(1): 014703.
- [20] 苏晓红, 郑连存, 张欣欣. DTM-BF 方法和可渗透收缩壁上带滑移速度的非稳态磁流体力学流动[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(12): 1451-1464. (SU Xiao-hong, ZHENG Lian-cun, ZHANG Xin-xin. On DTM-BF method and dual solutions for an unsteady MHD flow over a permeable shrinking sheet with velocity slip[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(12): 1451-1464. (in Chinese))
- [21] Singh V, Agarwal S. MHD flow and heat transfer for Maxwell fluid over an exponentially stretching sheet with variable thermal conductivity in porous medium[J]. *Thermal Science*, 2014, **18**(S2): S599-S615.
- [22] LIN Yan-hai, ZHENG Lian-cun, ZHANG Xin-xin. Magnetohydrodynamics thermocapillary Marangoni convection heat transfer of power-law fluids driven by temperature gradient[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2013, **135**(5): 051702.
- [23] Ranjan R, DasGupta S, De S. Mass transfer coefficient with suction for turbulent non-Newtonian flow in application to membrane separations[J]. *Journal of Food Engineering*, 2004, **65**(4): 533-541.
- [24] Ranjan R, DasGupta S, De S. Mass transfer coefficient with suction for laminar non-Newtonian flow in application to membrane separations[J]. *Journal of Food Engineering*, 2004, **64**(1): 53-61.
- [25] Rahman M M, Rosca A V, Pop I. Boundary layer flow of a nanofluid past a permeable exponentially shrinking/stretching surface with second order slip using Buongiorno's model[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **25**(2): 299-319.
- [26] Wang C Y. Stagnation flow towards a shrinking sheet[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, **43**(5): 377-382.
- [27] LIN Yan-hai, ZHENG Lian-cun, ZHANG Xin-xin, MA Lian-xi, Chen G. MHD pseudo-plastic nanofluid unsteady flow and heat transfer in a finite thin film over stretching surface with internal heat generation[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **84**: 903-

911.

- [28] Nandeppanavar M M, Vajravelu K, Abel M S, Siddalingappa M N. Second order slip flow and heat transfer over a stretching sheet with non-linear Navier boundary condition[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2012, **58**: 143-150.
- [29] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013: 277-280. (XUE Ding-yu, CHEN Yang-quan. *Advanced Applied Mathematical Problem Solutions With MATLAB*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 277-280. (in Chinese))

Study on MHD Stagnation-Point Flow Over Permeable Stretching Sheets With 2nd-Order Slip Boundaries

XU Xiao-qin^{1,2}, CHEN Shu-mei²

- (1. *Automobile Application Engineering Dept., Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, P.R.China*;
2. *School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350116, P.R.China*)

Abstract: The incompressible MHD viscous flow with 2nd-order slip about stagnation points over permeable exponentially stretching sheets in porous media was studied. The governing equations describing the stagnation point flow were reduced to nonlinear differential equations through the similarity transformations. Then the `bvp5c` function in MATLAB was employed to solve the nonlinear problem. Finally, the effects of the 1st- and 2nd-order slip parameters, the suction/injection parameter and the permeability parameter on the velocity and the skin friction were analyzed and discussed. The results show that the velocity increases but the skin friction decreases and is positive with the 1st-order slip parameter and the absolute value of the 2nd-order slip parameter, the suction/injection parameter and the permeability parameter, when the sheet's stretching velocity is smaller than the external mainstream velocity; however, an anti-boundary layer forms, the velocity decreases and the absolute value of the skin friction also decreases but is negative, when the sheet's stretching velocity is larger than the external mainstream velocity. The effect of the 2nd-order slip parameter is slightly greater than that of the 1st-order slip parameter on the velocity and the skin friction, and the effect of the suction/injection parameter is significantly greater than that of the permeability parameter.

Key words: permeable stretching sheet; 2nd-order slip; MHD; stagnation-point flow; boundary layer

引用本文/Cite this paper:

许晓勤, 陈淑梅. 基于二阶滑移边界的 MHD 在可渗透延伸壁面上的驻点流研究[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(8): 880-888.

XU Xiao-qin, CHEN Shu-mei. Study on MHD stagnation-point flow over permeable stretching sheets with 2nd-order slip boundaries[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 880-888.